CA, GA és a kételemű számok – harmadszor

Konjugált fogalmak a GA_3-ban

1. Emlékeztető

A térvektorok által generált geometriai algebra, azaz GA_3 általános multivektora a következő formában írható:

$$\boldsymbol{a} = a_0 + a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3} + a_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} + a_5\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3} + a_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} + a_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \tag{1}$$

Ahol $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a GA_3-t generáló tér ortogonális báziselemei, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ bivektorok és $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ trivektor a GA szokásos definíciója szerint. Ezt az általános multivektort az alábbi alakra hoztam:

$$\boldsymbol{a} = a_0 + a_7 I + \boldsymbol{e_1}(a_1 + a_6 I) + \boldsymbol{e_2}(a_2 - a_5 I) + \boldsymbol{e_3}(a_3 + a_4 I) \tag{2}$$

Ahol a pszeudoskalárt, I-vel jelöltem, amire tehát a következő teljesül: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=I$ és $I^2=-1$. Ez az I szám kommutatív a szorzás műveletében a GA minden elemével, így a műveletvégzések során a komplex i-vel hasonló módon „viselkedik”. Következésképpen a (2) kifejezés egy komplex számtest feletti négyesvektort mutat, és kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozhatunk létre a GA_3 és egy olyan komplex számtest feletti Clifford Algebra (CA)[1] között, amelynek általános elemét a (2) írja le, és amelyben a szorzás műveletére klasszikusan az $e_i^2=1 (i=1,2,3)$, $I^2=-1$ igaz, valamint a következők teljesülnek:

$$\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_3}\boldsymbol{I} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_1} = -\boldsymbol{e_3}\boldsymbol{I} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3} = -\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{I} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{e_3}\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_2}\boldsymbol{I} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1}\boldsymbol{I} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{e_3}\boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{I} \tag{5}$$

A (3), (4), (5) összefüggések pontosan a **Pauli** spin-mátrixok[2] algebrájának a geometriai megfelelői.[3] Ez az oka, amiért ezt az algebrát **Pauli** algebrának nevezik. Hasonló okból – például **Hestenes**[4] – a (2) alakkal egyenlő (1) alakban ábrázolható multivektorokat **p-számok**nak nevezi.

Tehát, ha egy komplex számtest feletti speciális CA-val modellezek – másképp egy komplex számtest feletti négyesvektorral számolok – a GA_3 helyett, akkor épp a **Pauli** spin-mátrixok algebrájával egyenértékű definíciókat kell megfogalmaznom a bázisvektorok szorzására ahhoz, hogy az algebra zárt legyen a szorzás műveletére, és ez egyben azt is jelenti, hogy kölcsönös megfeleltetésbe hozható a GA_3-mal.

Az elmúlt közel száz évben a fizika a (2)-sel leírt CA-nak – vagy négyesvektornak – a mátrix megfelelőjét használta a kvantummechanikában és a relativisztikus téridőt tartalmazó leírásoknál.[5]

---

[1] Természetesen bizonyítani kellene, hogy a (2) alak kiegészítve az $e_i^2=1 (i=1,2,3)$, $I^2=-1$ tulajdonságokkal, valamint (3)-, (4)-, (5)-tel egy CA, azaz vektortérből képzett egységelemes asszociatív algebra egy kvadratikus formával ellátva. A bizonyítás triviális, ezért mellőzöm. A CA kvadratikus formája szerepelni fog a (15) egyenletben.

[2] Pontosabban a feles spinű részecskékre használt Pauli mátrixok megfelelői.

[3] Lásd ehhez a **Melléklet**et.

[4] Lásd **David Hestenes,** *„Space–Time Algebra”, 17. oldal.*

[5] Lásd ehhez például **Stephen Gull, Anthony Lasenby, Chris Doran**, *„Imaginary Numbers are not Real — the*

Megjegyzés

A (2)-sel leírt algebra igen árulkodó, megsúgja nekünk az eddigi téves értelmezések lényegét[6], de a GA_3 hiányosságaira is következtethetek belőle. Már sokszor írtam arról, hogy a kételemű számok *mindegyike* egyfajta téridő-topológiát modellez, tehát nemcsak a hiperbolikus számok – amelyek szorzása a Lorentz-transzformációnak felel meg – hanem például a komplex számok is a tér és az idő egyfajta kapcsolatát mutatják a számvektor képzetes és valós részének viszonyában. Tehát a CA-k esetén az eddig skalárnak tekintett komplex szám *téridő-elem*, így a (2) leírásban nem válnak szét tisztán az „idő-" és „térszerű" elemek. Ezért tartom részben jobb leírásnak az (1)-t a (2)-nél. Az (1) leírás sem tökéletes, erről később lesz szó. Már korábban is megfogalmaztam a GA méltatása mellett az ellenvetéseimet is vele kapcsolatban.[7]

2. Involúciók; reverzió és konjugálás a GA_3-ban

Az egydimenziós térből generált CA – és természetesen GA – alapelemein, a kételemű számokon definiált konjugálás műveletéhez hasonló művelet többféleképpen definiálható az egynél több dimenziós térből generált CA- és GA-ban, hiszen ezek struktúrája sokkal gazdagabb az egydimenziósnál. Ezek a műveletek mind involúciók, azaz ismételt alkalmazásukkal visszanyerjük a kiindulási elemet. Ezek közül a reverziót tartja a legfontosabbnak **Hestenes**, mivel ez a művelet független a báziselemek megválasztásától.[8]

2.1. Reverzió a GA_3-ban

Hestenes és **Doran-Lasenby**[9] a következő módon definiálta a *reverzió* műveletét a GA_3-ban, melynek hasznos tulajdonságára már utalást tettem korábban[10]. A reverzió[11] elnevezés arra utal, hogy a k-vektorokban az elemek fordított sorrendjét állítja elő a művelet. Mivel a k-vektorok közül a 0-vektorok és az 1-vektorok, azaz a skalár és a vektor-elemek esetén nincs előjelváltás, de a 2-vektoroknál és a 3-vektoroknál, azaz a bivektoroknál és a trivektoroknál a fordított sorrend előjelváltást eredményez, ezért a művelet valamiféle konjugáltra is emlékeztet. Össze szeretném hasonlítani az (1)-en definiált reverzió hatását a (2)-sel leírt négyesvektoron definiált konjugálással. Az összehasonlításnak azért van értelme, mivel a két alak, azaz (1) és (2) a GA_3-ban ugyanazt az általános multivektort jelenti.

Geometric Algebra of Spacetime" cikkében az 5. pontot; http://geometry.mrao.cam.ac.uk/wp-content/uploads/2015/02/ImagNumbersArentReal.pdf, vagy **David Hestenes,** *„Space–Time Algebra"* című könyvét.

[6] Korábbi cikkemben is megjegyeztem, most megismétlem, hogy a GA idézett fejlesztői nem az általam megfogalmazott téridő-elemek összekuszáltságára utaltak a téves értelmezések kapcsán, hanem a mátrix-matematikában "láthatatlan" geometriai összefüggésekkel érveltek, azaz ebben a konkrét esetben a Pauli-mátrix koordinátákkal kifejezett összefüggését állították szembe a GA-ban ennek megfelelő bázisvektor-szorzatok geometriailag korrektebb formájával.

[7] Lásd például a *„Hogyan tovább egy új számrendszerhez"* című cikket: http://www.infinitemath.hu/matematika/326-hogyan-tovabb-egy-uj-szamrendszerhez

[8] Ebben is megnyilvánul **Hestenes** túlzott törekvése az absztrakcióra, amennyiben kerülni igyekszik az egyedi báziselemek, és velük a koordináták használatát. Ez elméletileg hasznos szándék, de a GA gyakorlati használhatóságát nehezíti.

[9] Lásd **Chris Doran** és **Anthony Lasenby**, közösen írt könyvét – *„Geometric Algebra for Physicist"* (2002)

[10] Lásd a *„A Clifford algebra, a geometriai algebra és a kételemű számok"* cikkben a 4. oldalt; http://www.infinitemath.hu/matematika/332-a-clifford-algebra-a-geometriai-algebra-es-a-ketelemu-szamok

[11] Magyar szakirodalmat nem találtam a témában, ezért magam fordítottam *reverzió*nak az angolul *reversion* megnevezésű műveletet.

A szakirodalomban a **kereszt szimbólum**ot használják a **reverzió művelet** jelölésére, mivel ez a szokott jelölése a **hermitikus konjugálás**nak a mátrix algebrában, és **a reverzió művelet ennek a megfelelője a GA$_3$-ban**. Ezt a jelölést én is követem, így a definíció a fentiek alapján a következő:

$$\boldsymbol{a}^\dagger = a_0 + a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3} - a_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} - a_5\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3} - a_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} - a_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \qquad (6)$$

Alakítsuk át a (6)-t négyesvektor alakra:

$$\boldsymbol{a}^\dagger = a_0 - a_7 I + \boldsymbol{e_1}(a_1 - a_6 I) + \boldsymbol{e_2}(a_2 + a_5 I) + \boldsymbol{e_3}(a_3 - a_4 I) \qquad (7)$$

Ekkor azt kaptuk, amit vártunk, azaz a (2) alaknak egy olyan transzformáltját, amelyben a (2) alakbeli komplex szorzók konjugáltjai szerepelnek. Tehát a reverzió valóban a hermitikus konjugálásnak felel meg, hiszen

- Egyrészt a Pauli mátrix geometriai megfelelőit adó (3), (4), (5) összefüggésekkel kiegészített (2) alakból úgy kaptuk a (7) alakot, hogy abban a komplex szorzók konjugáltjai szerepelnek
- Másrészt a (6)-os alakkal definiált reverzió művelete egyenértékű a (7) alakkal, pontosabban a (3), (4), (5) összefüggésekkel kiegészített (7) alakkal.

Ezzel egy példát láttunk arra is, hogy miért hasznos a GA$_3$-ban az általános multivektor (2) alakja; a segítségével könnyen demonstrálható a GA$_3$-nak és a fizika korábbi matematikájának ekvivalenciája.

Megjegyzés

Már ránézésre is egyfajta konjugált fogalmat juttat eszünkbe a reverzió művelete. **Hestenes** is megjegyzi a könyvében[12], hogy a síkvektorokból generált geometriai algebrában az általa spinor-síknak nevezett síkon a reverzió a konjugálásnak felel meg. Ez nem véletlen a spinor-sík és a komplex számsík közötti kapcsolat miatt.[13]

2.2. Magnitúdó vagy modulus

Minden multivektorra definiálható a reverzió segítségével egy **magnitúdó**nak vagy **modulus**nak nevezett forma. **Hestenes** jelöléseit megtartva **a** multivektor magnitúdója a következő:

$$|\boldsymbol{a}| = \langle \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} \rangle_0^{1/2} \qquad (8)$$

Ahol a felsőindex a gyökvonást jelzi, az alsó 0 index pedig a csúcsos zárójelben lévő geometriai szorzat skalár-elemét jelenti.[14] Könnyen belátható, hogy az $\boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$ geometriai szorzat skalár-eleme mindig pozitív szám, továbbá az (1)-beli általános multivektorra:

$$\langle \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} \rangle_0 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \qquad (9)$$

A definícióból nyilvánvaló, de fontosnak tartom megjegyezni, hogy maga az $\boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a}$ geometriai szorzat skalár mellett vektor-elemet is tartalmaz, azaz

[12] **David Hestenes**, „*New Foundations for Classical Mechanics*”, 51. oldal

[13] Ehhez lásd a „*A Clifford algebra, a geometriai algebra és a kételemű számok*” című cikk 1-2. oldalát: http://www.infinitemath.hu/matematika/332-a-clifford-algebra-a-geometriai-algebra-es-a-ketelemu-szamok

[14] A csúcsos zárójel használatánál az alsó index jelzi a multivektoroknál az elemtípust; azaz 0 alsóindex jelzi a skalárt, 1 a vektort, 2 a bivektort és 3 a trivektort, stb, azaz GA$_3$-ban egy multivektorra a következő igaz: $\boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{a} \rangle_0 + \langle \boldsymbol{a} \rangle_1 + \langle \boldsymbol{a} \rangle_2 + \langle \boldsymbol{a} \rangle_3$.

$$\boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} \rangle_0 + \langle \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{a} \rangle_1 \tag{10}$$

2.3. Konjugált a GA$_3$-ban

A (2) alak egy másfajta konjugált bevezetésére inspirál. Legyen egy, a (2) alakban felírt **a** multivektor konjugáltja a következő, ahol a konjugált jelölésére a felülvonást használtam:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = a_0 + a_7 I - \boldsymbol{e_1}(a_1 + a_6 I) - \boldsymbol{e_2}(a_2 - a_5 I) - \boldsymbol{e_3}(a_3 + a_4 I) \tag{11}$$

Ugyanez az (1) alak formájában a következő:

$$\bar{\boldsymbol{a}} = a_0 - a_1\boldsymbol{e_1} - a_2\boldsymbol{e_2} - a_3\boldsymbol{e_3} - a_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} - a_5\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3} - a_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} + a_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \tag{12}$$

Ennek a konjugált alaknak a segítségével egy geometriai szorzatként definiált bilineáris függvény definiálható: $\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$, melyre a következő igaz:

$$\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_7^2) + 2(a_0a_7 - a_1a_6 + a_2a_5 - a_3a_4)I \tag{13}$$

Fontos észrevenni, hogy maga az $\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ geometriai szorzat csak valós számot és trivektor elemet tartalmaz, amely a komplex képzetes egység megfelelője. Így $\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ *skalár*, hiszen ez az algebra a komplex számokon értelmezett. Tehát

$$\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = \langle \bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} \rangle_0 + \langle \bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} \rangle_3 \tag{14}$$

A (13) egyenlet a következő alakra hozható, mely a konjugáltképzés módjából várható is volt:

$$\bar{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a} = (a_0 + a_7 I)^2 - (a_1 + a_6 I)^2 - (a_2 - a_5 I)^2 - (a_3 + a_4 I)^2 \tag{15}$$

Ez a komplexeken értelmezett algebrában skalár elem, és a (2) alakkal jellemzett algebrabeli négyesvektornak egyfajta norma-négyzete, továbbá jogosan nevezhetjük kvadratikus formának, vele együtt pedig az algebrát CA-nak. Látható a szoros kapcsolat a speciális relativitáselmélet téridő négyesvektorainak hossznégyzete, és a (15)-ös alak között, a különbséget a skalárok komplex volta jelenti.

Ezt a konjugált fogalmat **Hestenes** is bevezette a téridő leírása kapcsán.[15] Nem használta a multivektorok (2) alakját, de végül ugyanazt a definíciót adta, amit én is származtattam a (2)-ből.

Megtartva **Hestenes** jelölését – nála ~ jelöli a konjugáltat – így M tetszőleges multivektorra az általa definiált konjugált a következő:

$$\widetilde{M} = \langle M^\dagger \rangle_+ - \langle M^\dagger \rangle_- = (\langle M \rangle_+ - \langle M \rangle_-)^\dagger \tag{16}$$

Ahol a kereszt szimbólum jelöli a reverziót, a csúcsos zárójel melletti alsó indexben a + jelöli a multivektor páros r-re összegzett r-vektor részét, azaz $\langle M \rangle_+ = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_2$, ahol $\langle M \rangle_0$ értelemszerűen a skalárt, $\langle M \rangle_2$ pedig a 2-vektort (bivektort) jelöli. Hasonlóan – jelöli a multivektor páratlan r-re összegzett r-vektor részét, azaz $\langle M \rangle_- = \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_3$, ahol $\langle M \rangle_1$ értelemszerűen az 1-vektort (vektort), $\langle M \rangle_3$ pedig a 3-vektort (trivektort) jelöli. Ezekből felírva az általános multivektort a következő igaz $M = \langle M \rangle_+ + \langle M \rangle_- = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 + \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3$. Ezek figyelembe vételével a (16) a következő alakra hozható

$$\widetilde{M} = \langle M \rangle_0 - \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 + \langle M \rangle_3 \tag{17}$$

Ez pedig definíció szerint megegyezik a (12)-beli konjugált meghatározásával, azaz a vektorok és a bivektorok előjele változik, a skaláré és a pszeudoskaláré, azaz trivektoré pedig változatlan előjelű marad.

---

[15] Lásd **David Hestenes**, „*New Foundations for Classical Mechanics*” könyvének 580. oldalát.

A szakirodalomban ennek a konjugálásnak nem egységes az elnevezése, még maga **Hestenes** is két elnevezést használ rá. A korábbi, 1966-os megjelenésű *„Space-time Algebra”* című könyvében *transzponál* (transpose)[16] ezzel a konjugálással, míg a későbbi, 1999-es megjelenésű *„New Foundations for Classical Mechanics”* című könyvében konjugálásnak[17] nevezi, igaz kezdetben idézőjelesen, mintegy a konjugálás általánosításaként bevezetve.

Még ennél is tovább bonyolítható a konjugálás; **Hestenes** bevezet még egy műveletet, amit *térkonjugálás*nak[18] – másutt *térinverzió*nak – nevez, melynek a hatására a multivektorban a vektorok és trivektor előjele változik az ellenkezőjére. Ennek csak annyi értelmét látom, hogy általa összekapcsolható a (6)-tal definiált reverzió és a (12)-vel definiált konjugálás művelete, ugyanis a (12) konjugálást úgy is megkaphatjuk, ha egy multivektoron térkonjugálás után a reverzió műveletét hajtjuk végre.

3. Észrevételek

Bár a GA szakirodalma ma már elég gazdag, de nem tekinthető elterjedt eszköztárnak a fizikában. Ennek oka nemcsak újdonságában rejlik, de bizonyos mértékű kidolgozatlanságában is, amit a fent vázolt konjugálási műveletek egységesítésének hiánya is bizonyít. Mindenesetre érdekesnek tartom, hogy a (6)-tal leírt reverzió művelete a mikrofizikában használt hermitikus konjugálással egyenértékű, a (12)-sel definiált konjugálás viszont a téridő fizikában használt konjugált megfelelője. A téridő GA-val történő ábrázolása sem egységes, és az eltérések olyan érdekesek, hogy külön tárgyalást érdemelnek; a következő írásom erről szól majd. Előzetesen annyit, hogy téridő reprezentációk különbözősége abban rejlik, hogy az egydimenziós időt a GA-t generáló tér elemének tekintik, vagy a multivektor skalár-elemével azonosítják. Korábban én épp azt láttam problémának a GA-ban, hogy a skalár-dimenzió matematikailag nem merőleges a térdimenziókra, szemben a kételemű számok számsíkjaiban értelmezhetőkkel. A kételemű számok síkján a merőlegesség a képzetes elemmel való szorzással definiált, és csak a komplex számsíkon felel ez meg a klasszikus $\pi/2$-vel való forgatásnak. A kételemű számok mindegyikére úgy tekintek, mint téridő-topológiákra, azaz nemcsak a hiperbolikus, de a komplex és a parabolikus számok valós és képzetes elemének viszonya is egyfajta idő és tér közötti kapcsolatot tükröz. Ennek értelmében *ugyanazon multivektornak* a valós skalárokkal leírt (1)-es alakja és a komplexnek tekinthető skalárokkal ábrázolt – és a (3)-, (4)-, (5)-sel kiegészített – (2) alakja érdekes következtetéseket sejtet. No, de erről, majd legközelebb.

---

[16] Lásd **Hestenes**, *„Space-Time Algebra”*, 18. oldal.
[17] Lásd **Hestenes**, *„New Foundations for Classical Mechanics”*, 580. oldal
[18] Lásd **Hestenes**, *„Space-Time Algebra”*, 17. oldal.

Melléklet

Pauli algebra[19]

A spin kvantumelméletében használta elsőször **Pauli** a róla elnevezett márixokat ábrázolóeszközként, és csak később fedezték fel a CA-val, majd később a GA-val való kapcsolatait ennek a leírásnak. E felismerések ellenére még ma is egy izotér elnevezésű absztrakt tér izovektoraiként tekintenek a **Pauli**-mátrixokra. Ezért érdemes megtekinteni, milyen egyszerűen reprezentálhatóak a **Pauli**-mátrixok a GA_3 elemeivel.

A GA_3-ban a háromdimenziós tér ortogonális bázisvektorainak (e_1, e_2, e_3) geometriai szorzatára a következő igaz általánosan:

$$e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = \delta_{ij} + I\epsilon_{ijk} e_k \tag{M1}$$

ahol δ a Kronecker delta, I a pszeudoskalár, azaz $I=e_1e_2e_3$ és $I^2=-1$, ϵ_{ijk} pedig a permutációs szimbólum, amire

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & ha\ i = j, j = k, vagy\ k = i \\ +1 & ha\ (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & ha\ (i,j,k) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \end{cases}$$

A térnek ezt a geometriai algebráját, azaz a GA_3-nak a mátrix reprezentációját adják a **Pauli** mátrixok.

A **Pauli** mátrixok a következők:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ezek a mátrixok kielégítik az alábbi egyenletet:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathrm{I} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{M2}$$

ahol δ a Kronecker delta, I a 2x2-es egységmátrix, i a komplex képzetes egység és ϵ_{ijk} a permutációs szimbólum.

(M1) és (M2)-ből következik, hogy a két ábrázolás kölcsönösen megfeleltethető egymásnak.

---

[19] Lásd ehhez például **Stephen Gull, Anthony Lasenby, Chris Doran**, „Imaginary Numbers are not Real — the Geometric Algebra of Spacetime” cikkben a 2.6 pontot: http://geometry.mrao.cam.ac.uk/wp-content/uploads/2015/02/ImagNumbersArentReal.pdf