CA, GA és a kételemű számok – másodszor

Izgalmas végkifejlettel

1. Bevezető gondolatok

Emlékeztetőül megismétlem, hogy a geometriai algebra (GA) egy vektortér **Clifford** algebrája (CA) a valós számtest fölött. Nemcsak a CA és GA fogalmai körül van zavar, ahogy a korábbi cikkemben[1] megfogalmaztam, de az algebra alapfogalmai, a csoport, a gyűrű, a test és a ferdetest kifejezések használata sem egységes. E fogalmak tömör megfogalmazásai a következők:

- **Csoport**: *egyetlen* kétváltozós asszociatív művelet egységelemmel és inverzzel,
- **Gyűrű**: *kettő* darab kétváltozós alapművelet; egy *kommutatív* művelet, amellyel a gyűrű elemei *additív* csoportot alkotnak, és egy *asszociatív* szorzási művelet, amely disztributív az összeadásra.
- **Ferdetest**: olyan *gyűrű*, amelynek a szorzásra nézve van egységeleme és inverze, azaz a 0-tól különböző elemek a szorzásra nézve *csoport*ot alkotnak.
- **Test**: olyan *ferdetest*, amelynek multiplikatív csoportja *kommutatív*.

A csoport kapcsán beszélhetünk *kommutatív*, vagy **Abel**-féle csoportról, ha a csoportművelet kommutatív. *Egységelemes* gyűrű az, ahol a multiplikatív műveletre létezik egységelem. Ebben a tekintetben nem egységesek a definíciók, mivel a gyűrű fogalma alatt sokan magát az egységelemes gyűrűt értik. Az angol nyelvű szakirodalomban a *field* kifejezés a fenti definíciók közül általában a *test*nek felel meg az algebrában. A ferdetestre az angol irodalom a *division ring* kifejezést használja, de előfordul erre a *skew field* megnevezés is, amely inkább ott fordul elő, ahol a művelet antiszimmetriáját, azaz a kommutativitás hiányát hangsúlyozzák. Sajnos a *field* kifejezést következetlenül a kommutatív és a nem kommutatív esetre is használják, azaz testre és ferdetestre egyaránt.

Miért is írtam le mindezt, ami látszólag nem tartozik a tárgyamhoz? Elvégre nem az elnevezés, hanem maga az algebrai struktúra a lényeges, amikor például vektorteret definiálok, vagy egyéb, algebrai struktúra felett értelmezett fogalmat írok körül. Ezeket a fent leírt algebrai struktúrákat a számfogalom –, vagy szűkebb értelemben a skalár-fogalom – algebrai általánosításának gondolhatjuk. A skalár fogalma viszont izgalmas és ellentmondásos szerepet játszik mind a CA, mind a GA kapcsán – és a matematika más területein is – hiszen azon túl, hogy a vektortér az adott skalár-típus felett értelmezett, a skalárszorzat a vektor-elemet a skalárokra képezi le. Ez utóbbi a GA-ban azt jelenti, hogy a klasszikus skalárszorzat definíciójából adódóan a GA-t generáló vektortér elemeit a valós számokra képezi le, és ezen belül a báziselemeinek négyzete 1-gyel egyenlő.

Emlékeztetőül; a CA és GA különbsége az, hogy míg a CA tetszőleges számtest (valós, komplex) vagy ferdetest (kvaternió) vagy egyéb hiperkomplex számrendszer felett értelmezett, addig a GA

[1] Lásd *„A Clifford algebra, a geometriai algebra és a kételemű számok”* című írást; http://www.infinitemath.hu/matematika/332-a-clifford-algebra-a-geometriai-algebra-es-a-ketelemu-szamok

csak a valós számtest felett definiált. A GA-nak azt az érdekességét fedeztem fel, hogy bár mindig a valós számtest felett értelmezett, de bizonyos esetei egyértelműen átalakíthatók olyan CA-vá, amely nem a valós számtest felett értelmezett. Ez nagy reménységgel tölt el egy általános számfogalom kialakításának lehetőségét illetően, bár egyelőre több akadályt látok, mint lehetőséget. Először nézzük a legegyszerűbb eseteket.

2. A sík geometriai algebrája – azaz kétdimenziós vektortér által generált GA

Síkvektorok által generált GA általános eleme a következő:

$$a_0 + a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} \qquad (1)$$

Ahol $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ a sík ortonormált bázisvektorai, az a_i-k (i=1,2,3) pedig valós számok, végül $\mathbf{e_1e_2}$ bivektor a sík pszeudoskalárja, amely a két generáló vektor által meghatározott paralelogramma irányított területét jelenti, és $(\mathbf{e_1e_2})^2=-1$. **Hestenes** nyomán[2] jelöljük ezt a pszeudoskalárt **i**-vel, szem előtt tartva, hogy a komplex i-vel szemben nem kommutatív ez az **i** számelem a szorzásra a GA-ban.

A GA nagy előnye, hogy a vektorokkal nemcsak szorozni[3], de osztani is lehet. Az (1) alakban a középső két tagból $\mathbf{e_1}$-et kiemelve, és $\mathbf{e_1e_2}=\mathbf{i}$ figyelembevételével a következő egyenlőségre jutunk:

$$a_0 + \boldsymbol{e_1}(a_1 + a_2\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}) + a_3\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} = a_0 + a_3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{e_1}(a_1 + a_2\boldsymbol{i}) \qquad (2)$$

A (2) egyenlet jobb oldala igen érdekes, hiszen a skalár tagja, valamint az egyetlen bázisvektor szorzója komplex számhoz hasonló számrendszernek az eleme, amely rendszer zárt a két alapműveletre, ráadásul mindkettőre kommutatív, azaz számtest. Így ez egy „komplex-szerű" számtest feletti, egydimenziós térből generált CA-t mutat. Komplex-szerűnek neveztem, bár „önmagában" ez a számtest nemcsak leképezhető a komplex számsíkra, de azonos vele, így a (2)-ről elmondhatom, hogy $e_1^2=1$ figyelembe vételével a komplex számtest feletti, egydimenziós térből generált CA-nak felel meg, amelyben mind az összeadás, mind a szorzás művelete kommutatív.

Az **i**-nek a komplex imaginárius egységelemtől való eltérése csak a báziselemekkel való szorzásban nyilvánul meg. Ennek következtében hiába végeztem szabályosan a GA-beli műveleteket a (2) egyenletben, az eredményül kapott CA nem azonos az (1) beli GA-val. Ennek belátásához elegendő – a most nem részletezett – szorzás műveletet elvégezni mindkét algebrában oly módon, hogy:

- az (1) által leírt GA-ban a geometriai szorzat összefüggéseinek felhasználásával végezzük a műveletet,
- a (2)-ben leírtakkal úgy, hogy először a (2) jobb oldala által jellemzett CA-ban végezzük el a szorzás műveletét, majd az eredményül kapott (2) számalakot alakítjuk vissza (1) alakká, azaz figyelembe vesszük a kiindulásul szolgáló – és GA-ban igaz – $\mathbf{i}=\mathbf{e_1e_2}$ és $\mathbf{e_1i}=\mathbf{e_2}$ összefüggéseket.

Az (1) és a (2) alapján elvégzett műveletek eltérő eredményt adnak, ez nyilván abból fakad, hogy az **i**-vel jelölt pszeudoskalár nem kommutatív a GA-ban. Mindez tanulságul szolgál arra, hogy egyrészt csínján kell bánni az $\mathbf{e_1e_2}=\mathbf{i}$ egyszerűsítéssel a sík geometriai algebrájában, másrészt sokkal bonyolultabb a GA és a CA kapcsolata, mintsem hogy az egyik a másik részalgebrája lenne.

[2] Lásd az 1. lábjegyzetbeli cikket.

[3] A szorzás két fajtája a belső és a külső szorzat mindegyike visszavezethető a geometriai szorzatra, ezért beszélhetünk mindenféle kétértelműség nélkül a szorzás műveletéről – ami alatt a geometriai szorzatot értjük – a GA-ban.

3. A tér geometriai algebrája – azaz háromdimenziós vektortér által generált GA

Látni fogjuk, hogy a síkgeometriai pszeudoskalár egyszerűsítésének veszélye nem áll fenn a térgeometriai GA-ban, mivel ez a térgeometriai pszeudoskalár kommutatív a szorzás műveletére. Mindezek pedig igen érdekes eredményre vezetnek.

A térvektorok által generált GA általános eleme a következő:

$$a_0 + a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3} + a_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} + a_5\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3} + a_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} + a_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \quad (3)$$

Ahol $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ a tér ortonormált bázisvektorai, az a_i-k (i=1,2,3) valós számok, $\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_j}$ (i,j=1,2,3 és i≠j) az előző pontban említett bivektorok, végül $\mathbf{e_1e_2e_3}$ trivektor a tér pszeudoskalárja, amely a három generáló vektor által meghatározott paralelepipedon irányított térfogatát jelenti, és $(\mathbf{e_1e_2e_3})^2=-1$. **Doran_Lasenby** nyomán[4] jelöljük ezt a pszeudoskalárt I-vel. Ez az I szám kommutatív a szorzás műveletében a GA minden elemével.

A (3) alakban a középső megfelelő tagokból $\mathbf{e_1}$-, $\mathbf{e_2}$-, $\mathbf{e_3}$-at kiemelve, és $\mathbf{e_1e_2e_3}$=I figyelembevételével a következő egyenlőségre jutunk:

$$a_0 + a_7I + \boldsymbol{e_1}(a_1 + a_6I) + \boldsymbol{e_2}(a_2 - a_5I) + \boldsymbol{e_3}(a_3 + a_4I) \quad (4)$$

A (4) kifejezés egy „komplex-szerű” számtest feletti, háromdimenziós térből generált CA-t mutat, sőt egy komplex számtest feletti négyesvektorra emlékeztet. Ezzel a (4) alakkal leírt CA nyilvánvalóan zárt az összeadás műveletére, továbbá a szorzás műveletére is, ha báziselemek szorzására a következő – a GA-ból ismert – definíciókat adom:

$$\boldsymbol{e_1e_2} = \boldsymbol{e_3I} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{e_2e_1} = -\boldsymbol{e_3I} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{e_1e_3} = -\boldsymbol{e_2I} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{e_3e_1} = \boldsymbol{e_2I} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{e_2e_3} = \boldsymbol{e_1I} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{e_3e_2} = -\boldsymbol{e_1I} \quad (7)$$

A GA-ban az elemek (3), és a CA-ban a (4) alakokkal megadott formájával elvégzek egy-egy szorzást:

- az (3) által leírt formában szorozva két tetszőleges elemet a geometriai szorzat összefüggéseit használom,
- a (4) forma esetén az elemek szorzásánál előbb a (4) által definiált CA-ban végezzük el a szorzást – (5), (6) és (7) felhasználásával – majd a (4) formában eredményül kapott szorzatot alakítjuk vissza (3) alakká.

A két elvégzett szorzás ugyanazt az eredményt adja.

Így **kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hozhatunk létre a háromdimenziós tér által generált GA és egy komplex számtest feletti CA között, amelynek általános vektorát (4) írja** le, és amelyben a szorzási műveletére az (5), (6), (7) és $e_i^2=1$(i=1,2,3), valamint $I^2=-1$ igaz.

Amint jeleztem korábban, **a (4) az $I^2=-1$ imaginárius egységgel egy komplex számtest feletti négyesvektort mutat**, amelyre az $e_i^2=1$(i=1,2,3) és az (5), (6), (7) egyenletek teljesülnek. Vegyük észre, hogy **az (5), (6), (7) összefüggések pontosan a Pauli spin-mátrixok algebrájának a geometriai megfelelői**.[5] Tehát, ha **egy komplex számtest feletti CA-val modellezek – másképp**

---

[4] Lásd az 1. lábjegyzetbeli cikket.

[5] Lásd ehhez például **Stephen Gull, Anthony Lasenby, Chris Doran**, „Imaginary Numbers are not Real — the Geometric Algebra of Spacetime” cikkben a 2.6 pontot: http://geometry.mrao.cam.ac.uk/wp-content/uploads/2015/02/ImagNumbersArentReal.pdf

egy komplex számtest feletti négyesvektorral számolok – a GA helyett, akkor épp a Pauli spin-mátrixok algebrájával egyenértékű definíciókat kell megfogalmaznom a bázisvektorok szorzására ahhoz, hogy az algebra zárt legyen a szorzás műveletére.

4. Végkövetkeztetés

A fenti megállapítások is elég fontosak, de az általános multivektorok (3) és (4) alakjának összehasonlításában egy igazán fantasztikus és izgalmas összefüggést fedezhetünk fel. Megjegyzem, hogy a fenti levezetésben a GA (3) összefüggéséből indultam ki, de az elmúlt közel száz évben a fizika a (4)-sel leírt CA-nak –, vagy négyesvektornak – a mátrix megfelelőjét használta a kvantummechanikában és a relativisztikus téridőt tartalmazó leírásoknál.[6] A mátrixok helyett a (4) alakot használva válik érthetővé, hogy miért nem a legjobb leírás a mátrix-matematika; a (4)-sel leírt algebra ugyanis igen árulkodó, megsúgja nekünk az eddigi téves értelmezések lényegét. Már sokszor írtam arról, hogy a kételemű számok *mindegyike* egyfajta téridő-topológiát modellez, tehát nemcsak a hiperbolikus számok – amelyek szorzása a Lorentz-transzformációt adja – hanem például a komplex számok is a tér és az idő egyfajta kapcsolatát mutatják a számvektor képzetes és valós részének viszonyában. Tehát a CA-k esetén az eddig skalárnak tekintett komplex szám *téridő-elem*. Ennek fényében a (4) alak megmutatja azt a „legmélyebb téveszmét”[7], ami az eddigi fizikát jellemezte. A komplex szám, mint téridő-elem a (4) alakban kettős zavart okoz:

- egyrészt az egydimenziós térkomponenst is magában rejtő komplex szám „keveredik” a háromdimenziós vektortér elemeivel,
- másrészt az időelemet is tartalmazó komplex szám, mint skalár elfedi a benne rejlő „idő-tartalmat”.

Szerintem nagyon jó megérzésről árulkodik, hogy a GA skalár-elemét, és ezzel a vektortér „alatti” algebrai struktúrát leszűkítették a valós számok halmazára – azaz a kételemű számok idő-elemére –, **mert ezzel megszabadították az algebrát az előbb leírt keveredéstől, a komplex szám tér-elemének és egy euklideszi vektortér elemeinek összevisszaságától, és a skalár, mint *időelem* is „megtisztult” és „felfedte önmagát”**. A GA multivektorainak (3) alakja „tiszta” időelemből és idővel „nyújtott” térelemekből áll. Mindezekből az a – bekezdés elején ígért – izgalmas gondolat adódik, hogy a (4) alak (3) alakká konvertálása nem más, mint az összekuszált téridő-elemek szétválasztása egyetlen idő-elemre és több térelemre. Így a GA valóban annak a többdimenziós számalaknak az *előképe*, amit a *„Hogyan tovább egy új számrendszerhez? − Desiderata”* című cikkemben vázoltam.

---

[6] Erről részletes leírást találunk például az 5. lábjegyzetben megjelölt cikk 5. pontjában.

[7] Itt az idézőjel valóban idézetet jelöl, mert az 5. lábjegyzetben szereplő cikk szerzői is így fejezték ki magukat a 2.6 pontban: *„These considerations all indicate that our present thinking about quantum mechanics is infested with the deepest misconceptions. We believe, with **David Hestenes**, that geometric algebra is an essential ingredient in unravelling these misconceptions.”* Megjegyzem, hogy a szerzők és **Hestenes** nem az általam megfogalmazott téridő-elemek összekuszáltságára utaltak a „téveszme” gondolattal, hanem a mátrix-matematikában “láthatatlan” geometriai összefüggésekkel érveltek, azaz ebben a konkrét esetben a Pauli-mátrix koordinátákkal kifejezett összefüggését állították szembe a GA-ban ennek megfelelő bázisvektor-szorzatok geometriailag korrektebb formáját.