A Clifford algebra, a geometriai algebra és a kételemű számok

A geometriai algebra (GA) egy vektortér **Clifford** algebrája (CA) a valós számtest fölött. Többen azonos értelemben használják a két fogalmat, nem törődve azzal a különbséggel, hogy a CA-val szemben a GA a valós számokra szűkített, és sokkal inkább fókuszál a geometriai és fizikai felhasználásokra. Tréfásan úgy tekinthető a GA, mint a CA *alkalmazott* matematikája.

A komplex számokhoz hasonló fogalom származtatható a GA-ból, és feltételezhetően ez az egyik oka, hogy elegendőnek tartják a valós számokra szűkíteni a CA-t.

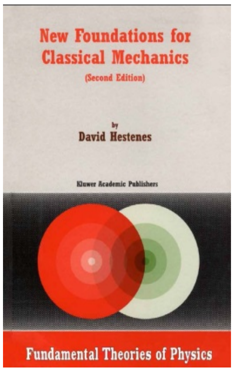
Nagyon tanulságos összevetni, amint a különböző szerzők a kételemű számok egyikét-másikát „levezetik" a valós CA-ból vagy a GA-ból. Ettől az áttekintéstől titokban azt is remélem, hogy segít majd az új *szám*rendszer kialakításában, amelyet többek között a *„Hogyan tovább egy új számrendszerhez?"*[1] című írásomban körvonalaztam.

1. David Hestenes

David Hestenes a legismertebb fejlesztője a GA-nak, könyvei már-már klasszikusnak számítanak a témában:

- *Space-Time Algebra (1966),*
- *Clifford Algebra to Geometric Calculus − A Unified Language for Mathematics and Physics*[2] *(1984),*
- *New Foundations for Classical Mechanics(1999).*

David Hestenes úttörője volt a koordináta nélküli GA kialakításának, aminek elsősorban matematikai hasznát látom, és kevésbé a fizikai hasznosságát. Egyrészt azért, mert ez a törekvés nem sikerült teljes mértékben[3], másrészt a fizikusok körében nem túl elterjedt a CA és a GA eszköztára, így a hangsúlyosan algebrai megalapozás kevésbé vonzó, mint a mátrix-reprezentációkkal való kapcsolatokat feltáró és koordinátákat használó leírás. A továbbiakban a fent felsorolt könyvek közül a harmadikban foglaltakat veszem alapul, mert ennek tárgyalásmódja valahol középen helyezkedik el a matematikai és a fizikai hasznosságot illetően.



A *síkgeometriai* GA-ból – azaz a kétdimenziós térből generált GA-ból, **Hestenes** jelölésével G_2 – származtatott egység-bivektor négyzete −1-gyel való egyenlőségének bemutatásánál **Hestenes** is ortogonális egység-báziselemekből indul ki:

$$(\boldsymbol{\sigma_1} \wedge \boldsymbol{\sigma_2})^2 = -1 \qquad (1)$$

A komplexszerű számfogalomhoz a vektorok báziselemekkel felírt „koordinátás" alakjával jut el, és a komplexhez hasonló számalakot egy báziselem és egy tetszőleges vektor *geometriai*

[1] Lásd http://www.infinitemath.hu/matematika/326-hogyan-tovabb-egy-uj-szamrendszerhez
[2] Ennek a könyvnek **Garret Sobczyk** a társszerzője.
[3] Legjobb példa erre az, amint **Hestenes** *Space-Time Algebra* című könyvében a CA használatának bemutatásában folyamatosan hivatkozik a mátrix reprezentációs párhuzamokra.

*szorzat*aként írja le, melyet *spinor*nak nevez, ezzel is kiemelve speciális tulajdonságát. Eszerint a **Hestenes** által használt interpretációban z spinor a következő:

$$z = \boldsymbol{\sigma_1 x} = \boldsymbol{\sigma_1}(x_1\boldsymbol{\sigma_1} + x_2\boldsymbol{\sigma_2}) = x_1 + x_2\boldsymbol{i} \tag{2}$$

A fenti egyenletben szereplő **i** *operátor* geometriailag, és algebrailag is eltér a komplex i számtól, hiszen egy bivektor jellemzőivel bír, így például a geometriai szorzatban nem kommutatív.

A térgeometriai GA-ban – azaz a háromdimenziós térből generált GA-ban; **Hestenes** jelölésével G_3-ban – számomra zavaró, hogy a trivektorból eredeztetett komplexszerű képzetes egységet is i-vel jelöli, és csak azzal különbözteti meg a bivektor vastagított betűvel jelölt társától, hogy emezt nem „kövéríti" a jelölésben. Erről az i-ről érdemes megjegyezni, hogy kommutatív, így egyfajta skalárként kezelhető, pszeudoskalár a G_3-ban. Érdekes **Hestenes** tárgyalásában, amint levezeti, hogy minden bivektor felírható az i – azaz egy jobbos (dextral) pszeudoskalár, amely egy trivektor a G_3-ban – és egy vektor szorzataként. Így a bivektort egy vektor *duál*jának tekinti **Hestenes**, ugyanakkor minden trivektor skalárszorosa az i-nek, így a skalár-elem *duál*ja. Ennek következtében G_3-ban minden multivektor felírható; skalár és egy skalár duálisa, valamint vektor és egy vektor duálisának összegeként:

$$A = \alpha + i\beta + \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b} \tag{3}$$

Ahol α és β valós számok, i a fent leírt egység-trivektor, **a** és **b** pedig vektorok a háromdimenziós térből, melyből a G_3 generálva lett.

A fentiek, és a továbbiakban nem részletezettek miatt a GA-ban sokféle i-szerű, azaz a komplex képzetes egységgel rokon elem található, vagy ahogy **Hestenes** megfogalmazta; sok megoldása van a $\sqrt{-1} = x$ egyenletnek. Itt feltétlenül meg kell jegyezni – bár ezt **Hestenes** nem teszi meg, – hogy a $\sqrt{+1} = x$ egyenletnek is sok megoldása van, így a hiperbolikus képzetes egységnek is megvan a megfelelője a GA-ban, például a négydimenziós térből generált GA pszeudoskalárja rendelkezik ilyen tulajdonsággal.[4]

Megjegyzések

A kételemű számoknál a képzetes elemet *tér*elemként azonosítottam, de a GA-ban az ezekhez hasonló – négyzetükben ±1-et adó – egységelemek nem azok a klasszikus térelemek, amelyekből a GA generálva lett, hanem az ezekből az egység bázisvektorokból képzett r-vektorok. A GA-ban a báziselemek négyzetét +1-nek tekintik a klasszikus skalárszorzat alapján. (A GA-t generáló báziselem négyzetének −1-gyel, illetve 0-val való egyenlővé tételére a 4. pontban, **Stefan Ulrych** modelljében látható példa, ahol ez szintén egyfajta skalárszorzatból adódik.)

Nem szabad elfelejteni, hogy a kételemű számoknál a különböző skalárszorzatok a modellezett *téridőt* jellemzik. Igaz ugyanakkor, hogy **Stefan Ulrych** modelljéhez hasonlóan a *tér* bázisvektorának négyzetére adódik 0, +1 illetve −1. Fontos hasonlóság a **Stefan Ulrych** modell és a kételemű számok, mint téridő-modellek között az is, hogy mindkettőben a skalárszorzatból képzett kvadratikus forma, azaz a vektorok „hosszának" a négyzete egyfajta konjugált-képzéssel definiált. A különbség az, hogy a kételemű számoknál ez a „hossz" egy téridőt modellező vektor hossza, míg a **Stefan Ulrych** modellben a kvadratikus forma a GA képzésére használt egydimenziós tér bázisvektorára definiált.

Nagyon érdekes számomra az, amit **Hestenes** a szögek mérésével kapcsolatban javasol. A (2) egyenlettel kapcsolatban említett spinorok síkja, azaz a bivektorral definiált képzetes egység

[4] Ha G_n-ben a pszeudoskalárt I-vel jelölöm, akkor erre $I^2=\pm1$, és az előjele a szignatúrától és a tér méretétől függ.

síkján két vektor geometriai szorzata az alábbiak szerint írható fel:

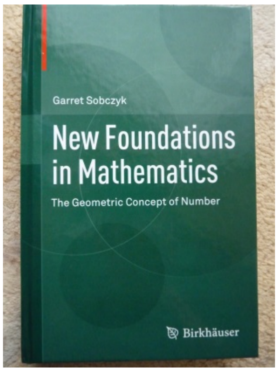
$$\boldsymbol{ab} = e^{i\Theta} \tag{4}$$

Ahol θ az **a** és **b** vektorok által bezárt szög, **i** pedig az egység-bivektor az **a** és **b** vektorok síkján. **Hestenes** helyesebbnek tartja, ha θ helyett a bivektorral való szorzatával, azaz **i**θ-val jellemezzük a szöget, így egy körív radiánban mért hossza helyett inkább a körív területéhez kötjük a fogalmat. Probléma, hogy a körív radiánban mért hossza kétszerese a körívhez tartozó területnek. A radiánban való mérés elterjedtsége miatt **Hestenes** annak megtartását javasolja, de a szögnek a területi értelmezése mellett. Ez így egy kicsit zavaros, de számomra szimpatikus **Hestenes** törekvése az argumentum képzetes értelmezésére. A kételemű számokkal kapcsolatban már gondolkodtam azon – és több helyütt említettem is a cikkeimben[5] – hogy a kételemű számok normája mellett az argumentumot is képzetesnek kellene értelmezni. Erre az egyik legfőbb ok az, hogy a hiperbolikus számok normái és argumentumai így egységesen kezelhetőek lennének, hiszen itt két síknegyedben jelenleg is csak képzetesként értelmezhető a norma és az argumentum. Másik érdekesség, ami a kételeműek egységvektorainak exponenciális alakjából triviálisan adódik:

- komplexek számoknál: $e^{\mathbf{i}\varphi}$ = ch **i**φ + sh **i**φ = cos φ + i sin φ
- parabolikus számoknál: $e^{\mathbf{j}(y/x)}$ = ch **j**(y/x) + sh **j**(y/x) = cp (y/x) + **j** sp (y/x) = ±1+ **j**(y/x)
- hiperbolikus számoknál: $e^{\mathbf{k}\tau}$ = ch **k**τ + sh **k**τ = ch τ + **k** sh τ

Mindezek egyelőre formai érdekességek, korrekt értelmezésük még várat magára.

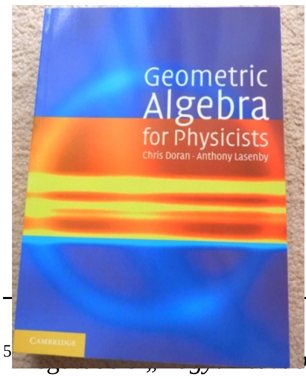
2. Garret Sobczyk



New Foundations in Mathematics – The Geometric Concept of Number (2009) című könyvében **Garret Sobczyk Hestenes**hez hasonlóan törekszik a GA koordináta nélküli tárgyalására. A kételemű számok közül ő sem tárgyalja a parabolikus (duális) számok szerepét, és a másik kettőt, a hiperbolikus és a komplex számokat sem eredezteti a GA-ból, hanem a GA tárgyalása előtt mutatja be őket, velük szemléltetve a belső és a külső szorzat speciális esetét, és ezzel mintegy megalapozva általánosításukat, azaz a GA tárgyalását. Majd bemutatja, hogy mind a bivektor, mind a trivektor négyzete −1-et eredményez, és azt, hogy az utóbbi kommutatív a szorzásra a 3 dimenziós térből generált GA-ban. **Sobczyk** itt nem tesz kísérletet a GA-beli komplex képzetes egységgel egy komplexszerű számsík felépítésére.

3. Doran-Lasenby

A geometriai algebra élenjáró kutatói **Chris Doran** és **Anthony Lasenby**, közösen jelentettek meg egy könyvet – *Geometriai Algebra for Physicist* (2002) címmel –, amely kifejezetten a fizikai felhasználás szempontjából mutatja be ezt a matematikai nyelvet. A korábban bemutatott könyvekhez hasonlóan a GA axiomatikus bevezetése előtt a szerzők a GA történeti hátterével és speciális esetein keresztül mutatják be az új eszközrendszert.



A komplex i-től megkülönböztetve I-vel jelölik – szerintem helyes

---

[5] ... *b egy új számrendszerhez?*” című cikk 5. pontjában; http://www.infinitemath.hu/matematika/326-hogyan-tovabb-egy-uj-szamrendszerhez

az eltérő jelölés, hiszen nem mindig kommutatív a szorzásra – a pszeudoskalárt, melynek négyzete −1 a G_2-ben és a G_3-ban. **Hestenes**hez hasonlóan – lásd (2) képletet – egy báziselem és egy tetszőleges vektor *geometriai szorzat*aként jutnak a komplexhez hasonló kételemű számhoz (a könyvbeli jelölések használatával):

$$Z = \boldsymbol{e_1 x} = \boldsymbol{e_1}(u\boldsymbol{e_1} + v\boldsymbol{e_2}) = u + vI \quad (5)$$

E számkörben – ahogy én is a kételeműek esetén[6] – a szerzők egy konjugált definíció segítségével az (5) egyenlettel kialakított számkörben definiálnak egy szorzatot, mely a GA-beli geometriai szorzat képe. Érdemes ezt a levezetést itt is idézni. Legyen Z és W e számkör két száma, azaz Z-re a (5) igaz, W-re pedig

$$W = \boldsymbol{e_1 y} = \boldsymbol{e_1}(t\boldsymbol{e_1} + w\boldsymbol{e_2}) = t + wI \quad (6)$$

A konjugált definíciója megegyezik a komplex számok konjugált fogalmával, azaz

$$W^{\dagger} = t - wI = t - w\,\boldsymbol{e_1 e_2} = \quad t + w\,\boldsymbol{e_2 e_1} = \boldsymbol{y e_1} \quad (7)$$

Látható a (6) és (7) összefüggésből, hogy a konjugálás a vektor-sorrend megcserélésének felel meg a geometriai szorzatban.

Az (5) és (7) alapján a geometriai szorzatot a következőképpen kapjuk:

$$W^{\dagger}Z = \boldsymbol{y e_1 e_1 x} = \boldsymbol{yx} \quad (8)$$

Mivel csak a legalapvetőbb összefüggésekkel kívánok itt foglalkozni, ezért egyetlen összefüggést jegyzek még fel a szerzőktől, akik **Hestenes**hez hasonlóan, bár formailag egy kicsit a (3) egyenlettől eltérően fogalmazták meg a háromdimenziós térből generált multivektorok felírhatóságát a következő formában:

$$M = \alpha + a + B + \beta I \quad (9)$$

ahol ’a’ egy vektor, B bivektor, α és β skalárok, I pedig az egység trivektor. Természetesen ebből megkaphatjuk a (3) összefüggést, ha a B bivektort helyettesítjük a B=bI összefüggéssel, ahol b vektor.

A G_3-beli multivektorok (3)-ban és (9)-ben megfogalmazott alakjából több érdekesség következik.

- **Hestenes** ezek közül arra tér ki, hogy a (3) négyféle összetevőjéből $\alpha + i\boldsymbol{b}$ részalgebrája a G_3-nak (spinor algebra), a másik két összetevő viszont nem.
- A **Doran-Lasenby** szerzőpáros konjugált-fogalmat[7] vezet be a (9)-ben leírt algebrában:

  $$M^{\dagger} = \alpha + a - B - \beta I \quad (10)$$

  Ennek érdekessége, hogy ugyanaz a hatása, mint egy hermitikus konjugálásnak a Pauli mátrixokra.
- Számomra is tartogat érdekességet a G_3-beli általános alak a multivektorokra. Az elemeknek ugyanazt a csoportosítását használva, mint **Doran-Lasenby**, de **Hestenes**hez hasonlóan a B=bI összefüggést alkalmazva, a (9) egyenletet a következőképpen alakítom át:

  $$M = \alpha + a + bI + \beta I = \alpha + a + (\beta + b)I \quad (11)$$

---

[6] Lásd *A szimplektikus teve „természetes előfordulásai”* című cikket; http://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/169-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai

[7] Pontosabban a *reverzálás* fogalmát vezetik be, mivel a G_3-ban a páratlan számú elemcsere a szorzatban negatív előjelet eredményez, ami a (10) egyenletben is használható a (7) egyenletbeliekhez hasonlóan.

Ahol ’a’ és ’b’ egy-egy vektor, α és β valós számok, I pedig az egység trivektor, azaz egy képzetes egység. A (11) érdekessége az, hogyha a kételeműekhez hasonlóan a valós elemet itt is egyfajta *idő*nek feleltetjük meg, akkor $\alpha + a$ és $\beta + b$ mindketten egy *idő*- és egy *tér*elem összege, azaz valamiféle „téridő” elem. Ez természetesen még nem matematika és nem fizika, és lehet, hogy nem is lesz az, de mindenesetre érdekes.

4. Stefan Ulrych

„A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen” [8] című cikk 2.1 pontjában írtam arról, hogy miképp mutatta be **Stefan Ulrych** 2007-ben írt cikkében[9], hogy a hiperbolikus és a komplex számsíkot egy **Clifford** algebrából is lehet generálni. A módszerével levezettem, hogy így a parabolikus számsíkhoz is eljuthatunk.

Ismétlésként összefoglalom **Ulrych** megoldását, amelyben a CA-t egy kvadratikus formával felszerelt vektortér generálja. **Ulrych** egy skalárszorzattal ellátott valós lineáris teret feltételez véges dimenzióval; jelölésben: $\mathbf{R}^{p,q}$, ahol a skalárszorzat – a szerző jelöléseit megtartva – a következő:

$$(x, y) = -\sum_{1\le i\le p} x_i y_i + \sum_{1\le j\le q} x_{p+j} y_{p+j} \tag{12}$$

A CA-ban a kvadratikus formát a fenti skalárszorzatból képezve:

$$(x, x) = x\bar{x} \tag{13}$$

A fenti (13) egyenlet jobb oldala a vektorok geometriai szorzatát, $\bar{x}$ az x konjugáltját[10] jelöli, ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy a tér egy ortonormált bázisával leírva a vektort, a konjugáltjában a koordináták előjelet váltanak. Így minden e_i báziselemre, ahol $1\le i\le n$ és $n=p+q$:

$$e_i\bar{e_i} = -e_i^2 \tag{14}$$

(Megjegyzendő, hogy a szerző itt nem alkalmazta az **Einstein**-féle összegkonvenciót. A báziselemek pedig kölcsönösen antikommutatív elemei a CA-nak, azaz $e_i e_j + e_j e_i = 0 \; ha \; i \ne j$).

A kvadratikus $\mathbf{R}^{p,q}$ tér által generált algebra jelölése: $\mathbf{R}_{p,q}$. Az $\mathbf{R}_{0,1}$ és $\mathbf{R}_{1,0}$ algebrák az egydimenziós $\mathbf{R}^{0,1}$ és $\mathbf{R}^{1,0}$ kvadratikus terek által generáltak. **Ulrych** anyagát kiegészítve egydimenziós $\mathbf{R}^{0,0}$ térről is beszélek, melyben a skalárszorzat azonosan nulla minden vektor-párra, és az ebből generált algebra jelölése $\mathbf{R}_{0,0}$.[11]

Egy eleme ezeknek az egydimenziós tereknek z=x**e**, ahol **e** az egyetlen báziselem, x pedig tetszőleges valós szám. A kvadratikus forma ennek alapján:

$$z\bar{z} = -x^2\boldsymbol{e}^2 \tag{15}$$

Az (1,0) szignatúrájú kvadratikus tér esetén $\mathbf{e}^2=1$, (0,1) szignatúránál pedig a báziselem négyzetére $\mathbf{e}^2=-1$, az általam kiegészített (0,0) szignatúránál pedig $\mathbf{e}^2=0$. Mindhárom esetben a CA-nak két algebrailag különálló eleme van; az előbbi tulajdonságokkal

---

[8] Lásd http://www.infinitemath.hu/matematika/199-a-geometriai-algebraban-rejtozkodo-vegtelen

[9] Lásd *"Representations of Clifford algebras with hyperbolic numbers"* http://arxiv.org/pdf/0707.3981v2.pdf

[10] Mely egyben (anti-)involúció is.

[11] Megjegyzendő, hogy az $\mathbf{R}_{0,0}$ algebra nem univerzális, dimenziója nem 2^n-ből számítható, ahol n=p+q, ami $\mathbf{R}_{0,0}$ esetén n=0 miatt 1 dimenziót jelentene, az $\mathbf{R}_{0,0}$ algebra dimenziója viszont 2, mely a 2^{n+1} alapján számítható. A parabolikus számok halmaza ebből a szempontból is rokon a valós számokkal, melyek szintén nem számítanak univerzális algebrának, hiszen az $R^{1,0}$ kvadratikus térből származó algebrájuk 1 dimenziója sem 2^n-ből, hanem 2^{n-1}-ből számítható.

rendelkező báziselem, és a valós egységelem. Így ezeket az algebrákat a kételemű hiperbolikus, komplex és parabolikus (duális) számok reprezentálják.

A modell hátránya:

Egyetlen hátránya volt **Ulrych** modelljének – amit én korrigáltam –, hogy nem tartalmazta a parabolikus (duális) számokat a komplex és a hiperbolikus kételemű számok mellett. Igaz, algebrailag ezek elég „furcsa" számok, hiszen a (12)-ben megadott skalárszorzat-definícióra a skalárszorzatuk azonosan nulla mindenütt, továbbá nem univerzális CA-t adnak. Ezek indokolhatják, hogy **Ulrych** kihagyta őket a modellből, ám következményeiben már súlyossá válik a hiányuk. Itt arra gondolok, hogy ez lehet az oka annak, hogy **Ulrych**, a szerző nem viszi tovább a gondolatsort a homogénkoordináták és a téridő-topológiák felé. Ezek az elképzelések ugyanis sokkal markánsabban körvonalazódnak az egydimenziós kvadratikus térből származó *mindhárom* CA, illetve reprezentációjuk, a *három* kételemű számsík láttán.

A (korrigált) modell előnyei:

- A kiindulásul szolgáló skalárszorzat három legegyszerűbb esetéből mindhárom kételemű számsík modellezhető.
- A skalár-elem és az egyetlen térelem összegéből álló CA nemcsak a kételemű számokkal, de a valós számegyenes „végtelennel kiegészített" homogénkoordinátás alakjával is kölcsönös egyértelmű megfeleltetésbe hozható. (Korábban már írtam egy cikket „*A kételemű számok, mint homogén koordinátával leírt számegyenesek*" címmel.[12]) Így ebben a modellben is benne rejlik a kételemű számok képzetes elemének „végtelen-értelmezése".
- A kételemű számok, mint téridő-topológiák is kiolvashatóak a fenti modellből a CA térelemének és a valós skalároknak a kételemű számokra való leképezéséből.

5. Összegzés

A fenti példák közül a legutóbbi, **Ulrych** modellje áll legközelebb azokhoz az értelmezésekhez, melyeket a kételeműek köré fűztem, és matematikailag is korrekt a levezetése. Mindezen előnyök mellett azonban nem látom, hogy utat mutatna a többelemű számok felé, mivel épp úgy a térbeli elemből származtatja a számokat, ahogy a **Clifford** algebra általában. Az én modellalkotásom azonban a valós számokból – és azok *idő*-megfeleltetéséből – indul ki és definiálja a képzeteseket, mint egyfajta végtelen-elemeket, melyek a *teret* modellezik. A GA ma már klasszikusnak tekinthető értelmezéseiben, **Hestenes** és a többiek műveiben a multivektorok fogalmát tetszőleges számú térelemre terjesztik ki, bár a gyakorlati szempontok miatt a háromdimenziós vektorterekre koncentrálnak. Sajnos a képzetesnek nevezett elemeik értelmezése nem egységes, és a komplex számokkal való megfeleltetésük inkább csak formai érdekesség. Ráadásul a hiperbolikus számokkal csak a GA-n kívül, a parabolikus számokkal pedig egyáltalán nem foglalkoznak.

Mindezek ellenére ezek a fent körvonalazott elgondolások adtak néhány ötletet, amit még végig kell gondolnom. Erről majd legközelebb.

---

[12] Lásd: http://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/176-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-mint-homog%C3%A9n-koordin%C3%A1t%C3%A1val-le%C3%ADrt-sz%C3%A1megyenesek