A dimenziókról

A téridő 3+1 dimenziója és a kételemű számok

A hiperbolikus számsík, mint téridő modell nagyon szemléletes, ha a térnek csak az egyik dimenzióját használjuk. Az embernek azonban hiányérzete támad, hiszen a teret mi háromdimenziósnak érzékeljük. Felmerül tehát az igény olyan – esetlegesen többelemű – számokra, amelyek korrektül modellezik a négydimenziós téridőt. Egyelőre elég távolinak látom a számfogalmunk olyan általánosítását[1], melynek részei – feltehetően alapelemei – a kételemű számok. E számfogalom kialakítása céljából most a dimenziókkal kapcsolatos fogalmainkat szeretném végig gondolni.

1. Mi a dimenzió?

A szó eredeti jelentése alapján valamiféle méretet, kiterjedést értünk alatta. Van valamilyen ősi és elemi tapasztalatunk a tér háromirányú kiterjedéséről: előre-hátra, balra-jobbra és föl-le, ahogy a hétköznapi életben megkülönböztetjük a térbeli mozgás lehetőségeit. E lehetőségek közvetlen – tapintás[2] útján szerzett – információin túl a mozgás környezeti feltételeit fény által közvetített módon, azaz látással is érzékeljük. A látásunkban már sokkal bonyolultabb információfeldolgozás eredményeként jelenik meg a környezet modellje. Az evolúció során az élelemszerzés és a menekülés eredményességét alapvetően meghatározta a környező térből érkező információk minél pontosabb feldolgozása és értelmezése. A csoportban élés még tovább segítette az életben maradást, és ennek feltételeként az információk kommunikálása létfontosságúvá vált. Az információközlés szükségessé tette a környezet eseményeit leíró *közösségi* jelrendszer kialakulását, ezzel együtt az érzékeltek térbeliségének leírását, a tér mindenki által hasonlóan értelmezhető fogalomrendszerének létrejöttét.

2. Irány és távolság

A dimenzió fogalmának kialakulásához az irány és a távolság fogalma nélkülözhetetlen.

A kisebb távolságok meghatározásai kezdetben a test méreteihez kötődtek – hüvelyk, láb, stb. –, a nagyobb távolságok pedig eredetileg is a mozgáshoz – és ezzel egyidejűleg – az időhöz kapcsolódtak, ezt bizonyítják például a következő nyelvi kifejezések: „pár lépésnyire”, „kétnapi járásra”.

Az események irányának kommunikálásából alakult ki végül a dimenzió fogalma, mert a környezetből érkező jelek irányának közlését leegyszerűsítette, ha egy viszonyítási ponthoz képest három értéket – távolságot – adtak meg. Ebből alakult ki később a matematikai koordináta fogalma is.

Igen sokféle dimenzió-fogalom létezik a matematikában. A legismertebb, és – feltehetően a legrégibb – dimenzió-fogalom az euklideszi térhez kötődik, mely a valós térbeli tapasztalatokból kristályosodott ki.

---

[1] Elképzelésem szerint ehhez az általánosításhoz a geometrián keresztül vezet az út, de ez alatt nem pontosan azt az elgondolást értem, amit ma a számok geometriai koncepciójának neveznek.

[2] Tapintás útján a saját testünket is három irányban kiterjedtnek érzékeljük.

Nem kívánom az összes matematikai dimenzió-fogalmat áttekinteni, csupán a gondolatmenetemhez fontosat említem meg.

3. Hausdorff, vagy más néven fraktál dimenzió

Ha az absztrakt matematikai definíció helyett „fizikai” közelségbe szeretnénk hozni a fraktál dimenziót, akkor első példaként az egész számmal kifejezhető dimenziójú alakzatokat tekintve, és három különböző dimenzióra a szakaszt, a négyzetet és a kockát említve, a következőképp jutok a dimenzió fogalmához:

1. A szakasz esetén legyen a nagyítás mértéke 2, azaz $n_2/n_1=2$. A szakasz mértékének, azaz *hosszának* változása $L_2/L_1=2$, így:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{n_2}{n_1} = 2$$

2. A négyzet esetén is legyen a nagyítás mértéke 2, azaz $n_2/n_1=2$. A négyzet mértékének, azaz *területének* változása $F_2/F_1=2^2=4$, így:

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = 4$$

3. A kocka esetén is legyen a nagyítás mértéke 2, azaz $n_2/n_1=2$. A kocka mértékének, azaz *térfogatának* változása $V_2/V_1=2^3=8$, így:

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^3 = 8$$

Jelöljük D-vel a dimenzió-számot. Mindhárom fenti esetben **egydimenziós változás – a nagyítás** – mértékét vetjük össze egy D dimenziójú sokaság mértékváltozásával; a **hossz-változás**sal D=1 esetén, a **területváltozás**sal D=2 esetén, vagy a **térfogatváltozás**sal D=3-nál. A fenti egyenletekben a D dimenziószám a kitevőben jelenik meg. Ha a D-dimenziójú mértéket általánosságban V-vel jelöljük, akkor az egyenletekből a D dimenzió a következőképpen adódik:

$$D = \frac{log\frac{V_2}{V_1}}{log\frac{n_2}{n_1}} \qquad (1)$$

Az említett esetekben a dimenziószám egész szám, de a fenti dimenziószámítás alapján törtszámhoz is juthatunk. Az alábbiakban több szó esik majd az önhasonló alakzatokról. Az önhasonlóság azt jelenti, hogy az alakzat valamely kisebb (nagyobb) részének mintázata végtelenül ismétlődik a nagyobb (kisebb) részében. Az alakzat ismétlődő részének *d* dimenziószámánál nagyobb a teljes alakzat D dimenziószáma, de a mintázat ismétlődése nem elegendő ahhoz, hogy a teljes alakzat dimenziószáma eggyel nagyobb legyen, mint az elemi minta dimenziószáma.

A nem egész számú dimenzióval rendelkező alakzatra az egyik legismertebb példa a **Koch-görbe**[3]. Ehhez úgy jutunk, hogy első lépésként az egység hosszúságú szakasznak a középső egyharmadára egy egyenlőszárú háromszöget rajzolunk, majd ennek alapját elhagyjuk. Második lépésként az így keletkezett cakkos vonal minden egyenes szakaszával megismételjük az első lépést. Végtelen lépés után a görbe hossza végtelen lesz, hiszen minden lépés után a kapott görbe hossza az előző állapot hosszának 4/3-szorosa, és a kiindulási érték egy. Ugyanakkor véges térrészen marad a görbe, azaz véges területen végtelen hosszúságú. A

[3] Lásd például a Wikipédiában: http://hu.wikipedia.org/wiki/Koch-g%C3%B6rbe

dimenziószámának számításakor az önhasonlóság tulajdonságát használjuk ki. Azt mondjuk, hogyha egy H halmaz M darab hasonló részből áll, és ezek k-szoros kicsinyítései H-nak, akkor a kicsinyített elemet egységnek tekintve $V_2/V_1=M$ és $n_2/n_1=k$, így a **Hausdorff dimenziója** az alakzatnak a következő:

$$D = \frac{logM}{logk} \qquad (2)$$

A **Koch-görbe** esetén M=4 és k=3, így

$$D = \frac{log4}{log3} \approx 1{,}26$$

A természetben bármerre nézünk, találunk példát a fraktálokra, ilyen a felhők fodrozódása, a partvonalak csipkézettsége, a hópelyhek alakja.

4. Folytonos geometria tört dimenziókkal

Neumann nevéhez fűződik annak a folytonos geometriának a felfedezése, amelyben a dimenziók 0 és 1 között bármely tört értéket felvehetnek. Neumann azt az ötletet terjeszti ki a dimenziókra, melyet Haar használt – egy transzformációra invariáns – általános mértékfogalom bevezetésekor. A dimenzió tekintetében a lineáris izometria az invariáns transzformáció.

5. Tört dimenziók – egy kicsit másképp

A 3. pontban szereplő módszert fogom használni az egynél kisebb dimenzió bemutatására, meg sem közelítve Neumann törtdimenziók bevezetésének absztrakciós szintjét.

A 3. pont példájában a nagyítás mértékváltozása egydimenziós mértékváltozást jelent, és ehhez hasonlítottuk a vele járó többdimenziós alakzatok általános értelemben vett térfogatváltozását. Tegyük fel azonban, hogy az n-dimenziót választjuk *egységdimenziónak,* és az n-dimenziós térfogatváltozáshoz viszonyítom az alakzat egydimenziós mértékének – mondjuk az átmérőjének, vagy szabályos kocka estén az egyik élhosszának – a változását. Ekkor, ha az *n* dimenziós kocka térfogata V_2/V_1 arányban változott, akkor a kocka *l* élének változása ennek *n*-edik gyöke, azaz:

$$\frac{l_2}{l_1} = \sqrt[n]{\frac{V_2}{V_1}}$$

Ebből

$$\frac{1}{n} = \frac{log\frac{l_2}{l_1}}{log\frac{V_2}{V_1}} \qquad (3)$$

Így az n-dimenziós kocka dimenzióját *egység dimenziónak* tekintve, és tudva, hogy a kocka éleiből n darabnak az egymásba nem nyúló alterei kifeszítik a kocka terét, ekkor bizony mondhatom, hogy az élek 1/n dimenziósak. E gondolatmenetnek megfelelően a fenti (3) egyenletben szereplő **1/n is dimenziót** jelent.

Háromdimenziós terünk esetén is mondhatjuk, hogy etalonnak, egységdimenziónak választjuk egy tetszőleges test dimenziószámát. Ekkor például egy kocka egydimenziós, az élei pedig 1/3 dimenziósak. A bennünket körülvevő testek, részecske-jellegű objektumok mind 3 dimenziósak, tehát teljesen kézenfekvő a dimenzió egységéül e testek dimenziószámát venni.

Mit jelent ekkor a térbeli tájékozódásunkat segítő 3 irány? Talán a tapasztalat mindenkit becsapva segít a 3 dimenziós látvánnyal egy bonyolult rendezettségű, de valójában 3-nál kevesebb dimenziószámú sokaságban tájékozódni? Hasonlóan a hologramhoz, melynél kétdimenziós képet érzékelek háromdimenziósnak? Olyasforma lehet ez, amint a lényegében egydimenziós fénysugár bonyolultságának, elektromágneses jellegének érzékelésére szükséges a három dimenzió. Az Univerzumunk négydimenziós jellegét is az egyetlen dimenzióban zajló események fázisterének gondolhatjuk.[4] Többször megfogalmaztam már, hogy tér- és időfogalmaink az események rendezési elvét jelentik, tehát szigorúan véve puszta információk. Mondhatom azt, hogy a legtipikusabb példái a tiszta információnak. Természetesen az is lehetséges, hogy a dimenzió fent idézett matematikai megközelítése nem adekvát a valósággal, és így helytelen következtetésekre jutunk általuk.

6. A mérték és az általános dimenziófogalom összefüggései, és kontinuitásuk kérdése

A 2. pontban már említettem, hogy a dimenzió fogalmának kialakulásához nélkülözhetetlen a mérték fogalma, bár az említett szakaszban csak egy konkrét mértékre hivatkoztam; a távolságra. A kapcsolat sokkal szorosabb, mint amire ott céloztam, mind a mérték, mind a dimenziószám az **alakzatok kiterjedéseit jellemzi**: az előbbi az elfoglalt térrész méretére vonatkozik, az utóbbi – pontatlanul fogalmazva – az alakzat kiterjedési irányainak a száma, nevezzük **„irányszámnak”**.

Vegyük észre, hogy a dimenziószámot származtató (1) és (3) egyenletekben a D dimenziószám *mértékek* összehasonlításának eredménye: két érték logaritmusának a hányadosát jelenti: az osztó az egységül választott dimenzióban az alakzat méretváltozásának a logaritmusa, az osztandó pedig a D dimenziószámmal rendelkező alakzat kérdéses dimenzióbeli mértékváltozásának logaritmusa.

Mind a mértékszámítás mind a dimenziószámítás additív[5] művelet, és relatív számítást jelent – normálást végzünk – azaz egy egységül *választott* alakzat mértékét mérjük fel – szabatosabban a mértékre illetve a dimenziószámra invariáns transzformációval rámozgatjuk – a mérendő alakzatra.[6]

A **Haar**-féle általános mértékfogalom a mértéket *határértékként* definiálja, így *azzal a feltételezéssel él, hogy létezik tetszőlegesen kicsiny mértékkel rendelkező alakzat*. **Neumann** ugyanezt a módszert a dimenziókra alkalmazva jut el a folytonos geometriákhoz, tehát a dimenziókra is feltételezi, hogy létezik tetszőlegesen kicsiny dimenzióval rendelkező alakzat. A kicsinységet itt a valós számokon belül értjük, tehát a CH-nak egy, az intenzív végtelenre megfogalmazott fajtáját használjuk: nincsenek olyan infinitezimálisak, melyek 1/n-nél kisebbek minden n-re, de nagyobbak 0-nál. A dimenziószám relatív volta miatt az egységül választott dimenziószám bármilyen alakzat dimenziója lehet egy lineáris vektortérben, így választhatjuk a klasszikus értelemben vett egydimenziós szakasz dimenzióját is egységnek. Felmerül a kérdés, hogy ekkor melyek azok a ponthalmazok, melyek dimenziója egynél

[4] Érdemes lenne összevetni ezeket a gondolatokat Renate Loll véleményével az egyetlen dimenzióról.

[5] Az additivitás csak az egymásba nem nyúló alakzatokra igaz.

[6] Általában úgy gondoljuk, hogy az egységül választott alakzat dimenziószámának meg kell egyeznie a mért alakzatéval. Elvileg azonban nincs szükség erre a kikötésre, hiszen nagyobb dimenziószámnál egy végtelen darabolás határértékeként eljuthatok az egységül választott alakzattól egy nálánál kisebb dimenziójú mérőeszközhöz, kisebb dimenziószámnál pedig végtelen sokszor összeadva – integrálva – kaphatok egy, az egység dimenziójánál nagyobb dimenziójú mérőeszközt. Az embernek az a sejtése támad, hogy a dimenziószám valamilyen módon egy alakzat mértékének kiszámításakor alkalmazott határátmenetek számának függvénye. Így valóban jogos az (1) illetve (3) egyenletek sugallata, hogy a dimenzió a mértékből számítható.

kisebb? Jó példa erre a Cantor-halmaz[7], amely úgy hozható létre a valós számok halmazából, hogy a zárt [0,1] intervallumból elhagyjuk a közepét, a nyílt (1/3,2/3) intervallumot, majd ugyanezt tesszük a megmaradt két számintervallummal, és folytatjuk tovább a végtelenségig. Cantor-halmaz dimenzióját a (2) formula segítségével számíthatjuk. Az n-edik lépésben 2^n darab $1/3^n$ hosszúságú intervallum marad, így

$$D = \frac{log2^n}{log3^n} = \frac{log2}{log3} \approx 0{,}631$$

Ez a Cantor-halmaz nagyon érdekes tulajdonságokkal bír: miközben a klasszikus mértéke – Lebesgue-mértéke – 0, ugyanakkor kontinuum számosságú, számhalmazként pedig totálisan összefüggéstelen perfekt kompakt metrikus teret alkot.[8]

Sajnos a Haar-féle mérték és a Neumann által bevezetett dimenzió-fogalom nem alkalmazható a kételemű számokra. Pontosabban csak az egyik kételemű számsík esetében használható, mégpedig a komplex számokra, mivel ezek modellezik a CH-nak azt a verzióját, ami szerint nincsenek végtelenül kicsi/nagy mennyiségek a megszámlálhatóan sok és a kontinuum számosság között.

7. A kételemű számok dimenziója, és ami mögötte van

A kételemű számok kétdimenziósak a dimenziónak abban a leggyakrabban használt értelmében, hogy egy pont megadásához hány független adatra van szükségem. Az imaginárius elem végtelen „jelentése” miatt ugyanakkor a számsíkot számegyenesként is elgondolhatjuk, hiszen például a hiperbolikus számsík esetén **k** a …999 számot jelöli, mely a természetes számok után írható egy képzeletbeli számegyenesen, és annyiban különbözik a természetes számoktól, hogy mindegyiküknél nagyobb, de „elérhetetlen” a természetes számok létrehozásának módszerével, azzal, hogy mindig hozzáadunk egyet az előző számhoz.[9] Egyszersmind a hiperbolikus számokkal modellezhető a téridő, ha a teret egy dimenzióra szűkítem. Hány dimenziósak hát a kételemű számok; egy, kettő vagy még több? Pontosabban milyen dimenziófogalmat használjak rájuk?

Első megközelítésben az egyes számsíkok bonyolultságából indulok ki. A legegyszerűbb topológiájú számsík a komplex, vagy elliptikus számsík, amely számgyűrűként csak triviális ideált tartalmaz. A számok abszolút értékét – $\sqrt[2]{x^2 + y^2}$-t – távolságnak tekintve egy adott számponttól tetszőlegesen kicsi távolságra lévő pontok koordinátái szintén tetszőlegesen közeliek az adott számpont megfelelő koordinátájához. A parabolikus számsík tartalmaz egy darab nem triviális ideált, az **y** tengelyt. Így itt a számok abszolút értékeként definiált $|x|$-et távolságnak tekintve egy adott számponttól tetszőlegesen kicsi távolságra lévő pontok egyik koordinátája, az y tetszőlegesen távol lehet az adott számpont megfelelő koordinátájától. A

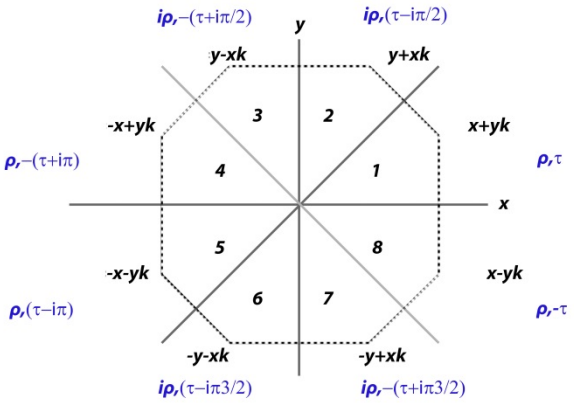
[7] Lásd például a Wikipédiában: http://hu.wikipedia.org/wiki/Cantor-halmaz

[8] A valós számok részhalmazaként megörökli a valósok metrikáját, amely metrika a Cantor-halmazon is, így metrikus tér. Kompakt, mert zárt és korlátos, perfekt, mert minden pontja torlódási pont, és végül teljesen összefüggéstelen, mert nincs nem triviálisan összefüggő részhalmaza. Első találgatásra azt gondoltam volna, hogy az említett esetben az egynél kisebb dimenziójú halmaznak kontinuumnál kisebb a számossága. A Cantor-halmaz is – a kételemű számsíkokhoz hasonlóan – azt példázza, hogy ugyanazon számosság mellett igen eltérő bonyolultságú halmazokat kaphatok.

[9] Ezt a tulajdonságot fogalmaztam meg egy korábbi cikkemben úgy, hogy az imaginárius elem a projektív geometria ideális pontjához hasonlóan a „végtelen nagy” tulajdonság helyett nem mennyiségileg, hanem minőségileg van megkülönböztetve a valós számoktól azáltal, hogy dimenziójában különbözik tőlük. Lásd; *„Az új végtelenről”* című cikket:
http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/162-az-%C3%BAj-v%C3%A9gtelenr%C5%91l.html

hiperbolikus számsík két nem triviális ideált tartalmaz; az **x=y** és az **x=-y** tulajdonságú számok egyenesét. A hiperbolikus számok abszolút értékeként definiált – $\sqrt[2]{x^2 - y^2}$-t – távolságnak tekintve egy adott számponttól tetszőlegesen kicsi távolságra lévő pontok mindkét koordinátája tetszőlegesen távol lehet az adott számpont megfelelő koordinátájától.[10]

Másképp megfogalmazva a komplex számsíkon az egymástól nulla távolságra lévő számpontok azonosak, a parabolikus számsíkon egy adott számtól nulla távolságra lévő pontok halmaza egy egyenesen helyezkedik el, a hiperbolikus számsíkon egy adott számtól nulla távolságra lévő pontok két egymást metsző egyenesre illeszkednek és az egyenesek által határolt sík-negyedek közül kettő számainak az adott számtól mért távolságnégyzete negatív, a másik két sík-negyedé pozitív. Másmódon azt mondhatjuk, hogy a komplex számsíkon két *különböző* szám távolsága csak pozitív lehet, a parabolikus számsíkon a pozitív értékeken kívül **j** többszörösei is lehetnek a távolságok, a hiperbolikus számsíkon pedig a pozitív valós, a **j**-többszörös mellett **i** többszörösei is előfordulhatnak a számsíkon definiált mérték értékeként. (Egyelőre a ”mérték” csak idézőjelesen értendő, hiszen nincs definiálva olyan mérték, mely nem valós szám, hanem tiszta képzetes szám, azaz képzetes mérték.) Nem szabad elfelejteni, hogy a hiperbolikus számok modellezik a téridőt, mégpedig az **x** tengely az időtengely megfelelője, az **y** a tér képe, tehát a való világunkban az úgynevezett fénykúpbeli események az első síknegyedhez tartoznak, melynek középvonala az **x** tengely. Ezeknek a pontoknak az origótól számított távolságnégyzete pozitív, míg az **y** tengelyt tartalmazó síknegyed, mely a valóságban a térbeli dimenzió megfelelője, negatív távolságnégyzetű pontokat tartalmaz. A számsíkokon a számok polárkoordinátás alakjai nagyon szemléletesen érzékeltetik ezeket a tulajdonságokat. A polárkoordináták legváltozatosabb érték-típusai a hiperbolikus számsíkon találhatóak, ezeket részleteiben meg lehet tekinteni a *„Kételemű számok tulajdonságainak összehasonlítása”*[11] című cikkhez mellékelt dokumentum 4-5. oldalán. Az alábbi ábra azt mutatja meg, hogy az egyes síknyolcadok számai miképp eredeztethetőek egy első síknyolcadbeli számból (a polárkoordináták kék színnel):



A fent említett cikkben is szerepel a polárkoordinátás formának egy, a klasszikustól eltérő alakja:

[10] A hiperbolikus számok téridő megfeleltetése alapján ez azt jelenti, hogy az eseménytől nulla távolságnégyzetre lehetnek olyan pontok, melyek térbeli és időbeli koordinátája tetszőleges mértékben különbözhet az adott esemény koordinátájától. Ezek azok a téridőpontok, melyek az adott eseményhez képest minimum fénysebességgel rendelkeznek.

[11] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/15-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-alap-tulajdons%C3%A1gainak-%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.html

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (4)$$

ahol **δ = i, j, k** aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\frac{y}{x}$ – nal pedig **tgφ**-ként számolok a komplex számoknál, a hiperbolikus számoknál pedig **thτ**-ként.[12]

Míg a klasszikus polárkoordinátás alakból a hiperbolikus számsíkon – $z = \sqrt{x^2 - y^2}(\cosh\tau + \boldsymbol{k}\sinh\tau)$ – az vezethető le, hogy az y tengelyt tartalmazó síknegyed, mely a valóságban a térbeli dimenzió megfelelője (a fenti ábrán a 2, 3, 6, 7 síknyolcadok) számainak abszolútértéke **i-többszörös**, azaz olyan szám, melynek a négyzete negatív, addig a (4) alakban az abszolútértéknek tekinthető szám a zárójelen kívüli x koordináta, és ez az abszolútérték az említett síknegyedekben valós (vagy **k**-szoros) szám. Az argumentumok alakulása a fenti ábrán látható kék színnel, és mind a klasszikus polárkoordinátás alakban, mind a (4) alakban megegyezik az ábrán jelzettekkel.[13]

Érdekes tehát, hogy a hiperbolikus számsíkon az *argumentum*, mely a számok kétdimenziós jellegét tükrözi, mindkét polárkoordinátás alakban a képzetes tengelyt tartalmazó síknyolcadokra egyfajta *képzetes elforgatást* mutat teljesen azonos módon, mégpedig nem hiperbolikus számsíkbeli forgatást. Ennek a képzetes forgatásnak a hiperbolikus számsíkon az x=y vagy az x=-y egyenesekre való tükrözés felel meg. A síkbeli tükrözésnek a térben valóban egy 180^0-s (vagy π-szeres) elforgatás felel meg. Ehhez hasonlóan **gondolható el a képzetes forgatás is, azzal a különbséggel, hogy itt az elforgatás mértéke –iπ/2, mintha ezek** a síknyolcadok – *képzetesen* – kifordulnának a hiperbolikus számsíkból.

8. A kételemű számok és a projektív geometria

A 7. pont első bekezdésében szerepel a kételemű számok végtelen távoli pontokkal kiegészített számegyenesként való értelmezése. Ehhez a gondolathoz úgy is eljuthatunk, ha homogén koordinátaként értelmezzük a kételemű számok „koordinátáit”. Csak a parabolikus számsík modellje hozható összefüggésbe a projektív geometriával, hiszen ez az a modell, amelynek képzetes eleme úgy tekinthető, hogy egyetlen végtelenül nagy mennyiség létezik a megszámlálhatóan sok és a kontinuum számosság között, magyarán egyetlen végtelen távoli elemet illesztettünk a számegyenes tetszőlegesen nagy számai után.[14] Így a valós számtest feletti egydimenziós euklideszi térbeli (szám)egyenes projektív bővítéseként gondolhatunk a parabolikus számsíkra. Ha a (szám)egyenesen egy közönséges (szám)pont Descartes-féle koordinátája (x), akkor homogén koordinátája az illesztett homogén koordinátarendszerben [x ,1]. A közönséges számpont $[x_1, x_2]$ homogén koordinátájára $x_1:x_2=x:1$, azaz $x=x_1/x_2$ ha $x_2 \neq 0$. (Lásd az ábrát alább).

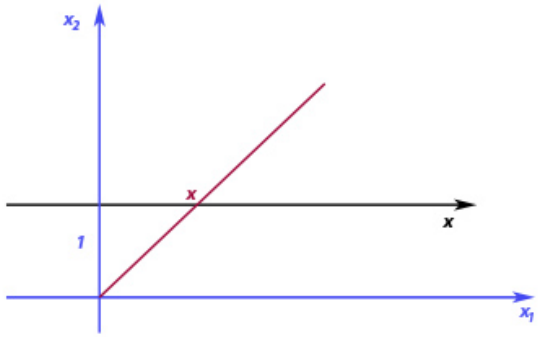
Azt kaptuk a homogén koordinátákra való áttérésnél, hogy számegyenes Descartes-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához a számsík $x=x_1/x_2$ homogén koordinátával leírható elemét rendeltem $x_2 \neq 0$ esetén, ezek az elemek az origón átmenő egyenesek. A $x_2=0$ homogén koordinátájú egyenes pedig számegyenes egyetlen végtelen távoli pontjának a megfelelője.

---

[12] A későbbiekben fontos lehet az a tulajdonság, hogy **i**tgφ=th**i**φ és **k**thτ=th**k**τ, tehát a (4) egyenlet a következő alakra hozható: $z = x(1 + th\boldsymbol{\delta}\omega)$ ahol **δ = i, j, k** aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, az ω pedig a számsíknak megfelelő argumentumot jelöli.

[13] Ezekből az argumentumokból vezethető le a különbözőképpen definiált abszolútértékek **i**- illetve **k**-szoros volta. A levezetés részben megtalálható a „*Kételemű számok tulajdonságainak összehasonlítása*” című cikkhez mellékelt dokumentum 4-5. oldalán

[14] A hiperbolikus számsíkon ilyen végtelen nagy elemből végtelen sok van a számegyenesen, a komplex számsík pedig annak a modellje, hogy egyetlen elem sincs a megszámlálhatóan sok és a kontinuum számosság között, azaz a jelenleg CH-ként ismert állítást modellezi.



A parabolikus számsík, mint projektív számegyenes egy dimenziósnak adódik.[15]

9. A kételemű számok és a téridő 3+1 dimenziója

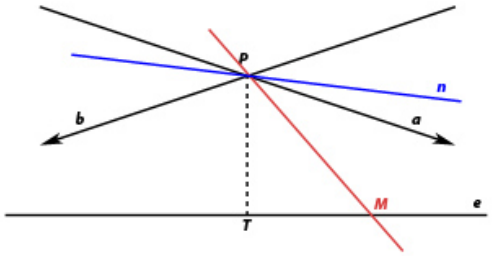
A téridő négyes-vektorát szokták úgy értelmezni, hogy a térkoordináták képzetes számok: (t, **i**x, **i**y, **i**z), így a klasszikus vektor-hossz számítás is visszaadja a Lorentz-invariást: $\sqrt{(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Az előző pontban leírtakhoz hasonlóan gondolhatnánk a négyes-vektor felírására is úgy, mintha az egy homogén koordinátarendszerbeli alak lenne, azaz egy 3-dimenziós euklideszi tér projektív bővítéseként kapnánk meg a 4 homogén koordinátával leírható homogén koordinátarendszert. (Ha az euklideszi térben egy közönséges pont koordinátája (x, y, z), akkor a homogén koordinátavektora $[x_1, x_2, x_3, t]$ melyekre $x_1:x_2:,x_3:t=x:y:z:1$. Fordítva, ha egy projektív térbeli pont homogén koordinátái: $[x_1, x_2, x_3, t]$, akkor $t \neq 0$ esetén ez a $(x_1/t, x_2/t, x_3/t)$ koordinátájú közönséges pontnak felel meg. A homogén koordinátarendszerben egy pont akkor és csak akkor végtelen távoli, ha a $[x_1, x_2, x_3, t]$ pontra $t=0$ igaz. A végtelen távoli pontok így $[x_1, x_2, x_3, 0]$ homogén koordinátájú pontok, melyek a (x_1, x_2, x_3) vektor egyenesének végtelen távoli pontjai.) **Ez a megközelítés azonban hibás két okból is**:

- A hiperbolikus számsíkon az időnek megfelelő számegyenest bővítettük ki végtelen elemekkel, és ezek jelentek meg térdimenzióként, így 4 dimenziós kiterjesztésben is az idő végtelen kiterjesztésből kell származtatni a térdimenziókat, és nem fordítva.
- A hiperbolikus számsík annak a modellje, hogy a tetszőlegesen nagy természetes számok után végtelen sok végtelen nagy szám létezik, melyek kisebbek a kontinuum-soknál, így nem alkalmazható e modellhez az a projektív geometria, amely az egyenesekhez egyetlen végtelen távoli, azaz ideális pontot rendel.

A fentiekből már levonható az a következtetés, hogy a hiperbolikus számsík és a téridő négyesvektora kapcsolatának további feltárásához szükséges lehet egy olyan projektív geometria, ahol az egyeneseket végtelen sok ideális elemmel bővítjük ki. Ehhez érdemes kiindulni a hiperbolikus geometriából, ahol egy egyenesre nem illeszkedő pontra két, az adott egyenessel párhuzamos egyenes illeszkedik, és végtelenül sok, melyek metszik, valamint végtelenül sok, melyek nem metszik az adott egyenest:

[15] Már a polárkoordinátás alak (4)-es formája is mutatja a homogén koordináta szerinti értelmezés lehetőségét.



Az ábrán az **a** és a **b** egyenesek az **e** egyenessel párhuzamos egyenesek. (A nyíl csak azt jelöli, hogy ezek az egyenesek tetszőleges mértékben megközelítik az **e** egyenest, de nem metszik.) A **P** pontból kiinduló sugársor **a** és **b** egyenesek által határolt sugárnyalábjai közül a pirossal rajzolt **PM** egyenest tartalmazó nyaláb egyenesei metszik az **e** egyenest, a kékkel rajzolt **n** egyenest tartalmazó nyaláb egyenesei nem metszik az **e** egyenest. A sugársor tulajdonképpen metsző és nem metsző egyeneseket tartalmaz, hiszen a párhuzamos egyenesek is nem metszőek.

Hasonlóan a projektív geometriához, itt is ki lehet majd indulni abból, hogy a metsző és nem metsző egyenesek egységes kezelésére az egyenesekhez végtelen távoli pontokat, azaz ideális pontokat rendelek, így minden síkbeli egyenes metszi egymást.

A hiperbolikus számok, és általában a kételemű számok kapcsolatát valamilyen projektív geometriával a későbbiekben fogom részletesebben tárgyalni. Sok kérdés még megfontolásra vár.

10. Konklúzió

Összefoglalva elmondható, hogy nem vezetett a kívánt eredményre a dimenzió fogalmának végig gondolás, azaz változatlanul megoldatlan a 3+1 dimenziós téridő vektorainak bijektív leképezése valamilyen számtérbe, holott a hiperbolikus számok tökéletesen modellezik a téridőt, ha a teret egy dimenzióra szűkítem. A parabolikus számok és a projektív egyenes kapcsolata azt a reményt kelti, hogy hasonló módszerrel a hiperbolikus számok, és általában a kételemű számok is megfeleltethetőek valamilyen projektív (szám)egyenesnek. Ez az irány annál is biztatóbb, mivel a kételemű számok és a végtelen nagy/kicsi mennyiségek kapcsolata már korábban is körvonalazódott.[16] A projektív egyenesekkel való kapcsolatot azért tartom fontosnak, mert innen – tovább lépve a projektív síkra és projektív térre – ötletet kaphatok olyan számokra, melyek a háromféle kételemű szám bővítései valamilyen új „számtérré”.

[16] Lásd *„A kételemű számok és a végtelen”* – http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/34-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html – valamint *„Az idő, a tér és a végtelen”* – http://www.infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/88-az-id%C5%91-a-t%C3%A9r-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html – című cikkeket.