A geometriai algebra dimenziói

Szubjektív és befejezetlen gondolatok a GA dimenzióiról

A hétköznapi életben általában *térbeli kiterjedés* értelemben használjuk a dimenzió kifejezést, de átvitt értelemben sok más esetben is, például az „új dimenzió”, „ebben a dimenzióban”, „más dimenziók”, „extra dimenziók” és egyéb szófordulatokban. Még ennél is gazdagabb a matematika és a fizika szakterületén használt dimenzió szó jelentésbeli tartalma. Ahányféleképpen definiált egy tér vagy topológia, annyiféle a dimenzió-értelmezés. A fogalom matematikai megközelítéséről írtam már egy keveset *„A dimenziókról”*[1] című cikkemben.

1. Dimenzió és *grade* a GA-ban

A geometriai algebra (GA) kapcsán is felmerül a dimenzió kérdése. Logikus lenne a GA dimenzióját az őt generáló vektortér dimenziójával azonosítani, hiszen legfeljebb ennyi a dimenziója az egyes térszerű elemeinek; vektoroknak, bivektoroknak, trivektoroknak stb. Ellenben célszerű – és ez az általánosan elfogadott verzió –, hogy a dimenziószámot a GA kanonikus bázisának elemszámával azonosítjuk, azaz 2^n a GA dimenziója, ha az őt generáló vektortér n-dimenziós.

Például a 3-dimenziós euklideszi vektortér által generált GA_3 multivektorának általános alakja a következő:

$$\boldsymbol{a} = a_0 + a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3} + a_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} + a_5\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3} + a_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} + a_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \tag{1}$$

Ahol $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a generáló vektortér bázisvektorai, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ egység-bivektorok és $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ egység-trivektor a GA definícióinak megfelelően. Az (1)-ben a kanonikus bázisok elemszámából következően a GA_3-t 8-dimenziósnak tekinthetjük.

David Hestenes[2] – a geometriai algebra legismertebb fejlesztője – az értelmezési zavart úgy kerüli el, hogy a dimenziót megkülönbözteti a *grade*[3] fogalmától. A dimenziót egy lineáris tér lineárisan független elemeinek maximális számával definiálja, mint általában a matematikában. A *grade* fogalma pedig a külső szorzatban szereplő maximális elemszámot jelenti. Így a fenti eszmefuttatás úgy módosítható, hogy a GA, mint lineáris tér dimenziója 2^n, ha az őt generáló vektortér n-dimenziós, és mint grade-algebra a grade-k száma n. Természetesen attól, hogy új nevet kapott az egyik fogalom, még mindig van két dimenziószerű jelenségünk. Problémásnak gondolom **Hestenes** azon törekvését, hogy a pontok koordinátákkal és vektorokkal történő megjelölésében az utóbbit tartja

---

[1] Lásd http://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/164-a-dimenziokrol

[2] Lásd például **David Hestenes**, *New Foundations for Classical Mechanics*

[3] Az angol *grade*-et *fokszám*nak lehetne fordítani, mert olyan algebrákban használt, melyekben bizonyos elemek multiplikatív tulajdonságai a polinomok és fokszámaik szorzásához hasonlóan „viselkednek”; azaz szorzáskor a fokszámuk összeadódik. Azért nem fordítottam így, mert ebben a vonatkozásban a kifejezéssel csak angol szakirodalomban találkoztam, és nem akartam zavart okozni, ha esetleg mégis van ennek a geometriai fogalomnak a *fokszám*tól eltérő magyar megfelelője.

alkalmasabbnak, mondván, hogy a koordináták felesleges információkkal túlbonyolítanak. Ezt én több szempontból is téves iránynak érzem. Először is azért, mert számolni csak számokkal tudunk. Sokat segítenek a megértésben az olyan absztrakt fogalmak, mint például a vektorok, de a numerikus lépések nélkülözhetetlenek egy hétköznapi problémamegoldásban. A numerikus lépések a vektorok esetén épp a koordináták használatát jelenti. Egyébként a vektorok négyzetének – azaz mérték-négyzetüknek – valós számokkal való definiálása számomra azt sejteti, hogy még csak nem is vektorokban, hanem számokban kellene gondolkodnunk. A kételemű számok ábrázolásában a számvektor és a kételemű szám azonosságának-különbözőségének kérdése már fel sem merül. A kételemű számok és a majdani többelemű számok óriási előnye, hogy egyesítik egy geometriai objektum vektorral és koordinátákkal való leírásának előnyeit; egyszerűsítik a műveletvégzést, és emellett plusz információval szolgálnak. Én épp egy ilyen számfogalom-bővítésben gondolkodom.[4]

Kritikus gondolataim nem jelentik azt, hogy ne értenék egyet **Hestenes**-szel abban, hogy a GA objektumai és műveletei sokkal szemléletesebb képét adják tárgyuknak, mint a koordináták használatára épülő mátrix-matematika. Mindössze azt szerettem volna megfogalmazni, hogy a koordináta-geometria és vele együtt a mátrix-matematika nem a bonyolultságával, hanem a szemléletességének hiányosságaival kerül hátrányba a GA-val szemben. Ugyanakkor hiszek egy olyan számrendszerben, amely egyesíti a két modell előnyeit; műveletei számokon definiáltak, mint a mátrix-matematikában, és matematikai objektumai még a GA-nál is szemléletesebbek.

2. Mértékegység-dimenziók

Mivel a bivektor nagysága az őt meghatározó két vektor által kifeszített paralelogramma előjeles területe, a trivektor mérete pedig a három vektora által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogata, ezért néha úgy tekintek az (1) által leírt multivektorra, mintha a vektoriális tagjai mellett mértékegységek állnának; például „cm” a vektorok, „cm^2” a bivektorok és „cm^3” a trivektor mellett. Ezzel kapcsolatban érdemes felfigyelni arra, hogy a fizikában dimenziónak nevezzük egy adott fizikai mennyiséghez tartozó mértékegységet is, ami vagy egy *alapvető* mértékegység, vagy az alapvető mértékegységek valamilyen – pozitív vagy negatív – *hatványának* szorzata. A mértékegység-dimenziókat tekintve az (1) egyenletben szereplő multivektor vagy 2- vagy 4-dimenziós aszerint, hogy az *alapvető* mértékegységeket vesszük csak alapul, vagy azok hatványait is megkülönböztetjük. Ezzel újabb dimenziószámokhoz jutottunk.

A mértékegységek dimenzió-jellege kapcsán felmerül a dimenzióanalízis használatának ötlete. Ez azonban a GA kapcsán értelmetlen gondolat, hiszen a dimenzióanalízist akkor használjuk, ha nem ismert egy rendszer matematikai modellje, csak a változói közötti összefüggésekről tudunk. Kevésbé értelmetlen, bár furcsa elképzelés a dimenzióanalízis felhasználása a célul kitűzött új számrendszer[5] kialakításánál. Ott egyrészt nem adott a matematikai modell, hiszen épp azt keressük, másrészt vannak olyan matematikai és fizikai összefüggések, melyeknek meg kellene felelnie a rendszernek. Ezt a lehetőséget még át kell gondolnom, bár vad ötletnek tűnik, és maga a dimenzióanalízis egy elég megbízhatatlan módszer.

---

[4] Lásd *„Hogyan tovább egy új számrendszerhez?”* című cikket; http://www.infinitemath.hu/matematika/326-hogyan-tovabb-egy-uj-szamrendszerhez

[5] Lásd a 4. lábjegyzetben megjelölt írást.

3. A minőségi végtelen, mint dimenzió

Az egydimenziós vektortér által generált CA-t adó kételemű számok képzetes eleme, azaz a CA-t generáló vektortér báziseleme egyfajta végtelent modellez, mégpedig a minőségi végtelent.[6] A végtelen minőségi jellege abban nyilvánul meg, hogy nem végtelen mennyiségként, hanem egy *másságot* jelző új dimenzióként jelenik meg. Másik jellemzője ezeknek a végteleneknek, hogy valamely hatványuk valós számot ad eredményül, azaz létezik vetületük a valós számegyenesen. Feltételezem, hogy a kételemű számok – mint a legtriviálisabb GA-k – térszerű elemének végtelen-értelmezése kiterjeszthető a többdimenziós GA-k, így a háromdimenziós tér által generált GA_3 multivektorainak térszerű elemeire is, melyek rendelkeznek a minőségi végtelen két legjellemzőbb tulajdonságával; egyedi dimenzióban jelennek meg, és valamely hatványuk valós szám. Elgondolkodtató, hogy a kételemű számok, mint fizikai mennyiségek modellje „csak" a tér és az idő viszonyát ábrázolja. Ehhez hasonlóan a GA_3-ban is csak „idő-" és „térszerű" mennyiségek megfeleltetései szerepelnek a multivektor általános alakjában. A fizikában hét alapmennyiséget[7] különböztetnek meg, így kérdés, hogy a majdani számrendszerben ezeknek a képét is alapmennyiségnek kell definiálni, vagy a modelljük származtatható egyéb eljárással is a számrendszer segítségével. Ez utóbbi esetben viszont gondolhatunk arra, hogy az általuk modellizáltak a fizikában sem alapmennyiségek. A GA a fizikai rendszerek modellezésében az egyik legbiztatóbb rendszer jelenleg, ezért érdemes áttekinteni abból a szempontból is, hogy a nem „téridőszerű" alapmennyiségek miként ábrázolhatóak a segítségével. Erről később részletesen is szeretnék majd írni.

[6] Lásd erről „A végtelen megragadása" című írást; http://www.infinitemath.hu/filozofia/200-a-vegtelen-megragadasa

[7] Hosszúság (m), idő (s), tömeg (kg), hőmérséklet (K), elektromos áramerősség (A), fényerősség (cd), anyagmennyiség (mol)