A téridő geometriai algebrái

A geometriai algebra többértelműsége a téridő modellekben

Tartalom

A szakirodalomban többféleképpen[1] alkalmazzák a geometriai algebrát (GA) a téridő modellezésére. Ezek közül a módszerek közül két lényegesen eltérő módszert szeretnék kiemelni. A GA legismertebb újra felfedezője és tovább fejlesztője **David Hestenes** is kétféle megközelítést használ, így más módszert alkalmaz a korai; 1966-os megjelenésű *„Space–Time Algebra”* című könyvében, mint az 1999-ben kiadott *„New Foundations for Classical Mechanics”* című alapművében. Az előbbiben a négydimenziós **Minkowski**-téridő vektorai generálják a GA-t, míg az utóbbiban a háromdimenziós euklideszi térből épül a GA, és az idő a skalár-elemmel reprezentált. Ezek az eltérések nemcsak formaiak, de a GA és a téridő értelmezését alapjaiban érintik. Az eltéréseik lényegét szeretném végiggondolni ebben a cikkben.

Mindenekelőtt szeretnék egy apró, de hatásában kedvező módosításról írni a jelöléseimet tekintve. A korábbi cikkeimtől eltérően a GA_3-beli általános multivektorok leírását úgy módosítom, hogy az indexek megfelelő permutációjával elérjem a **Pauli** mátrixoknak[2] megfeleltethető bivektor-képleteknél az egységes előjeleket.[3] Az $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ bivektort választottam bázisul az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ helyett, így az általános multivektor a következő:

$$\boldsymbol{b} = b_0 + b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + b_3\boldsymbol{e_3} + b_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} + b_5\boldsymbol{e_3}\boldsymbol{e_1} + b_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} + b_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \qquad (1)$$

Ahol $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a GA_3-t generáló tér ortogonális báziselemei, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ bivektorok és $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ trivektor, vagy pszeudoskalár a GA szokásos definíciója szerint.

Ennek megfelelően a bivektorokra:

$$\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_3}\boldsymbol{i} \qquad \textit{és} \qquad \boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_1} = -\boldsymbol{e_3}\boldsymbol{i} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{e_3}\boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_2}\boldsymbol{i} \qquad \textit{és} \qquad \boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_3} = -\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{i} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1}\boldsymbol{i} \qquad \textit{és} \qquad \boldsymbol{e_3}\boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{i} \qquad (4)$$

Ahol a pszeudoskalárt i-vel jelöltem, amire tehát a következő teljesül: $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3=\mathrm{i}$ és $\mathrm{i}^2=-1$.

Ezt a háromdimenziós euklideszi vektortér által generált geometriai algebrát **Hestenes**[4] kezdetben a ***tér* geometriai algebrá**jának nevezte, hangsúlyozva ennek az algebrának a *téridő* geometriai algebrájától való eltérését. Csak későbbi műveiben tartja alkalmasnak ezt a GA_3-at nemcsak a tér, de a téridő modellezésére is.

1. Emlékeztető

1.1. Multivektorok a GA_3-ban

Az (1) egyenlet lineárisan független elemeinek száma megfelezhető, ha felfedezzük a benne rejlő *komplex* számokat, ugyanis ez az általános multivektor az alábbi alakra hozható:

$$\boldsymbol{b} = b_0 + b_7 i + \boldsymbol{e_1}(b_1 + b_6 i) + \boldsymbol{e_2}(b_2 + b_5 i) + \boldsymbol{e_3}(b_3 + b_4 i) \qquad (5)$$

A pszeudoskalárnak a komplex i-hez hasonló jelölése indokolt, hiszen itt ugyanazokkal a tulajdonságokkal bír, mint a komplex képzetes egység, továbbá a valós elemmel együtt

[1] A sokféle egyéb ábrázolásmódból egyet említek példaként, melyben a négydimenziós téridőt egy olyan **Clifford** algebra multivektorai reprezentálják, amelyet mindössze két térvektor generál. (Lásd az **Irodalomjegyzék** 15. pontjában szereplő cikket.) Véleményem szerint ez a modell sem ragadja meg jól a tér és az idő viszonyát, csak az ábrázolások sokszínűségére szeretnék rámutatni a példájával.

[2] **Pauli** mátrixokról és algebráról lásd az **1. Melléklet**et.

[3] Lásd a régi jelöléseimet a *„CA, GA és a kételemű számok – harmadszor”* cikk (1) és (3), (4), (5) képleteiben; http://www.infinitemath.hu/matematika/344-ca-ga-es-a-ketelemu-szamok-harmadszor

[4] Lásd az 1. művet az **Irodalomjegyzék**ben.

részalgebrája a GA_3-nak, amely részalgebra megfeleltethető a *komplex számok* algebrájának.

Az (5)-tel jellemzett **Clifford** algebra zárt lesz a szorzás műveletére, ha (2)-, (3)-, (4)-gyel kiegészítjük.

Ekkor az általános multivektorok (1) alakjával jellemzett GA_3, és az (5)-tel leírt, valamint a (2)-, (3)-, (4)-gyel kiegészített *komplex* **Clifford** algebra (CA_3) kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egymással és a **Pauli** mátrixok algebrájával (P-vel) egyaránt. Így GA_3, CA_3 és P ugyanazon algebrai struktúrával rendelkeznek, azaz izomorfak. A reprezentációs elemeik különbözősége lényegtelen, mondhatjuk, hogy egy és ugyanazon algebrát definiálnak. Eszerint a *valós* háromdimenziós euklideszi térből generált nyolcdimenziós geometriai algebra egy olyan négydimenziós *komplex* vektortérnek felel meg, amely altérként tartalmazza a komplex számtestet és a háromdimenziós euklideszi teret.

1.2. Konjugáltak a GA_3-ban

A kételemű számokhoz képest a gazdagabb struktúrájú GA_3-ban több konjugált fogalom is definiálható.

1.2.1. Clifford konjugált

Az alábbi konjugált fogalomnak nem túl elterjedt elnevezését használom a **Clifford** jelzővel. A névadásra azért van szükségem, mert szeretném egyszerűbben utalni rá. Az elnevezést az indokolja, hogy ezt a konjugált képzést az (5) egyenlettel definiált – tehát komplex számokon értelmezett – **Clifford** algebra motiválta:

$$\overline{\boldsymbol{b}} = b_0 + b_7 i - \boldsymbol{e_1}(b_1 + b_6 i) - \boldsymbol{e_2}(b_2 + b_5 i) - \boldsymbol{e_3}(b_3 + b_4 i) \tag{6}$$

Ugyanez az (1) alakra átírva, azaz GA_3-ként kezelve:

$$= b_0 - b_1\boldsymbol{e_1} - b_2\boldsymbol{e_2} - b_3\boldsymbol{e_3} - b_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} - b_5\boldsymbol{e_3}\boldsymbol{e_1} - b_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} + b_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \tag{7}$$

Ennek a konjugált alaknak a segítségével egy geometriai szorzatként előálló bilineáris függvény definiálható; $\overline{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}$, melyre a következő igaz:

$$\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} = \\
&= (b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 - b_7^2) \\
&+2(b_0 b_7 - b_1 b_6 - b_2 b_5 - b_3 b_4)\boldsymbol{i}
\end{aligned} \tag{8}$$

Ez tehát egy komplex szám, azaz komplex *skalár*, hiszen ez a **Clifford** algebra komplex számokon definiált.

1.2.2. Pauli konjugált

Az elnevezéshez tartozó indokaim hasonlóak az előzőhöz; egy **Pauli** algebrához tartozik ez a konjugált, mely azonos a szakirodalomban használt **reverzió** művelettel, ez egyúttal a **hermitikus konjugálás** megfelelője a mátrix algebrában.

$$\boldsymbol{b}^\dagger = b_0 + b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + b_3\boldsymbol{e_3} - b_4\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2} - b_5\boldsymbol{e_3}\boldsymbol{e_1} - b_6\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} - b_7\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}\boldsymbol{e_3} \tag{9}$$

Tekintsük a következő geometriai szorzatot:

$$\boldsymbol{b}^\dagger\boldsymbol{b} = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 +$$

$$+2\boldsymbol{e_1}(b_0 b_1 - b_2 b_4 + b_3 b_5 + b_6 b_7) +$$

$$+2\boldsymbol{e_2}(b_0b_2 + b_1b_4 - b_3b_6 + b_5b_7) +$$
$$+2\boldsymbol{e_3}(b_0b_3 - b_1b_5 + b_2b_6 + b_4b_7) \quad (10)$$

A (9) konjugált képzéshez, azaz reverzióhoz másképp is eljuthatunk. A (2), (3), (4) figyelembe vételével alakítsuk át az (1) alakot:

$$\boldsymbol{b} = b_0 + b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + b_3\boldsymbol{e_3} + (b_7 + b_6\boldsymbol{e_1} + b_5\boldsymbol{e_2} + b_4\boldsymbol{e_3})\boldsymbol{i} \quad (11)$$

Itt a komplex mintára a képzetes rész előjelváltásával képezzük a konjugáltat:

$$\boldsymbol{b}^\dagger = b_0 + b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + b_3\boldsymbol{e_3} - (b_7 + b_6\boldsymbol{e_1} + b_5\boldsymbol{e_2} + b_4\boldsymbol{e_3})\boldsymbol{i} \quad (12)$$

Ha a (12) egyenletben elvégezzük a műveleteket, akkor visszakapjuk a (9) definíciót.

1.2.3. A komplex képzetes egység szerepe a Clifford és a Pauli konjugáltak képzésében

A szakirodalomban általában *paravektor*nak nevezik egy skalár és egy vektor összegét, ahol ezek mindegyike lehet valós és komplex.

Ennek értelmében a **Clifford** konjugált egy háromdimenziós *komplex paravektor* konjugáltja, amit úgy képeztünk, hogy a paravektor vektor eleme vált előjelet. A **Pauli** konjugált viszont úgy is értelmezhető, mintha egy paravektor töltené be a *skalár* szerepét egy komplex „számban”, és itt a szokásos módon végeznénk a konjugálást, azaz a képzetes rész vált előjelet.

Nagyon figyelemre méltó, hogy a komplex elem rejtve miképp van jelen a multivektorokban. A GA_3 általános multivektorának klasszikus (1) alakja a geometriai algebra alapműveleteivel az (5) és a (12) alakra hozható. Mindhárom alak ugyanazt a multivektort jelöli, az (5) és a (12) alak pedig felfedi a multivektorok kapcsolatát a komplex képzetes egységgel.

2. Minkowski téridő által generált GA, azaz $GA_{1,3}$

A **Minkowski** téridő[5] vektorai egy valós CA-t ($CA_{1,3}$) – egyúttal GA-t ($GA_{1,3}$) generálnak –, amely kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető, azaz izomorf a **Dirac** algebrával[6] (D), ezért a továbbiakban ezt a geometriai algebrát is **Dirac** algebrának fogom nevezni, és D-vel jelölöm, de nem szabad elfelejteni, hogy ezt az algebrát most nem egy izotér mátrixai, hanem vektorelemek reprezentálják.

A **Dirac**, vagy γ mátrixok megfelelői a $GA_{1,3}$-ban négy ortogonális vektor $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, melyekre a következők teljesülnek:

$$\gamma_0^2 = 1, \qquad \gamma_0 \cdot \gamma_i = 0, \; \gamma_i \cdot \gamma_j = -\delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3 \quad (13)$$

$$\gamma_\mu \cdot \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} = diag(+---), \quad \mu,\nu = 0,1,2,3 \quad (14)$$

A szakirodalomban megszokott jelölésekben γ_0 az időszerű vektor, és γ_1, γ_2, γ_3 térszerű vektorok, az indexekben a latin betűk térszerű vektorokat jelölnek 1-3, míg a görögbetűs index a téridő négy független elemének bármelyikét jelölheti; 0-3, a δ pedig szokás szerint a Kronecker delta.

A **Minkowski** téridő kevert szignatúrája miatt – követve a konvenciókat – megkülönböztetem a koordinátarendszert; $\{\gamma_\mu\}$-t a reciprokától; $\{\gamma^\mu\}$. A reciprok vektorokra $\gamma_0 = \gamma^0$ és $\gamma_i = -\gamma^i$ igaz. A

[5] Itt a speciális relativitáselmélet „lapos” téridejéről van szó.
[6] **Dirac** algebráról lásd a **2. Melléklet**et.

téridő algebra egy általános vektora $\{\gamma_\mu\}$ vektorból áll elő, azaz a téridő egy eseményét x vektorral jelölve x^μ koordinátákkal és az **Einstein**-féle összegkonvenciót használva:

$$x = x^\mu \gamma_\mu = ct\gamma_0 + x^i \gamma_i \tag{15}$$

Ebben az algebrában a kevert szignatúra miatt egy vektornégyzet nem mindig pozitív:

$$a^2 = aa = \epsilon |a^2| \tag{16}$$

Ahol ϵ a vektor szignatúrája ϵ ±1 vagy 0 lehet.

Az algebra pszeudoskalárját úgy lehet tekinteni, mint egy négydimenziós irányított térfogatot, mégpedig *téridőbeli* térfogatot:

$$I \equiv \gamma_5 = \gamma_0 \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{17}$$

Erre a pszeudoskalárra $I=\gamma_5^2=-1$ igaz, és kommutatív azokkal a külső szorzatokkal, melyek grade-je páros[7], és antikommutatív a páratlanokkal, azaz a vektorokkal és a trivektorokkal. Így a komplex képzetes egységgel való hasonlósága csak részleges, és ezért jelöltem a szokásos i jelölés helyett I-vel ezt a pszeudoskalárt.

Ennek az algebrának részalgebrája egy **Pauli** algebra, azaz az **1. Emlékeztető**ben jellemzett klasszikus GA_3, amelyet **Hestenes** a *tér* geometriai algebrájának nevezett kezdetben. Ez a részalgebra a fent jellemzett **Dirac** algebra bivektoraiból képzett algebra.

2.1. Bivektor algebra

A fenti D algebrában 6 bivektor szerepel, amelyek két osztályba sorolhatóak; azok, amelyek tartalmaznak időszerű elemet (azaz $\gamma_i \wedge \gamma_0$), és azok, melyek nem (azaz $\gamma_i \wedge \gamma_j$).

Bármely ortogonális a és b vektor skalárszorzata 0, ezért geometriai szorzatuk egyenlő a külső szorzatukkal, azaz

$$(a \wedge b)^2 = abab = -abba = -a^2b^2 \tag{18}$$

A két különböző típusú bivektorra így eltérő előjelű bivektor-négyzetet kapunk, azaz

$$(\gamma_i \wedge \gamma_j)^2 = -\gamma_i^2 \gamma_j^2 = -1 \tag{19}$$

$$(\gamma_i \wedge \gamma_0)^2 = -\gamma_i^2 \gamma_0^2 = +1 \tag{20}$$

Az utóbbi bivektorok a *hiperbolikus* képzetes egységnek feleltethetők meg, egy valós skalárral vett összegük a hiperbolikus számsíkhoz, szorzataik a **Lorentz** transzformációhoz vezetnek.[8]

A (20)-as egyenletben leírt „időszerű" bivektorokat tekintik a **Pauli** részalgebra bázisvektoraiként:

$$\sigma_k = \gamma_k \gamma_0 \tag{21}$$

A részalgebra bivektorai a következők

$$\sigma_j \wedge \sigma_k = -\gamma_j \wedge \gamma_k \tag{22}$$

A **Pauli** algebra pszeudoskalárjára pedig:

$$i \equiv \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \sigma_3 = (\gamma_1\gamma_0)(\gamma_2\gamma_0)(\gamma_3\gamma_0) = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{23}$$

Látható, hogy a **Pauli** algebra pszeudoskalárja megegyezik a **Dirac** algebra

[7] Emlékeztetőül: itt a *grade-szám* a külső szorzat tényezőinek a számát jelenti.
[8] A hiperbolikus számok és a Lorentz transzformáció kapcsolatáról lásd a **3. Melléklet**et.

pszeudoskalárjával. Miért jelöltem mégis i-vel? Ez a jelölés itt azért indokolt, mert a **Pauli** algebrán belül ez a pszeudoskalár kommutatív minden elemmel, azaz tulajdonságai megegyeznek a komplex képzetes egységgel. Tehát D skalárja és pszeudoskalárja a P-nek is skalárja és pszeudoskalárja, továbbá D „térszerű” bivektorai a P-nek is bivektorai, viszont D „időszerű” bivektorai a P-nek vektorai. Összegezve: a **Minkowski** téridő négyesvektoraiból generált **Dirac** algebrának részalgebrája egy olyan algebra, melynek tulajdonságai megegyeznek az **1. Emlékeztető**ben leírt háromdimenziós euklideszi tér generálta geometrikus algebrával; GA_3-mal, amely **Pauli** algebra is egyben. A megfeleltetés könnyen igazolható, nem térek ki rá.[9]

A két algebra tulajdonságai és összefüggései miatt nevezi **Hestenes** a **Pauli** algebrát a *tér* geometriai algebrájának, és a **Dirac** algebrát a *téridő* geometriai algebrájának.

2.2. Lorentz transzformáció

Eddig olyan módszert követtem, amely megegyezik mind **Hestenes**, mind a **Doran-Lasenby** szerzőpáros egy-egy[10] alapművében szereplő téridő-algebra leírásával. A **Lorentz** transzformáció algebrai leírásában azonban eltérnek az ábrázolásaik, és én **Doran-Lasenby** megoldását követem majd, mert ugyan ezzel is van gondom, de **Hestenes** metódusát több szempontból is vitathatónak tartom.

Megjegyzések

Hestenes idézett könyvében a **Lorentz** transzformáció leírásában használja a 4 dimenziós téridő-vektorok párhuzamos és merőleges összetevőkre bontását. A téridő hiperbolikus vektorterében azonban a skalárszorzattal együtt az ortogonalitás, vele együtt pedig a reflexió matematikája is különbözik az euklideszi térben, és a komplex számkörben alkalmazottaktól. Ez leginkább a koordináták használatában tűnik ki, amelyet **Hestenes** igyekszik is elkerülni, és csak egy általános vektoralgebrai leírás után vázolja kiegészítőként. A **3. Melléklet**ben bemutatott hiperbolikus számsíkon érzékelhető legjobban, hogy itt a komplex számkörhöz hasonlóan a skalárszorzatból definiált merőlegesség szintén a képzetes egységgel való szorzáshoz köthető, viszont a komplexektől eltérően ez koordinátákkal kifejezve az y=x egyenesre való tükrözésnek felel meg.[11,12]

A **Lorentz** transzformáció koordinátaszintű leírásánál **Hestenes** a differenciálszámítás alapelemeit használja, aminek *mechanikus* alkalmazása megint csak vitatható, hiszen a hiperbolikus számkörben sem ez, de még a folytonosság és a konvergencia klasszikus fogalmai sem használhatóak *automatikusan*. Nem igazán érthető számomra, miért gondolja azt – **Hestenes**hez hasonlóan – szinte mindenki, hogy a téridő egy kontinuum (vagy manifold). Csak rá kell nézni a **Lorentz**

[9] Itt érdemes megjegyezni, hogy ez a **Pauli** algebra vagy szigma-algebra a **Dirac** algebrának páros algebrája, azaz a Dirac algebra azon elemeiből épül fel, melyek külső szorzataiban a tényezők száma páros: 0-vektorból, azaz skalárból, 2-vektorokból, azaz bivektorokból, végül a D pszeudoskalárjából, azaz 4-vektorból áll a P. A páros részalgebrák általánosságban is nagyon érdekes tulajdonsággal bírnak. Egy algebra páros algebrája mindig részalgebra is egyben, továbbá egy n dimenziós térből generált C_n algebra páros részalgebrájához C_n^+-hez mindig lehet társítani egy generáló n-1 dimenziós vektorteret; $C_n^+ = C_{n-1}$. Nagyon figyelemfelkeltő néhány jól ismert algebra „egymásba ágyazódása”. Ha $A_1 \leq^+ A_2$ jelzi, hogy A_1 páros részalgebrája az A_2-nek, akkor $R \leq^+ C^+ \leq^+ H \leq^+ P$, ahol R a valós számokat, C a komplexeket, H a kvaterniókat és P a **Pauli** algebrát jelöli.

[10] Lásd az **Irodalomjegyzék**ben az 1. és a 4. művet.

[11] Ennek bemutatását „*A szimplektikus teve «természetes előfordulásai» II.*” című cikk részletesebben is tartalmazza; http://www.infinitemath.hu/images/stories/skalar_szorzat_ii_v2.pdf

[12] Nagyon érdekes, hogy a képzetessel való szorzás eredményében a hiperbolikus számsíkon is „benne rejlik” a π/2-vel való forgatás, csak éppen itt **-i**π/2-vel „forgatunk”, ahol **i** a komplex képzetes egység, azaz $\mathbf{i}^2=-1$. Így, ha $z=x+\mathbf{k}y=r(\mathrm{ch}\tau+\mathbf{k}\,\mathrm{sh}\tau)$ egy hiperbolikus szám, azaz x, y valós számok és **k** a hiperbolikus képzetes egység, amire $k\neq1$ és $\mathbf{k}^2=1$, és $\mathrm{th}\tau=y/x$, akkor ezt a hiperbolikus képzetessel szorozva: $\mathbf{k}z=r(\mathrm{sh}\tau+\mathbf{k}\,\mathrm{ch}\tau)=\mathbf{i}r(\mathrm{ch}(\tau-\mathbf{i}\pi/2)+\mathbf{k}\,\mathrm{sh}(\tau-\mathbf{i}\pi/2))$. Tehát a hiperbolikus képzetessel való szorzás leírható egy olyan polárkoordinátás alakkal is, melyben a norma komplex képzetes, az argumentum pedig komplex –iπ/2-vel tolódik, ugyanakkor mindennek a geometriai képe a hiperbolikus síkon a valós koordinátákkal leírt számpontnak az y=x egyenesre való tükrözése.

transzformációt alapművelet szinten tartalmazó hiperbolikus számkörre, hogy érthető legyen; a téridő sem kontinuumnak, sem manifoldnak nem tekinthető. Még egy pont *környezetének* fogalmát sem lehet egy klasszikus metrika használatával definiálni; a **Minkowski**-féle metrikát tekintve a téridőnek minden pontjában „szakadása” van, hasonlóan a hiperbolikus számsíkhoz az ott definiált normát tekintve. A hiperbolikus számok korrekt matematikája még jórészt feltáratlan, de már jelenleg is van megoldás ezekre a problémákra.

Gondolhat valaki arra, hogy miképp lehet eredményes a **Minkowski**-féle téridő-leírás, ha a kontinuitás és a manifold jelleg téves feltételezésén alapszik. Ennek a magyarázata nagyon egyszerű, ugyanis épp a **Hestenes** által háttérbe szorított és kárhoztatott koordinátaszintű kezeléssel a hibák jó része elkerülhető. Tudniillik a hiperbolikus számsíkon – és hasonlóan a **Minkowski** téridőben – a *környezet*, a *konvergencia*, a *folytonosság* és az ezeken alapuló egyéb fogalmak klasszikus módon definiálhatók az egyes koordinátákra vonatkozóan, azaz a fizikát modellező rendszerben a tér- és az időkoordinátákra külön-külön. Így például a hiperbolikus számokra is jó az a folytonossági definíció, miszerint f(x,y) folytonos az (x_0,y_0) számpontban ha $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f\big(x_0,y_0\big)$, ahol (x_0,y_0) és (x,y) számpontok a hiperbolikus számsík pontjai; $(x_0,y_0)= x_0+y_0\mathbf{k}$, és $(x,y)=x+y\mathbf{k}$. Ennek megfelelően a **Minkowski**-féle téridő-leírásban a koordinátaszintű kezelés és így például a parciális deriválás is klasszikus módon kezelhető.

A téridő koordinátaszintű leírásai tehát korrektek, de a **Hestenes** által áhított absztrakt, koordinátákat nélkülöző leírást a geometriai algebra eszköztárával nem tartom kifogástalannak a **Lorentz** transzformáció esetében sem. Véleményem szerint **Hestenes** célja csak akkor érhető el, ha a leírás minden lépésében figyelembe veszi a hiperbolikus geometria sajátosságait, melyek lényeges módon eltérnek az euklideszi tér geometriájától. A legígéretesebb módszertant pedig abban látom, ha a komplex és a hiperbolikus számokat – és velük együtt a parabolikus számokat – azaz a kételemű számokat közös számrendszerben tudjuk kezelni, és kidolgozott lesz ezeknek az alapszámoknak a közös matematikája.

A **Doran-Lasenby** szerzőpáros idézett könyvében[13] szereplő leírást követem némi módosítással a **Lorentz** transzformáció $GA_{1,3}$-beli leírására. Az ábrázolás koordináta-szintű, és az egyszerűség kedvéért a mozgó inerciarendszer sebességének iránya az egyik térkoordináta-tengely irányába esik, így a másik két térkoordináta változatlan. A vonatkozó és a vonatkoztatott koordinárendszerek bázisvektorait $\{e_\mu\}$- és $\{e'_\mu\}$-vel jelölve, ahol μ=0,1,2,3 és e_0 az időtengely, a rendszerek origója a kezdeti időpillanatban egybeesik, a sebesség iránya pedig a 3. tértengely irányával egyezik meg. Ekkor a **Lorentz** transzformációnak a – **3. Melléklet**ben megtalálható – klasszikus formáját használva és a koordináták változását a mozgó rendszer bázisvektoraira alkalmazva a következő igaz:

$$e'_0 = \alpha(e_0 - \beta e_3),\quad e'_1 = e_1,\quad e'_2 = e_2,\quad e'_3 = \alpha(e_3 - \beta e_0) \tag{24}$$

ahol $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ és $\beta = \frac{v}{c}$, c a fénysebesség, és β<1.

A **3. Melléklet**ben leírtak tanulsága szerint érdemes bevezetni a $\beta = \frac{v}{c}$ –re egy függvényt:

$$\tanh\theta = \beta \tag{25}$$

Így $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\tanh\theta)^2}} = \cosh\theta$ (26)

Ezek alapján a bázisvektorokra

$$e'_0 = \cosh\theta\,(e_0 - \tanh\theta\, e_3) = \cosh\theta\, e_0 - \sinh\theta\, e_3 = (\cosh\theta - e_3e_0\sinh\theta)e_0 = e^{-\theta e_3 e_0}e_0 \tag{27}$$

hasonlóan

[13] Lásd az **Irodalomjegyzék**ben a 4. művet.

$$e_3' = \cosh\theta\,(e_3 - \tanh\theta\, e_0) = \cosh\theta\, e_3 - \sinh\theta\, e_0 = (\cosh\theta - e_3e_0\sinh\theta)e_3 = e^{-\theta e_3 e_0} e_3 \qquad (28)$$

A (27) és (28)-es egyenletekben az e_3e_0 bivektorról tudom, hogy $(e_3e_0)^2=1$, tehát az kaptuk, hogy egy mozgó inerciarendszerre áttérve az eredeti bázisvektorok – hasonlóan a hiperbolikus számsíkhoz – egy hiperbolikus egységvektorral szorzódnak, amely transzformáció egy hiperbolikus forgatást, azaz **Lorentz** transzformációt takar.

3. Téridő modell a klasszikus GA_3-ban: a skalár elem, mint idő-reprezentáció

A **Minkowski**-féle téridő matematikai modelljében a 4 báziselem kölcsönösen ortogonálisak egymásra, tehát az idő- és a 3 tér-koordinátatengely merőlegesek az ábrázolásban. Ezzel szemben a GA-kban a skalár elem lineárisan független báziselem, de az ortogonalitás csak a vektorelemekre definiált. Feltehetően ezért nem gondoltak az előző pontban bemutatott modell alkotói a skalár-elemre, mint idődimenzióra. Ha eltekintünk a **Minkowski**-féle téridő-értelmezéstől, és tudatosodik bennünk, hogy a GA-ban a báziselemek négyzete +1-gyel egyenlő, akkor fölöslegesnek látszik az előző pontban bemutatott modellbeli „bonyodalom" a σ-vektorokkal, azaz bivektor-algebrával, melyekben az „időszerű" bivektorok négyzete +1-et ad, és ez teszi alkalmassá őket a hiperbolikus képzetes egység szerepének betöltésére. Ugyanezt a struktúrát adja maga a GA_3 is, mi szükség van hát a páros részalgebrájára, azaz a bivektor algebrára a téridő modellezésében? Ezen az ötleten alapszik az a téridő modell, amelyben a GA_3 skalár eleme reprezentálja az időt.

Bár **Hestenes** a későbbi könyvében[14], amely a GA egyik alapműve, már ezt a modellt körvonalazta, mégsem követem az ábrázolásmódját, mert sajnos ebben a reprezentációban is az euklideszi geometria fogalmait használja a hiperbolikus esetre is, és sok bizonyítatlan feltételezéssel él. Miközben párhuzamba állítja a térbeli körmozgást a hiperbolikus forgatással, figyelmen kívül hagyja, hogy az utóbbi *téridőbeli* forgatás. Ennek kapcsán nem hagyhatjuk számításon kívül azt sem, hogy **Einstein** speciális relativitáselmélete alapján – de a tapasztalataink alapján is – nincs tér idő nélkül, és nincs idő tér nélkül, csak *téridő* van.[15] Így ha egy modell mind komplex, mind hiperbolikus egységvektorral való szorzás képét eredményezheti – azaz kör- és hiperbolikus forgatást – akkor az előbbi sem *térbeli* körforgatást jelent, hanem *téridőbelit*, amint az utóbbi is.[16] Más szóval a modell nemcsak az univerzumunkra jellemző hiperbolikus téridőt adhat eredményül, de komplex téridőt is, amelyben a v sebességgel mozgó inerciarendszer koordináta-transzformációi körmozgást mutatnak a *téridő* változásában. Így a hiperbolikus és a komplex párhuzam, továbbá a téridő egységének figyelembe vétele azt jelenti, hogyha a hiperbolikus számsíkon a valós tengely az időnek, a képzetes egy térdimenziónak felel meg, akkor ugyanígy a komplex számsík egy olyan téridőt modellez, amelyben a valós tengely szintén az időt, és a képzetes tengely egy térdimenziót modellez. Ugyanakkor, ha figyelembe vesszük a fénysebesség állandóságának feltételét, akkor rá kell jönnünk, hogy azt csak a hiperbolikus forgatást leíró **Lorentz** transzformáció teljesíti a többi feltételnek egyébként eleget tevő lineáris transzformációk; az $e^{-\mathbf{i}\theta}$, $e^{-\mathbf{k}\theta}$ (és természetesen a **Hestenes** által nem említett $e^{-\mathbf{j}\theta}$, ahol $j^2 = 0$) képzetes egységvektorok segítségével leírható függvények között. Ennek belátását most nem részletezem, de a kételemű számok téridő-kapcsolata

[14] Lásd az **Irodalomjegyzék**ben a 2. művet.

[15] „Henceforth, space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality." /Hermann Minkowski, Address to the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, (Sep 21, 1908)/

[16] A tévedés oka szinte biztosan az, hogy a komplex számsíkon a skalárszorzat, a norma, és a határértékek definíciói megegyeznek az euklideszi térben használtakkal, ezért a komplex számmal leírt forgás a térbeli forgás leírására is alkalmas, ha a valós és a képzetes tengelyt is térbeli dimenzióknak feleltetem meg.

és polárkoordinátás alakja segítségével nagyon könnyen bizonyítható, ha belegondolunk abba, hogy a fénysebesség állandóságának feltétele a maximális sebesség létezését jelenti.[17]

A **Hestenes**-modellel kapcsolatos ellenérveim miatt leírásomban **Garret Sobczyk**[18] ábrázolását követem, jóllehet ő is elköveti a fenti hibát, azaz a körforgás *térbeliségét* és a hiperbolikus forgatás *téridőbeliségét* állítja párhuzamba. Viszont kevesebb feltételezéssel él, mint **Hestenes**, és ábrázolása nagyon jól nyomon követhető, könnyen felfedezhető benne az, amikor logikailag megbicsaklik. **Sobczyk** reprezentációja is a koordinátaszintű ábrázolás kerülését célozza, holott ez jelenleg épp a korrektség és használhatóság biztosítéka.

Garret Sobczyk az idézett könyvében a geometriai algebra elemeinek bevezetése előtt mutatja be a hiperbolikus számokat, egyúttal a szerepüket a relativitáselméletben és a **Lorentz** geometriában. Elsőként a hiperbolikus számsíkot ismerteti; párhuzamot vonva közte és a komplex számsík között. Mivel a **3. Melléklet** tartalmazza ennek lényegét, ezért erre nem térek ki. Ebben a bevezető szakaszban a hiperbolikus számokkal leírható **Lorentz** transzformáció ábrázolásában sem tér el lényegesen attól, amit a **3. Melléklet** tartalmaz.

A geometriai algebra és a fizika egyéb alapfogalmainak bevezetése után a 11. fejezetben tér vissza **Garret Sobczyk** a téridő geometriájára. A szerző jelöléseit megtartva[19] a téridőben $X \in GA_3$ a t időbeli és $\mathbf{x}$ helyű eseményre $X = ct + \mathbf{x}$, ahol – alkalmazva az Einstein-féle összegkonvenciót – $(\mathbf{e})_{(3)}(x)^{(3)} \in R^3$. A hiperbolikus számok tulajdonságai alapján – ehhez lásd a **3. Melléklet** M8 képletét – egy inerciarendszerhez viszonyítva v sebességgel mozgó másik inerciarendszerre a transzformáció a következő:

$$X' = Xe^{-\theta e_2} \in GA_3 \tag{29}$$

ahol $\tanh\theta = v/c$; c-vel jelölve a fénysebességet, továbbá a v sebesség a második koordinátatengelybeli, azaz $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_2$, ahol $v = |\mathbf{v}|$. Már sejteni lehet, hogy a problémák abból fakadnak majd, hogy a (29) egyenlet nem koordinátaszinten írja le a **Lorentz** transzformációt.

Érdekes, hogy a második koordinátatengelybeli **v** sebességet egy egységsebesség és a sebesség nagysága szorzataként is felírja a szerző: $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}$, ahol $v = |\mathbf{v}|$, holott **e**lőtte már bevezette a $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_2$ jelölést, amelynek hasonló a szerepe. Ennek az volt a célja valószínűleg, hogy kerülni kívánta a koordináták használatát. E jelöléseket használva a transzformációra a következők adódnak (29)-ből

$$ct' + \mathbf{x}' = (ct + \mathbf{x})(\cosh\theta - \hat{\mathbf{v}}\sinh\theta) = \cosh\theta\,(ct + \mathbf{x})\left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) =$$

$$= \cosh\theta\left(ct + \mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right) + \cosh\theta\left(\mathbf{x} - t\mathbf{v} - \mathbf{x}\wedge\frac{\mathbf{v}}{c}\right) \tag{30}$$

Figyelembe véve, hogy $\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

az következik, hogy

[17] A kételemű számok polárkoordinátás alakjáról lásd például *„A kételemű számok, mint homogén koordinátával leírt számegyenesek”* című cikket;
http://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/176-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-mint-homog%C3%A9n-koordin%C3%A1t%C3%A1val-le%C3%ADrt-sz%C3%A1megyenesek

[18] Lásd az **Irodalomjegyzék**ben a 9. művet.

[19] Az itt közölt levezetés megegyezik a szerző művében leírtakkal (**Irodalomjegyzék** 9. pont). A könyv nem érhető el online, de az itt idézett részek olvashatóak a Google Könyvek keresőjét használva, lásd a 183-184-oldalt az idézett könyvben:
https://books.google.hu/books?id=54XR5v_dEnwC&printsec=frontcover&hl=hu&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q=event%20X&f=false

$$\mathrm{t}' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}\left(\mathrm{t} - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{\mathrm{c}^2}\right), \qquad \text{és} \qquad \mathbf{x}' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}\left(\mathbf{x} - \mathrm{t}\mathbf{v} - \mathbf{x}\wedge\frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\right) \tag{31}$$

Az idő-transzformációra a jól ismert egyenletet kaptuk, természetesen a GA műveleteivel kifejezve, de az **x** térvektorra kapott eredmény eltér a **Lorentz** transzformációtól, hiszen egy „különös” bivektort is tartalmaz. Ezek után a szerző magyarázatot keresve a térbeli **x** vektort felbontja a **v** sebességgel párhuzamos és merőleges összetevőkre:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp} \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} \tag{32}$$

Ez a felbontás itt nem kifogásolható, hiszen ez a felbontás euklideszi térvektorokra vonatkozik. A (31) és (32)-ből

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}(\mathbf{x} - \mathrm{t}\mathbf{v}) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{x}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}\mathbf{x}_{\perp}\left(1 - \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\right) \tag{33}$$

A (33) egyenletekből az első a jól ismert **Lorentz** transzformáció a térelemre, a második viszont nem szerepel a megszokott, és gyakorlatban is igazolt összefüggésekben, hiszen a **Lorentz** transzformáció a sebességre merőleges térelemeket változatlanul hagyja. A szerző megállapítja, hogy ennek a merőleges komponensnek a négyzetére teljesül, hogy ${\mathbf{x}'_{\perp}}^2 = {\mathbf{x}_{\perp}}^2$. Ennek ellenére a kijelölt műveletek elvégzésével nem igazolható, hogy $\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}$. A (33) egyenletnek ez a második tagja tulajdonképpen a sebességre merőleges komponensekre alkalmazott **Lorentz** transzformációt írja le, hiszen

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}}\mathbf{x}_{\perp}\left(1 - \frac{\mathbf{v}}{\mathrm{c}}\right) = \cosh\theta\,\mathbf{x}_{\perp}\left(1 - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}}\hat{\mathbf{v}}\right) = \mathbf{x}_{\perp}\cosh\theta\,(1 - \tanh\theta\,\hat{\mathbf{v}}) =$$

$$= \mathbf{x}_{\perp}(\cosh\theta - \hat{\mathbf{v}}\sinh\theta) \tag{34}$$

Ebből pedig „ránézésre” látszik, hogy ${\mathbf{x}'_{\perp}}^2 = {\mathbf{x}_{\perp}}^2$, hiszen $\mathbf{x}_{\perp}$ egy egységvektorral van szorozva a (34)-ben, és tudjuk, hogy egy egységvektorral való szorzás nem változtat a vektor hosszán.

A **Lorentz** transzformáció klasszikus leírása szerint a merőleges összetevőn a transzformáció nem változtat, így a (34)-hez azt tehetjük hozzá, hogy:

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp}(\cosh\theta - \hat{\mathbf{v}}\sinh\theta) = \mathbf{x}_{\perp} \tag{35}$$

Mindez azonban a **Lorentz** transzformáció ismeretéből, és nem a GA sajátosságaiból adódik.

4. Összegzés

A fentiek egyik gyorsan levonható tanulsága az, hogy a hiperbolikus számokkal ellentétben a GA-k fent bemutatott két típusában – a **Minkowski** tér által generált $\mathrm{GA}_{1,3}$-ban és a klasszikus GA_3-ban – a modell nem tartalmazza a GA-beli műveletek szintjén a **Lorentz** transzformációt. Sem $\mathrm{GA}_{1,3}$-nak sem a GA_3-nak nem képezik részalgebráját a hiperbolikus számok, mindössze tulajdonságaik általánosításával – és természetesen a GA-k alapelemeivel – van átfogalmazva a klasszikus transzformáció.[20] E megállapítás lekicsinylő jellegével nyilván nem értenének egyet a GA neves

[20] A cikkbeli leírások a passzív **Lorentz** transzformációra vonatkoztak. **David Hestenes**hez hasonlóan **Garret Sobczyk** is külön foglalkozik az aktív és a passzív **Lorentz** transzformáció leírásával a GA eszközeit felhasználva. Ebben is a koordináta nélküli leírásra való törekvésük nyilvánul meg. A **Lorentz** transzformáció klasszikus leírása (koordinátaszintű) passzív transzformáció, amely ugyanazon téridő eseményt két különböző koordinátarendszerben ír

fejlesztői. Én sem szeretném lebecsülni a GA jelentőségét a fizikai folyamatok ábrázolásában, de túlértékelni sem szeretném. Amint többször megjegyeztem, a GA-t érdekes és nagyon tanulságos eszköznek tartom, de semmiképpen sem a legjobb matematikai eszköztárnak.

A hiperbolikus képzetes elem hiába van jelen explicit módon a GA-t generáló és négyzetében +1-et adó bázisvektorokban, ha a skalár elemmel együtt – mint hiperbolikus szám – nem részalgebrája a GA-nak. A pszeudóskalárban vagy a multivektorokban implicit módon jelenlevő komplex képzetes sokkal használhatóbb része a GA matematikájának, nem utolsó sorban azért is, mert részalgebrája a GA_3-nak. Ez magyarázat lehet arra, hogy a GA miért alkalmazható olyan jól a komplex számokat használó mátrix-algebrák helyettesítésére, és miért olyan nehézkes a reprezentációja a hiperbolikus számokat használó speciális relativitáselmélet esetében.

Nagy hiányossága a GA-nak, hogy a parabolikus számokat sem explicit, sem implicit módon nem tartalmazza, pedig a parabolikus (duális) számok a komplex és a hiperbolikus számokkal együtt a legegyszerűbb CA-kat alkotják, mégpedig az egyetlen térelemből generált CA-kat.[21] Ez azért is súlyos fogyatékossága a GA eszköztárának, mivel a körmozgás és a hiperbolikus forgatás (**Lorentz** transzformáció) mellett a harmadik alapmozgást írja le a parabolikus számsík elemeinek szorzás művelete, mégpedig az eltolást; azaz az egyenesvonalú mozgást. Amikor **Hestenes** a **Lorentz** transzformáció általános leírására törekedve egy – a speciális relativitáselmélet követelményeinek megfelelő – lineáris függvényt keres, akkor komplex és hiperbolikus egységvektorokkal ($e^{-\mathbf{i}\theta}$ és $e^{-\mathbf{k}\theta}$ ahol $\mathbf{i}^2 = -1$ és $\mathbf{k}^2 = +1$) végezhető műveletet hoz ki eredményül, mondván, hogy a **Lorentz** transzformációt eredményező feltételrendszernek a térbeli forgatás és a téridőbeli **Lorentz** transzformáció felel meg. Már említettem ezzel kapcsolatban azt a logikai hibát, hogy a feltételek alapján az eredménynek mindkét esetben *téridőbeli* mozgást kell leírnia. De van még további két komoly hiba **Hestenes** megállapításában. Egyrészt a parabolikus számokkal leírt alapmozgás, az eltolás is eredményül kapható a feltételrendszerből; vagyis az $e^{-\mathbf{j}\theta}(\mathbf{j}^2 = 0)$ egységvektorral végezhető transzformáció. Végül a legnagyobb hibája **Hestenes** következtetéseinek az, hogyha a lehetséges eredményekben figyelembe vette volna a komplex számokkal leírt forgás-művelet *téridőbeli* jellegét, akkor rá kellett volna jönnie, hogy a fénysebesség állandóságának feltételét csak a **Lorentz** transzformáció teljesíti a többi feltételnek egyébként eleget tevő lineáris transzformációk; az $e^{-\mathbf{i}\theta}$, $e^{-\mathbf{k}\theta}$ és természetesen az $e^{-\mathbf{j}\theta}$ segítségével leírható függvények között.

Nagyon érdekes és elgondolkodtató a GA-kban az r-vektorok szerepe, melyek r-dimenziós irányított térfogat megfelelői. A GA eszköztárában viszont problémásnak tartom a skalár elem szerepét, pontosabban a GA-kal leírt időfogalom ambivalens jellegét. Nevezetesen a **Minkowski** négydimenziós téridő-vektorban az idő ortogonális a térelemekre, így a $GA_{1,3}$-mal modellezett téridőben is, a GA_3-ban leírt téridőben viszont a GA_3 skalár-eleme reprezentálja az időt. Így arra következtethetünk, hogy míg a GA a tér-elemeket igen használható módon kezeli, ugyanakkor az idő-fogalom hiányosan, vagy inkább ellentmondásosan reprezentált benne. Persze már az is nagy szó, ha egy matematikai rendszerben van egyáltalán időnek megfeleltethető elem.

A kételemű számok – komplex, parabolikus és hiperbolikus számsíkok – óriási folyományának tartok két dolgot:

- A téridő modellezésében betöltött szerepüket, azaz alkalmasságukat arra, hogy e

---

le. Ezzel szemben az említett szerzők az aktív transzformációt preferálják, mely ugyanabban a koordinátarendszerben – vagy anélkül – írja le egy (vagy több) objektum téridejének változását. Erre jó lehetőséget kínálnak a komplex és a hiperbolikus számok, hiszen velük alapművelet szinten írhatóak le mozgások; körmozgás és **Lorentz** transzformáció. Viszont a koordinátaszintű leírást ezzel sem kerüljük el, hiszen a hiperbolikus és a komplex számokban – talán egy kicsit rejtve – ott a koordináta-jelleg. Ez például az (1) és az (5) egyenletekben is tetten érhető.

[21] Lásd ehhez *„A Clifford algebra, a geometriai algebra és a kételemű számok”* című cikk 4. pontját; http://www.infinitemath.hu/matematika/332-a-clifford-algebra-a-geometriai-algebra-es-a-ketelemu-szamok

számsíkok valós számtengelye az időt, képzetes számtengelye egy térdimenziót képes modellezni.

- Egyúttal használhatóak arra, hogy a végtelen-fogalom egy speciális aspektusát visszatükrözzék; mégpedig a kontinuum hipotézist (CH), illetve annak alternatíváit.[22]

A GA-k ezeket a fontos összefüggéseket csak a kételemű számok használatán keresztül tudnák tükrözni, de erre a fentiek alapján nagyon korlátozottan képesek. E hiányosság egyik oka lehet az, hogy míg a GA térvektorokból generált, addig a kételemű számok a valós számok – tehát az időfogalom modelljének – végtelen kiterjesztéséből származtatja a képzetes elemeket, tehát a térfogalom modelljét.

Amint többször megfogalmaztam már; a fizika és általában a természettudományok számára a legalkalmasabb matematikai eszközt egy olyan többelemű számfogalom felfedezésében látom, melynek alapelemei a kételemű számok. A GA-k, és általában a **Clifford** algebrák előfutárai egy ilyen számrendszernek, de még nem az igazi megoldások.

[22] Ehhez ajánlom „A kiválasztási axióma és a kontinuum hipotézis” című cikket; http://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/150-a-kivalasztasi-axioma-es-a-kontinuum-hipotezis

1. Melléklet

Pauli algebra és mátrixok

A spin kvantumelméletében használta elsőször **Pauli** a róla elnevezett márixokat ábrázolóeszközként, és csak később fedezték fel a CA-val, majd később a GA-val való kapcsolatait ennek a leírásnak. E felismerések ellenére még ma is egy izotér elnevezésű absztrakt tér izovektoraiként tekintenek a **Pauli**-mátrixokra. Ezért érdemes megtekinteni, milyen egyszerűen reprezentálhatóak a **Pauli**-mátrixok a GA_3 elemeivel.

A GA_3-ban a háromdimenziós tér ortogonális bázisvektorainak (e_1, e_2, e_3) geometriai szorzatára a következő igaz általánosan:

$$e_i e_j = e_i \cdot e_j + e_i \wedge e_j = \delta_{ij} + I\epsilon_{ijk}e_k \tag{M1}$$

ahol δ a Kronecker delta, *I* a pszeudoskalár, azaz $I=e_1e_2e_3$ és $I^2=-1$, ϵ_{ijk} pedig a *permutációs* – más elnevezéssel *Levi-Civita* – szimbólum, amire

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & ha\ i = j, j = k, vagy\ k = i \\ +1 & ha\ (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & ha\ (i,j,k) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \end{cases}$$

A térnek ezt a geometriai algebráját, azaz a GA_3-nak a mátrix reprezentációját adják a **Pauli** mátrixok.

A **Pauli** mátrixok a következők:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{M2}$$

Ezek a mátrixok kielégítik az alábbi egyenletet:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathrm{I} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{M3}$$

ahol δ a Kronecker delta, I a 2x2-es egységmátrix, i a komplex képzetes egység és ϵ_{ijk} a permutációs szimbólum.

(M1) és (M3)-ból következik, hogy a két ábrázolás kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egymással, tehát az algebrák izomorfak.

2. Melléklet

Gamma vagy Dirac mátrixok, Dirac algebra

Sokféle ábrázolása van a Dirac algebrának. Klasszikusan a következő mátrixokat hívják **gamma** vagy **Dirac** mátrixoknak:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{M4}$$

γ^0 az időszerű mátrix, a másik 3 a térszerű mátrixok, és a következő tulajdonsággal bírnak:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}I_4 \qquad \mu,\nu = 0, 1, 2, 3$$

Ahol $\eta^{\mu\nu}$ a **Minkowski** metrika (+ – – –) szignatúrával, és I_4 a 4x4-es egységmátrix.

Ezek a mátrixok egy valós **Clifford** algebra $CA_{1,3}$ mátrix-reprezentációi.

3. Melléklet

A Lorentz transzformáció ábrázolása a XX. században[23]

A. Einstein koordináta-szintű leírása

Az inerciarendszerek között a Lorentz-féle transzformációval leírt tér- és időkoordináták átszámításában a következő szorzószám szerepel:

$$\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ahol v a két rendszer egymáshoz viszonyított sebessége, és c a fénysebesség.

Így ha egyetlen térkoordinátát és az időkoordinátát tekintjük, akkor a v sebességgel mozgó inerciarendszerben a koordináta-transzformáció a következő:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(M5)}$$

Pontosabban:

$$x' = \frac{x - \frac{v}{c}tc}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(M6)}$$

B. Hiperbolikus függvények alkalmazása

Mélyebb elemzés helyett hivatkozom **Taylor-Weeler** *„Téridő-fizika”*[24] című könyvére, melyben nagyszerűen levezetik a szerzők, és a geometriáját is jól szemléltetik a **Lorentz** transzformációnak, mely sokkal szemléletesebb alakba hozható hiperbolikus függvények használatával. Így a koordinátákra a következő összefüggést kapjuk:

---

[23] Ez a **Melléklet** *„Az idő, a tér és a végtelen”* című cikkem 3. pontjának kissé módosított változata; http://www.infinitemath.hu/images/stories/time_v51.pdf

[24] Lásd például: http://books.google.hu/books?id=9KfpAy3zEZkC&printsec=frontcover&dq=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&hl=hu&sa=X&ei=_cPhT6PaEcWr-gbBxOCcAw&ved=0CDkQ6wEwAA#v=onepage&q=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&f=false

$$x' = x\ \cosh\Theta - ct\ \sinh\Theta$$

(M7)

$$ct' = ct\ \cosh\Theta - x\ \sinh\Theta$$

Ahol Θ-ra az igaz, hogy

$$\tanh\Theta = \frac{x}{ct}\left(= \frac{v}{c}\right) \qquad \text{(M8)}$$

Az (M5)-ös képletek egy kicsit elrejtik, az (M7)-es egyenletekből viszont egészen jól *látható* a transzformáció jellege: **a koordinátatranszformáció egy hiperbolán való forgatást jelent, azaz hiperbolikus forgatást**. Ez a **hiperbolikus forgatás viszont nem térbeli, hanem téridőbeli**!

C. Hiperbolikus számok használata a téridő leírására

A fentiek nyílegyenest elvezethettek volna a hiperbolikus számok[25] használatához, mégis elég sok idő telt el, amíg a szakirodalomban megjelenik a használatuk.

A hiperbolikus számok azok a számok, melyek

a + b**k**

alakban írhatók fel, ahol ’a’ és ’b’ valós számok, **k**-ról pedig csak annyit tudok, hogy nem egyenlő ±1-gyel, de $\mathbf{k}^2$ =+1.

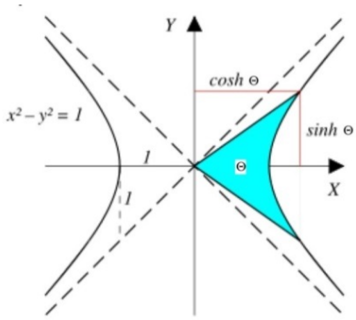
Ezek a számok[26] a komplex számokhoz hasonlóan egy számsíkon ábrázolhatók, és a komplex számok trigonometrikus alakjához nagyon hasonló alakban írhatók fel:

$$a + bk = \sqrt[2]{a^2 - b^2}\ (\cosh\Theta + \boldsymbol{k}\sinh\Theta)$$

Ahol Θ -ra az igaz, hogy

$$\tanh\Theta = \frac{b}{a}$$

E számkörben azok a számok, amelyekre $\sqrt[2]{a^2 - b^2} = \rho$ egy olyan derékszögű – más szóval egyenlő szárú – hiperbolán helyezkednek el, mely a számsík vízszintes, azaz a valós számokat tartalmazó tengelyét a ±ρ pontban metszik. Ha ρ^2=1, akkor az úgynevezett egységhiperbolán helyezkednek el:



[25] Vagy más néven perplex számok, Lorentz-számok, (angolul még split-complex numbers) és sok más elnevezés bizonyítja, hogy lassan alakult ki az egységes elnevezésük.

[26] A szakirodalomban az általam **k**-val jelölt számra sokféle jelölést használnak, például i-t a komplex képzeteshez hasonlóan, vagy h-t, feltehetően a hiperbolikus jellegre utalva. Én azért jelöltem k-val, mert a -1 gyökét jelölő ’i’ betűt az ábécében a ’j’ és a ’k’ követi, így arra gondoltam, hogy $\mathbf{i}^2\mathbf{=-1}$, $\mathbf{j}^2\mathbf{=0}$, $\mathbf{k}^2\mathbf{=1}$ könnyen megjegyezhető jelöléssel sorolja fel az „ijk” kételemű számok képzetes elemeit.

Ezekre a számokra is lehet exponenciális függvényt definiálni, és ezzel a komplex számokhoz ismét csak nagyon hasonló exponenciális alakra hozni a hiperbolikus számokat:

$$a + bk = \rho\, e^{\Theta \boldsymbol{k}}$$

Ahol

$$\rho = \sqrt[2]{a^2 - b^2} \quad \text{és} \quad \tanh \Theta = \frac{b}{a}$$

A hiperbolikus számok legfontosabb tulajdonságai megtalálhatóak a *Kételemű számok összehasonlítása* című cikkemben[27].

Itt két nagyon fontos tulajdonságát emelném ki a hiperbolikus számoknak:

- Két hiperbolikus szám szorzásakor – a fenti egyenletekben alkalmazott jelöléseket használva – a ρ-k szorzódnak, és a Θ-k összeadódnak, azaz a **hiperbolikus számok szorzásának egy olyan geometriai transzformáció felel meg, ahol a hiperbolikus forgatást nyújtással kombináljuk**, hasonlóan a komplex számokhoz, ahol a szorzás képe körön való forgatás és nyújtás. **Ez a hiperbolikus forgatás épp a Lorentz transzformációnak felel meg, ha a teret egy dimenzióra szűkítem.**
- A fenti ábra I. sík-negyedében[28] ρ-ra – a komplex számsíktól *eltérően* – a következő háromszög-egyenlőtlenség igaz:

$$\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{z+v}} \geq \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{v}}$$

Egy korábbi cikkemben[29] már tárgyaltam a **Lorentz** transzformáció leírását hiperbolikus számokkal. A hiperbolikus számok eddig bemutatott tulajdonságai alapján már magától értetődő a modell. Az M7-es egyenletben ct-nek a hiperbolikus számsík valós tengelyét, x-nek pedig a hiperbolikus képzetes tengelyt feleltetjük meg, azaz a valós tengely az időnek, a hiperbolikus képzetes tengely pedig az egyik térdimenziónak a modellje. Ekkor a megfigyelő és a hozzá képest v sebességgel mozgó inerciarendszerbeli téridőpontok (események) viszonyára a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} x' + \boldsymbol{k}y' &= (x \cosh \Theta - y \sinh \Theta) + \boldsymbol{k}(y \cosh \Theta - x \sinh \Theta) \\ &= (x + \boldsymbol{k}y)(\cosh \Theta - \boldsymbol{k} \sinh \Theta) = (x + \boldsymbol{k}y)e^{-\Theta \boldsymbol{k}} \end{aligned} \qquad M8$$

ahol $\tanh \Theta = \frac{v}{c}$

Tehát a **Lorentz** transzformációnak a hiperbolikus számsíkon egy szorzás a megfelelője, mégpedig az eredeti számpont (téridő esemény) és a v/c meredekségű egységvektor konjugáltjával való szorzás.

---

[27] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/15-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-alap-tulajdons%C3%A1gainak-%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.html

[28] Azaz olyan hiperbolikus számokra, melyeknél a+bk esetén a≥0 és a>b.

[29] Lásd „*A szimplektikus teve „természetes előfordulásai" II.*" című cikket; http://www.infinitemath.hu/images/stories/skalar_szorzat_ii_v2.pdf

Irodalom

1. **David Hestenes,** „Space–Time Algebra”
2. **David Hestenes**, „*New Foundations for Classical Mechanics*”
3. **David Hestenes**, “*Proper particle mechanics*”; http://geocalc.clas.asu.edu/pdf-preAdobe8/Proper_mechanics.pdf
4. **Chris Doran** & **Anthony Lasenby,** „*Geometric Algebra for Physicist*”
5. **Stephen Gull, Anthony Lasenby, Chris Doran**, „*Imaginary Numbers are not Real — the Geometric Algebra of Spacetime*”; http://geometry.mrao.cam.ac.uk/wp-content/uploads/2015/02/ImagNumbersArentReal.pdf
6. **Chris Doran**, **Anthony Lasenby**, **Stephen Gull**, **Shyamal Somaroo** and **Anthony Challinor**, „*Spacetime Algebra and Electron Physics*”; https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0509178.pdf
7. **William E. Baylis**, „*Electrodynamics – A Modern Geometric Approach*”
8. **W. E. Baylis**, **J. Huschilt**, and **Jiansu Wei**, „*Why i?*”; http://www.stat.physik.uni-potsdam.de/~pikovsky/teaching/stud_seminar/ajp_i.pdf
9. **Garret Sobczyk**, „*New Foundations in Mathematics – The Geometric Concept of Number*”
10. **Garret Sobczyk**,”*A complex gibbs-heaviside vector algebra for spacetime*”; http://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=12&page=407
11. **Garret Sobczyk**, „*Special relativity in complex vector algebra*”; https://arxiv.org/pdf/0710.0084.pdf
12. **Garret Sobczyk**, „*Geometry of Moving Planes*”; https://arxiv.org/pdf/0710.0092.pdf
13. **William E. Baylis** and **Garret Sobczyk**, „*Relativity in Clifford’s Geometric Algebras of Space and Spacetime*”; https://arxiv.org/pdf/math-ph/0405026.pdf
14. **James M. Chappell**, **John G. Hartnett**, **Azhar Iqbal**, **Nicolangelo Iannella**, **Derek Abbott**, „*A brief study of time*”; https://arxiv.org/pdf/1509.06707.pdf
15. **James M. Chappell**, **Azhar Iqbal**, **Nicolangelo Iannella**, **Derek Abbott**, „*Revisiting Special Relativity: A Natural Algebraic Alternative to Minkowski Spacetime*”; https://arxiv.org/pdf/1106.3748.pdf