Egy univerzális valószínűségszámítás felé
I. rész

Bevezetés

Andrei Khrennikov kontextuális valószínűsége és a kétrés kísérlet

Korábbi írásaimban[1] többször hivatkoztam **Andrei Khrennikov** cikkeire, amelyekben a kvantumfizika valószínűségszámításon alapuló matematikáját taglalva eljut a hiperbolikus valószínűség gondolatához. Ez formailag a komplex számok hiperbolikus számokra való cseréjét jelenti a matematikai modellekben, így például a **Hilbert** tér formalizmusában.[2] Érdekesek a szerzőnek azok a cikkei, amelyekben a hiperbolikus valószínűségek használhatóságának lehetőségeit vizsgálja, de most azokra az írásaira szeretnék reflektálni, amelyekben arra keres választ, hogy miképp jelenik meg a komplex és a hiperbolikus számok használata a kvantummechanika valószínűségszámítást alkalmazó modelljeiben. Egyfajta kontextusfüggő szemléletben lel megoldásra, amely tulajdonképpen a klasszikus feltételes valószínűségnek felel meg.[3] Már a kvantumfizika kialakulásakor nagy figyelmet kaptak a méréseknél a kísérleti körülmények, azaz a vizsgálatok kontextusai, például **Niels Bohr** komplementaritási elve is ennek jegyében született. A kontextus függőség azonban nem fogalmazódott meg korrekt matematikai modellben, **Khrennikov**ot idézve:

> *„Az egyik probléma pusztán matematikai jellegű volt. A **Kolmogorov** 1933-ban axiomatizált rendszerén alapuló standard valószínűségi formalizmus fix kontextus formalizmus volt. Ez a hagyományos valószínűségi formalizmus nem biztosít szabályrendszert a különböző kontextusokra kiszámított valószínűségekre. Márpedig a kvantumelméletben a fizikai állapotok, kontextusok különböző összességeihez kapott statisztikai adatokkal kell dolgoznunk. Valójában a valószínűségek kontextusfüggését, mint a szuperpozíció elvének eredetét már **Werner Heisenberg** is felvetette; sajnos csak nagyon általános és meglehetősen filozófiai keretben.”*[4]

---

[1] Lásd például a „*Széljegyzetek **Andrei Khrennikov** hiperbolikus kvantummechanikájához*” című cikket; http://www.infinitemath.hu/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanikajahoz

[2] Lásd például **Andrei Khrennikov** „*Hyperbolic quantum mechanics*” című írását; https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0101002.pdf

[3] Példaként **Andrei Khrennikov** néhány cikke;
„*'Quantum probabilities' as context depending probabilities*”; https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0106073.pdf ,
„*Contextual viewpoint to quantum stochastics*”; *https://arxiv.org/pdf/hep-th/0112076.pdf* ,
„*Local Realism, Contextualism and Loopholes in Bell`s Experiments*”; *https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0212127.pdf*

[4] **Andrei Khrennikov**, „*Contextual viewpoint to quantum stochastics*”; *https://arxiv.org/pdf/hep-th/0112076.pdf*

> *“One of problems was of purely mathematical character. The standard probabilistic formalism based on Kolmogorov's axiomatics, 1933, was a fixed context formalism. This conventional probabilistic formalism does not provide rules of operating with probabilities calculated for different contexts. However, in quantum theory we have to operate with statistical data obtained for different complexes of physical conditions, contexts. In fact, this context dependence of probabilities as the origin of the superposition principle was already discussed by W. Heisenberg; unfortunately, only in quite general and rather philosophic framework.”*

1. Khrennikov kontextualizmusa

Khrennikov kezdetben a **Heisenberg-Dirac** féle kontextualizmusra alapozta a valószínűségek ábrázolását, azaz a fizikai rendszer „erő-szerű” megzavarását és **Richard von Mises** frekventista[5] valószínűségelméletét használta.[6] Később a valószínűségi modell **Bohr**-féle kontextuális megközelítéséből indul ki a szerző, azaz egyfajta *tapasztalati geometriát* alkalmaz.[7] Egy példával illusztrálva a gondolatmenetet; a kétrés kísérlet leírásában a nyitott két rés esetében kapott képet az egy nyitott rés esetén keletkező adatok statisztikus összegzéséből eredezteti, egyfajta *egyensúlyi valószínűség* (*balance probability*) fogalmának bevezetésével. Az egyensúlyi feltétel azt jelenti, hogy a két rés nyitottsága esetén az érzékelő ernyőn észlelhető részecskék száma egyenlő az egy-egy rés nyitottsága esetén észlelhető részecskék elemszámainak összegével (*átlagosan*). **Khrennikov** a kontextualizmusában az általa bevezetett egyensúlyi valószínűséget nem is nevezi kulcsfontosságúnak, mert a lényegi elemnek a *teljes valószínűség* formalizmusát tartja.[8] A teljes valószínűség képletében az egymást kizáró és teljes eseményrendszert alkotó események valószínűségét értelmezi **Khrennikov** az általa bevezetett egyensúlyi valószínűségnek. Így lényegében a két rés nyitottsága esetén az érzékelő képernyő valamely pontjára jutó részecskék valószínűségét az egyenként nyitott rések esetén számolt valószínűségeknek az egyensúlyi valószínűséggel súlyozott összegeként értelmezi, amely egyben súlyozott átlag is, hiszen az egyensúlyi valószínűségek összegét egynek feltételezi. Végül megjegyzi, hogy statisztikai adatokat alkalmazva sérül a teljes valószínűségre felírt egyenlőség, és az interferenciát a statisztikai eltérések mértékeként írja le. (Ennek részleteit lásd **Andrei Khrennikov**, *„Contextual viewpoint to quantum stochastics”* című írásának 3. pontjában.[9]) Az eltérési faktort normalizálva a statisztikai adatok relatív eltérése adódik, amely vagy kisebb-egyenlő vagy nagyobb-egyenlő eggyel, így ezek reprezentálhatóak lesznek egy koszinusz, illetve egy hiperbolikus koszinusz függvény értékével. Ezzel máris eljut a szerző a klasszikus kvantummechanika, illetve a hiperbolikus kvantummechanika valószínűségi képleteihez.[10]

---

[5] **Richard von Mises** frekventista valószínűségelmélete a relatív gyakoriságon alapszik. **Von Mises** tagadja a valószínűségelmélet mértékelmélet jellegét, ellenben azt egyfajta gyakorlati tudománynak tartja. Véleményem szerint sok igazság van ebben, de nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy a kezdetben empirikus tudományok – például a geometria – idővel egzakt elméleti tudománnyá váltak a gyakorlati tapasztalatok axiómaként történő megfogalmazásával.

[6] Lásd például: **Andrei Khrennikov**, *„Linear representations of probabilistic transformations induced by context transitions”;* https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0105059v2.pdf

[7] Példaként két cikket említve: **Andrei Khrennikov**;
„‘Quantum probabilities’ as context depending probabilities”; https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0106073.pdf ,
„Contextual viewpoint to quantum stochastics”; https://arxiv.org/pdf/hep-th/0112076.pdf

[8] Zavaró, hogy miközben a *„Contextual viewpoint to quantum stochastics”* cikkében **Khrennikov** arról ír, hogy elhagyta a **von Mises** féle frekventista megközelítést, addig ugyanebben a cikkben bevezetett egyensúlyi valószínűség részleteire vonatkozóan a *„Linear representations of probabilistic transformations induced by context transitions*” cikkre hivatkozik, amelyben viszont frekventista interpretáció szerepel. Ez utóbbi írásában **Khrennikov** lándzsát is tört a valószínűség frekventista megközelítése mellett, de az e szemlélettel szemben támadt előítéletek miatt **Von Mises** *kollektíva* (*collective*) fogalmának megfelelőjeként az *együttes* (*ensemble*) kifejezést használja. Megjegyzem, hogy **Von Mises** relatív gyakoriságon alapuló megközelítése megkerülhetetlen, ha a valószínűségszámítás bármely formáját a gyakorlatban akarjuk használni. Maga **Kolmogorov** is használja *„A valószínűségszámítás alapfogalmai*” című alapművében a „tapasztalati adatokhoz való viszonyról” szóló fejezetben, ahol így fogalmaz: *„A valószínűségszámítás valódi események körére való alkalmazhatóságához szükséges előfeltevések kifejtésében nagymértékben építünk Mises következtetéseire, különösen a következő munkájára: R. von Mises Das Verhältnis der Theorie zur Erfahrungswelt.”*

[9] *https://arxiv.org/pdf/hep-th/0112076.pdf*

[10] Lásd ehhez az 1. lábjegyzetben megnevezett cikket.

Megjegyzés

Ha a relatív eltérési faktor értékét háromféleképpen különböztetné meg Khrennikov: kisebb egynél, egyenlő eggyel, illetve nagyobb egynél, akkor az *egyenlőség* esete a *parabolikus* koszinusz függvény értékével lenne reprezentálható, – ami azonosan egyenlő eggyel – és ezzel eljutna a klasszikus mechanikához.

Az így kapott valószínűségi képlet megegyezik az úgynevezett koszinusz tétellel (pontosabban a paralelogramma szabállyal[11]). Ennek a szabálynak a megfelelői mindhárom kételemű számsíkon léteznek, és formailag azonosak is a koszinusz függvénytől eltekintve, pontosabban az adott számsíkon értelmezett koszinusz függvényt használva:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\,\mathrm{COS}(\Theta_1 - \Theta_2) \qquad (1)$$

Ahol P_1, P_2, $P=P_1+P_2$, – az adott számsíknak megfelelő komplex, parabolikus vagy hiperbolikus – számvektorok, $(\Theta_1 - \Theta_2)$ a számvektorok argumentumainak különbsége, a COS pedig a koszinusz függvények megfelelője az adott számsíkon, azaz koszinusz a komplex számsíkon, hiperbolikus koszinusz a hiperbolikus számsíkon, valamint parabolikus (duális) koszinusz a parabolikus (duális) számsíkon.

Ezzel eljuthatunk a hullámmechanika klasszikus formalizmusához is az (1) alak következő átalakításával[12]:

$$|P|^2 = \left||P_1| + e^{\delta\Theta}|P_2|\right|^2 \qquad (2)$$

Ahol $\Theta = (\Theta_1 - \Theta_2)$ és $P=P_1+P_2$, P_1, P_2 komplex, parabolikus vagy hiperbolikus szám attól függően, hogy $\boldsymbol{\delta}$ a komplex, parabolikus vagy hiperbolikus képzetes egység, azaz $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ amelyekre $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$.

Így a kontextuális modell – miközben nem használta fel a hullámtulajdonságokat a kétrés kísérlet matematikai leírásánál – átalakítható a hullámmechanika formalizmusára.

2. Hogyan tovább?

Összegezve a fentieket; **Khrennikov** kontextuális valószínűsége megegyezik a **Kolmogorov-**matematika teljes valószínűséget leíró formalizmusával, kiegészítve a statisztikus adatok okozta eltérési összetevővel. Következésképpen ez a megközelítés a statisztikus adatokra való áttérésben látja a klasszikus és kvantum valószínűségek eltérésének okát, és egyfajta mérési hibaszázalékkal indokolja az eltérési faktor megjelenését. Egy koszinusz függvény jól meghatározott szabályszerűséget mutat az eltérési faktorra vonatkozóan, ezért felmerül a gyanú, hogy sokkal inkább a matematikai módszer vagy a fizikai jelenség magyarázatának hiányossága okozza az eltérés megjelenését.[13] Ez ugyan csak sejtés, az viszont valóban fogyatékossága a módszernek, hogy nem magyarázza a komplex, a hiperbolikus vagy a klasszikus (parabolikus) jellegét az eltérésnek. A kételemű számok téridő- és speciális végtelen-értelmezése segíthet abban, hogy ezt az eltérési faktort másképp, – reményeim szerint – a maga valójában értelmezzük.

---

[11] A paralelogramma szabályban a koszinusz tételhez képest a koszinusz függvényben szereplő szög az utóbbi kiegészítő szöge, így a függvényérték előjele ellentétes a koszinusz tételbelihez képest.
A koszinusz tétel szerint: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$
A paralelogramma szabály szerint $c^2=a^2+b^2+2ab\cos(\gamma')$

[12] Ehhez is lásd az 1. lábjegyzetben megnevezett cikket.

[13] Ez a gyanakvás még azzal együtt is indokolt, hogy a koszinusz függvényt mi magunk vezettük be az eltérési faktor normalizálása után a tapasztalatok ismeretében.

Ha a teret egy dimenzióra szűkítjük, akkor a téridőnk a hiperbolikus számsíkkal modellezhető, ahol a valós számegyenes az időt, a képzetes tengely a teret reprezentálja. A tér és az idő viszonya azonban más is lehet; a kételemű számok közül nemcsak a hiperbolikus, de a komplex és a parabolikus számok valós és képzetes része is modellezhet egyfajta téridő viszonyt, amely számsíkokon a tér másképp „görbül” az időhöz képest.[14] Így azzal magyarázhatom a klasszikus valószínűségtől eltérő – kételemű számokkal való – újfajta leírását a valószínűségeknek, hogy valószínűség alapfogalma az *esemény*[15] téridő-elem, valószínűsége is téridő-jellemzőkkel bír. Így a komplex, a hiperbolikus vagy a klasszikus (parabolikus) jellegű eltérési faktorok különböző téridő-geometriát sejtetnek.

Mielőtt a konkrét modellre rátérnék meg kell említeni a valószínűségszámítás elméletében és a gyakorlati példákban megjelenő – ugyanakkor nem tudatosított, és így pontosan figyelembe nem vett – tér- és időelemeket. A relatív gyakorisággal definiált valószínűség a legjobb példa erre, hiszen ott az esemény *időben* ismétlődően zajlik, viszonylag azonos térben. Ha precízebben akarnék fogalmazni, akkor azt mondanám, hogy a valamilyen szempontból azonos tulajdonságú esemény-sokaság egy tág *idő-intervallumban* helyezkedik el, míg ezen események „tér-koordinátái” konstansok. A valószínűségszámítás azonban foglalkozik olyan esemény-sokasággal is, amelynek egy adott időpillanatban a térbeli előfordulása (gyakorisága) az érdekes. A kétrés kísérlet mindkettőre vizsgálható. A legismertebb eset az, amikor az interferencia-képet egy részecske- vagy hullámnyaláb igen rövid idő alatt „rajzolja ki” az észlelő képernyőn. Ekkor rendkívül rövid idő alatt nagyon sok kvantum (pl. foton, elektron) halad át a két résen és ütközik az ernyőnek. A másik eset pedig az, amikor a nyaláb méretét annyira lecsökkentem, hogy egy időben csak egy részecske hagyja el a „kvantum-ágyút”, így a kvantumok – bár időben egyenként, egymás után – de egy hosszabb időtartam alatt már hatalmas sokaságban érik el az észlelő képernyőt. Az interferencia-kép ekkor is létrejön. Ezt az esetet szokták nagyon sokan úgy értelmezni – szerintem tévesen – hogy a kvantumok önmagukban is interferálnak, illetve – ami ezzel ekvivalens – hogy egy kvantum mindkét rés felöl éri el detektor-felületet.

A fenti két eset annyiban hasonló, hogy a kvantumok hatalmas sokasága[16] érkezik az észlelő berendezésbe, annyiban viszont eltérnek, hogy az első esetben a sokaság kvázi egyidejű térbeli tömeget jelent, míg a második esetben a sokaság csak időben elválasztott kvantumokból áll, mielőtt

---

[14] Olyan gömbfelületeken, melyeknek görbülete képzetes egység – azaz g=**i**, **j**, **k**, ahol $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$ – a geometria hiperbolikus, euklideszi, illetve gömbi. Ezek a klasszikus geometriák azonban nem a téridőt modellezik, hanem kizárólag térbeli viszonyokat írnak le. A téridő kételemű számokkal való modellezése azonban hangsúlyosan a *tér* és az *idő* közötti viszonyt érzékelteti. A képzetes görbületű térbeli gömbök példája sugallhatná azt, hogy képzetesekhez rendeljem az időt, és a valósokhoz a térdimenziót. Sokan helyeselnék ezt azok közül, akik az időt nem, csak a teret tartják „valóságosnak”. Ezt a számomra „fordított világot” azonban több okból is elvetettem; például a kételemű számoknak a kontinuum hipotézis és alternatíváiból való heurisztikája miatt, vagy például azért, mert az antianyag modellezése sok mindent megmagyaráz – sőt eddig nem igazolt tulajdonságára is sejtést fogalmaz meg, azaz falszifikálható –, ha az antianyagnak az anyagtól való távolságnégyzetét, tehát egy tértávolság-négyzetet negatívnak tekintek. Még ennél is egyszerűbben fogalmazhattam volna; hiszen a speciális relativitáselmélet a térbeli sebességre állítja, hogy az nem lehet nagyobb a fénysebességnél; ezt modellezve – és a teret egy dimenzióra szűkítve – a hiperbolikus számsíkon kézenfekvő, hogy az egyenesek meredeksége a $\frac{v}{c}-t$ reprezentálja, azaz a képzetes tengely a tér és a valós tengely a fénysebességgel szorzott idő ábrázolója, hiszen $\frac{v}{c}=\frac{vt}{ct}=\frac{s}{ct}$.

[15] Az *esemény*t **Kolmogorov** a valószínűségszámítás axiómáiban nem jellemzi semmivel, pontosabban a halmazelmélet alapfogalmaira alapozza mind az eseményeket, mind a közöttük definiált műveleteket. (Ehhez lásd a **Melléklet**et, amely a **Kolmogorov** által párhuzamba állított halmazelméleti és valószínűségszámítási fogalmakat mutatja be.) Ebben a klasszikus megközelítésben a halmaznak megfelelő esemény-fogalom túl általános ahhoz, hogy egyedi tulajdonságait, például a térrel és idővel, azaz a téridővel való szoros kapcsolatát tükrözné.

[16] Fontos megjegyezni, hogy a kvantumok sokaságának *mértéke*, tehát a sugárnyaláb intenzitása lényeges tényező, mivel már *egy* rés nyitottsága esetén is elmossa az érzékelt „szemcsésséget” – azaz a sugárnyaláb kvantumos jellegét – ha túl nagy az intenzitás.

a képernyőt elérné. Bár **az első esetben az időjellemzők, a második esetben a térjellemzők elhanyagolhatóak, fontos megjegyezni, hogy nincs olyan esemény, ami ne téridőben zajlana. Amennyiben ezt nem vesszük figyelembe, akkor esetleg épp a klasszikus és a kvantummechanikai leírás különbségét ignoráljuk**.

Saját megközelítésem annyiban azonos **Khrennikov**éval, hogy egyrészt fontosnak tartom a statisztikus sokaság jelenlétét, másrészt feltételezésem szerint egy kvantum vagy az egyik résen megy át, vagy a másikon, azaz kizárom az önmagával való interferálás lehetőségét. Annyiban viszont eltérő az elképzelésem, hogy nem egy, a statisztikus átlagolásból származó hibatagban látom a speciális koszinusz elemek megjelenésének okát.

Egyszerűsítve a problémát, megelégedhetnék azzal az állítással, hogy egy esemény téridő-jellege miatt a rá vonatkozó valószínűségi állítások sem eredeztethetőek időbeli (vagy térbeli) relatív gyakoriságokból, hanem téridőbeli relatív gyakoriságra kell mindenkor gondolnunk. Ennek következtében a relatív gyakoriság is téridő-elem, azaz kételemű számokkal jellemezhető, és akként kell a valószínűség absztrakt fogalmát is bevezetnem. Ebből pedig triviálisan következik a valószínűségszámítás háromfelé ágazása; komplex (kvantummechanikai), parabolikus (klasszikus) és hiperbolikus valószínűségre. Ez a „megoldás” azonban nem kielégítő; több szempontból sem ad megnyugtató választ. Egyrészt a relatív gyakoriság téridő-jellege homályos, pontosítani kellene, mit értünk alatta, másrészt **Khrennikov** kontextuális valószínűségéhez hasonlóan ez az elképzelés sem magyarázza a háromféle valószínűségi modell eltérésének az okát.

3. Feynman a kétrés kísérletről

Mielőtt rátérnék egy részletesebb – és nagyon remélem; – elfogadható modell körvonalaira, vázolni szeretném a kétrés kísérlettel kapcsolatos tapasztalatokat. Mivel ilyen jellegű kísérleteket nem végezhettem, ezért egy számomra megbízható forráshoz, **Feynman**hoz fordulok. Egyetemi hallgatóknak szánt jegyzetében[17], az optikáról szóló részben **Feynman** három gondolatkísérlettel[18] jellemzi a kétrés kísérletek interferencia-tapasztalatait:

1. **Anyagi lövedék**ekkel végezve a kísérletet, két nyitott rés esetén nem alakul ki interferencia. A két rés egyikén-másikán áthaladó golyók valószínűségei független eseményként klasszikus módon összegezhetőek: $P=P_1+P_2$.

   Feynman megjegyzése ehhez

   Ha minden anyag mozgását hullámfogalmakkal írnánk le, akkor az anyagi lövedék példájában olyan parányi hullámhosszakra gondolhatunk, amelyeknél az interferenciasávok annyira elkeskenyednek, hogy egy fizikai detektor nem tudja megkülönböztetni a minimumokat és a maximumokat, így az általa jelzett képen nem jelennek meg a valószínűségi görbe cikk-cakkjai, csak a klasszikus sima valószínűségi grafikon.[19]

---

[17] Magyarul; **R. P. Feynman – R. B. Leighton – M. Sands**, *Mai Fizika*, 3. kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969., 143-155. oldal

[18] Nem szeretem a gondolatkísérleteket, mert szerintem nem sokkal többek egy hipotézisnél. Itt mégis ezekre támaszkodom a **Feynman** iránt érzett bizalmamon túl azért, mert az általa leírtaknak megfelelő kísérletek mindegyikét megvalósították már a gyakorlatban, és az eredmények azonosaknak bizonyultak a gondolatkísérletben ábrázoltakkal. **Koltai János** az ELTE-n 2017. március 9-én tartott *Kvantumradír-kísérlet* című előadásának 17:17 időpontjában egy olyan táblázatot mutat be, amely a különböző objektumokkal elvégzett kétrés kísérletek időpontjait tartalmazza. Itt látható, hogy elektronokkal csak 2013-ban tudták pontosan megismételni a **Feynman** által kigondolt kísérletet, de ugyanebben az évben hatalmas, 810 atomot tartalmazó molekulákkal is megismételték. A tapasztalatok pedig minden esetben fényesen igazolták **Feynman** leírását. (https://www.youtube.com/watch?v=v7RBDnpCeII)

[19] Puskagolyókra nem találtam számításokat, de az interneten megtalálható –

2. **Vízhullámok**kal végzett kísérletnél két nyitott rés mögött interferencia tapasztalható a hullámzásra merőleges mérőeszközön, amely a hullám „intenzitását” méri. Már az intenzitás szóból sejthető, hogy itt a komplex számok nagyon hasznosak az eredő hullámerősség kiszámításakor:

   $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi$, ahol I, I_1, I_2 komplex számok abszolút-értékeinek négyzetei. és a hullám intenzitását jelölik.

3. Az **elektron**-kísérletben egy elektronágyú és detektorként hangszóró szerepel **Feynman** leírásában. Nyitott rés(ek) esetén a hangszóró egy kattanással jelzi, ha elektron ér az adott pontba. Az elektronágyú működése közben a hangszóró kattanásait számolva csaknem azonos számot kapunk azonos időtartam alatt és meghatározott helyzetű hangszórónál. Így beszélhetünk a kattanások „átlagos gyakoriságáról”. Következőképpen a rések közötti középponttól mért x távolságra lévő hangszóróból mért kattanások átlagos számával mérhető a viszonylagos valószínűsége annak, hogy ide elektron érkezik. Két rés nyitottsága esetén itt is interferencia tapasztalható, és matematikai leírása megegyezik a vízhullámok esetén tapasztaltakkal, azzal a különbséggel, hogy ott a komplex számok csak matematikai fogás a leírás egyszerűsítésére, míg az elektronkísérletben – és általában a kvantummechanikában – a komplex számok használata elkerülhetetlen.

   Ellentmondáshoz juthatunk, ha az elektron részecske-jellegéből azt feltételezzük, hogy az elektron vagy az egyik résen halad át a detektorokig, vagy a másikon. Ebből a feltevésből és az elektronágyú stabil, egyenletes működéséből, valamint a berendezések (elektronágyú, rések) elrendezésének szimmetriájából az következne, hogy két rés nyitottsága esetén *egy adott pontban* az észlelt elektronok átlagos száma megközelítőleg egyenlő azzal az összeggel, amit úgy kapunk, hogy összeadjuk az egy-egy nyitott rés esetén jelzett átlag elektronszámot az adott pontra vonatkozóan. Az interferencia-képet adó kísérlet azonban ezt cáfolja. **Khrennikov**hoz hasonlóan **Feynman** sem tartja reális képnek az önmagukkal interferáló kvantumokat, de **Khrennikov**tól eltérően **Feynman** a mérési módszerek változtatásával, finomításával próbál magyarázatot találni. Az elektron megfigyelését egy, a két rés közé helyezett erős fényforrással oldja meg. Kihasználva azt, hogy az elektromos töltések szórják a fényt, megfigyelhetővé válnak az elektronok útban a detektor felé. A fényforrás elhelyezkedése miatt a fényvillanás helye alapján eldönthető, hogy az elektron melyik résen haladt át. A kísérlet tapasztalatai alapján egyetlen dupla felvillanás sem fordul elő, tehát az elektron mindig csak az egyik résen halad át. Ugyanakkor a fényfelvillanást kísérő kattanások eloszlása már nem mutat

---

http://www.askamathematician.com/2010/12/q-can-you-do-the-double-slit-experiment-with-a-cat-cannon/ linken – található egy számítás, amelyben kiscicákra végezték el a kétrés kísérlet „méretezését” **Schrödinger** kiscicájának tisztelegve. E méretezés eredményeképpen egy 0,1 m méretű tárgy esetén az érzékelő képernyőnek az univerzumunk méreténél több nagyságrenddel nagyobbnak kellene lennie, nem is beszélve arról, hogy 10^{36} darab objektumra (kiscicára) lenne szükség a kísérlethez. Ezt a tréfás gondolatkísérletet is az előző lábjegyzetben említett előadásból ismertem meg, **Koltai János**nak köszönhetően. Nem tudom megjegyzés nélkül hagyni a „kiscicás” méretezés leírásának végén található elmélkedést arról, hogy a kétrés kísérleteknél szükséges, hogy a részecskék azonos fázisban legyenek, különösen akkor, ha nagyon rövid hullámhosszú a részecske. A **Bose-Einstein** statisztikával jellemezhető bozonok, azaz például a fotonok esetén ez sokkal könnyebben megoldható, hiszen nagyon nagy számban kerülhetnek azonos kvantumállapotba, sőt ez a jellegzetességük. A fermionoknál azonban a **Pauli**-féle kizárási elv ezt tiltja. Nem ragozom tovább a problémát, mert szerintem fel sem merülhet ez a nehézség, amikor az interferenciát időben egymásután haladó egyes részecskék okozzák. Ha pedig az egyik esetben nem feltétel a „bozonikus” jelleg, akkor a másikban, azaz közel azonos időben a detektorokhoz érkező részecskéknél sem fontos ez a szempont az interferenciánál. (Ez a gondolatsorom azt feltételezi, hogy egy részecske nem interferál önmagával.) Természetesen kell lennie valamiféle koherenciának az interferáló részecskék között, és ez az összetartozás – vagy összefonódás, aminek sokan nevezik – nyilván kapcsolatban áll azzal, hogy ugyanazon forrásból származnak a kvantumok. Az összefonódásról már sokat írtam a „kvantummacskákról” szóló írásaimban, és ennek a cikknek a folytatásaiban is ki kell térnem majd a mibenlétére.

interferenciát, azaz az elektronok megfigyelése azzal jár, hogy eltűnik az interferencia-kép. Magyarázat lehet erre, hogy a fény olyan erős hatással van az elektronra, hogy ez az effektus kitörli az interferenciát.

- Ennek a fényhatásnak a redukálására először a fény intenzitásának csökkentésével tervezhető kísérlet. A tapasztalat az, hogy ekkor a felvillanások erőssége nem változik, de időnként a detektor-jelzés nem jár együtt fényfelvillanással, mivel a fény intenzitását csökkentve nem a fotonok nagyságát, hanem kibocsátásuk gyakoriságát változtattuk meg. Ennek a kísérletnek az adatfeldolgozása azzal az eredménnyel zárul, hogy a megzavart – fényfelvillanással kísért – elektronok eloszlása nem mutat interferenciát, de az észre nem vett – azaz fényfelvillanással nem kísért – ugyanakkor kattanást okozó elektronok eloszlásának interferencia-képe van!
- A fényhatás kisebbítésére a fény intenzitása helyett a fény frekvenciájának csökkentése a logikus következő lépés, feltételezve, hogy a „lágyabb” fény már nem zavarja meg túlságosan az elektronokat. A hullámhossz lassú emelésével kezdetben nem történik változás, de amikor a hullámhossz nagyobbá válik a rések távolságánál, akkor drasztikus fordulat következik be; a fénynek az elektronon való szóródásakor egyetlen nagy összefolyó felvillanás látható, ami alapján nem dönthető el, hogy az elektron melyik nyíláson ment keresztül. Ezzel együtt a detektorok által rajzolt kép kezd hasonlítani az interferencia-képhez. A két nyílás távolságánál jóval nagyobb hullámhossznál már határozott interferencia-képet kapunk, ugyanakkor a fényfelvillanások úgy elmosódnak, hogy semmiképpen nem mondható meg, hol ment át az elektron. Az elektronok tehát ezeknél a frekvenciáknál már nincsenek túlságosan megzavarva, de az áthaladásra használt résre vonatkozó információ is eltűnik.

Alig olvastam olyan írást a kétrés kísérletről, amelynek az írója ne tartotta volna meglepőnek, zavarba ejtőnek a tapasztaltakat; azt, hogyha nem tudjuk, mely résen ment át a kvantum, akkor megjelenik az interferencia-kép, ha viszont ismerjük a kvantum útját, akkor az interferencia eltűnik. Ezek a megfogalmazások azonban félrevezetőek. Helyesebb, ha egyelőre úgy fogalmazunk, hogy nem tudjuk a kvantumok útját azok megzavarása nélkül megfigyelni.

(*Folytatása egy következő cikkben*)

Melléklet

Az alábbi idézet **Kolmogorov** *„A valószínűségszámítás alapfogalmai”*[20] című művéből való, ahol Ω azon ω elemek halmaza, amelyeket elemi eseményeknek nevezünk, a nagybetűvel jelöltek pedig Ω részhalmazai.

Halmazelméletben	*Véletlen eseményekre*
1. A és B diszjunktak, azaz $AB = \emptyset$.	1. A és B események kizárják egymást.
2. $AB \ldots N = \emptyset$.	2. $A, B, \ldots, N$ események kizárják egymást.
3. $AB \ldots N = X$.	3. X esemény valamennyi $A, B, \ldots, N$ esemény egyidejű megvalósulásából áll.
4. $A \cup B \cup \ldots \cup N = X$.	4. X esemény $A, B, \ldots, N$ események legalább egyikének a bekövetkezését jelenti.
5. $\bar{A}$ komplementer halmaz.	5. $\bar{A}$ az A esemény be nem következését jelentő ellentett esemény.
6. $A = \emptyset$.	6. A lehetetlen esemény.
7. $A = \Omega$.	7. A-nak szükségszerűen be kell következnie.
8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok $\mathfrak{A}$ rendszere az Ω halmaz *felbontása*, ha $$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega,$$ ahol feltesszük, hogy az A_i halmazok páronként diszjunktak. (A + jelet csak diszjunkt halmazok egyesítésére fogjuk használni.)	8. Az $\mathfrak{A}$ *kísérlet* abból áll, hogy megállapítjuk: az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül melyik következik be; ebben az esetben $A_1, A_2, \ldots, A_n$-t az $\mathfrak{A}$ kísérlet lehetséges kimeneteleinek nevezik.
9. B az A részhalmaza: $B \subseteq A$.	9. B esemény megvalósulásából szükségszerűen következik A megvalósulása.

[20] **A. N. Kolmogorov**, *A valószínűségszámítás alapfogalmai*, Hungarian translation © **Zibolen Endre**, Typotex, 2010, 17. oldal.