A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen

1. A végtelen és a kételemű számok

Korábban már kapcsolatot találtam a kételemű számok, és a végtelen egy speciális értelmezése között. Ezt kétféleképpen tettem meg:

1.1. A végtelenről másképp – heurisztikus megközelítéssel[1]

A negatív számok gépi ábrázolása adta az ötletet, hogy a végtelen nagy számokat a valós tört számok helyiértékes számábrázolásához hasonlóan írjam fel, például egy speciális végtelen szám a következő helyiértékes alakban írható fel a tízes számrendszerben:

…999 (1)

Azaz a **…999** szám esetében megszámlálhatóan sok 9 szerepel az egész számok ábrázolására használt helyiértékeken a 10-es számrendszerben.

Mit tudunk elmondani erről a fenti végtelen nagy számról? Mindenekelőtt azt, amit a valós ’–1’-ről, azaz

…999^2=1 (2)

A fenti egyenlőséget az ember idegenkedve nézi, hiszen azt kaptuk, hogy egy végtelen nagy szám négyzete véges nagy. Ez hasonlóan értelmezhető, mint a gépi számítások során az un. túlcsordulás jelensége. Mondhatjuk, hogy a (2) egyenletet egy szorzáskor előfordult „túlcsordulás” magyarázza, mely akkor áll elő, ha a számábrázolás nem terjed ki az un. transzfinit – azaz minden természetes számnál nagyobb – *helyiértékeken* való számábrázolásra. **Cantor** fogalmait használva ez az a végtelen, amit 10^{μ} formában írhatok fel, ahol μ a természetes számok számossága, azaz olyan végtelen, melynek helyiértékes ábrázolásában a sorrendben 10^{μ}-dik helyiértéken értékes, azaz nem 0 számjegy áll. Ugyanakkor lehetnek olyan végtelen nagy számok, melyek minden természetes számnál nagyobbak, de kisebbek a transzfinit helyiértékeken is értékes – azaz nem 0 – számjegyeket is tartalmazó számoknál. Ezen számok egyike a (2) egyenletben megnevezett **…999** szám is, tehát általában azok a számok, melyeknél a transzfinit helyiértéken lévő esetlegesen értékes számjegyekkel nem számolhatok, mert „nincs rá hely” a helyiértékes számábrázolásban, de tetszőlegesen nagy természetes számhoz tartozó helyiértéken van nem 0 számjegyük.

Ebben az értelemben a **…999** nem adható össze a véges természetes számokkal – különben a negatív számokat ábrázolná – ezért egy betűt használok a jelölésére: ’k’.

Ezzel el is jutottam a **hiperbolikus számok**hoz, azaz azokhoz a számokhoz, melyek az alábbi alakban írhatók fel:

$x + y\mathbf{k}$ ahol $\mathbf{k}^2=1$

---

[1] Az itt leírtakat „*Az idő, a tér és a végtelen*” című írásom 4.5 pontjából emeltem át, lásd itt: http://infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/88-az-id%C5%91-a-t%C3%A9r-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html

Így a hiperbolikus számok azt a fajta végtelent modellezhetik, amikor végtelen sok olyan végtelen[2] nagy szám van, amely egyben a 10^{μ} transzfinit számnál kisebb.

A **parabolikus (vagy duális) számok** egy olyan végtelent modellezhetnek, ahol egyetlen olyan végtelen nagy szám van, amely egyben a 10^{μ} transzfinit számnál kisebb. Ezt a számot is el lehet képzelni helyiértékes alakban, mégpedig **…000** formában, ahol a nullák úgynevezett értékes nullák, mivel a helyiértékek transzfinit tartományában vannak nem nulla számjegyek, de ezek ábrázolására „nincs hely” a helyiértékes számábrázolásban. Itt is egyfajta túlcsordulásként képzelem el a **…000** négyzetre emelését, és ezt **…000²=0**-val fejezem ki. Így máris a parabolikus, más néven duális számokhoz jutottunk, ahol

$x + y\mathbf{j}$ ahol $\mathbf{j}^2=0$

A **komplex számok** pedig azt modellezhetik, amikor nincs egyetlen egy végtelen szám sem, amely egyben a 10^{μ} transzfinit számnál kisebb. Ezt a hiányt az egész számokhoz hasonló módszerrel, negatív számmal jellemzem, csak itt egy olyan szám jelzi a hiányt, melynek a négyzete mínusz egy, hiszen a négyzetre emeléssel tudom megjeleníteni a „túlcsordulást”. Hangsúlyozom, hogy ennél a modellnél is van végtelen nagy szám, de azok a – helyiértékesen nem ábrázolható – transzfinit tartományba tartoznak. Ennél a modellnél a *hiány* tehát kizárólag a transzfinit és a tetszőlegesen nagy, de véges természetes számok közötti végtelenekre vonatkozik.

Az extenzív végtelenek esetéhez hasonlóak mondhatók el az intenzív végtelenről is. Ekkor olyan parányok létezéséről beszélünk – nevezzük őket transzfinit törteknek – melyeknél a törtszámok helyiértékeinek transzfinit tartományában is értékes, azaz nem 0 számjegyek szerepelnek, de ezek ábrázolására a helyiértékes ábrázolásban nincs hely. Másképp megfogalmazva a 0,999… < 1,000… számtartományban *léteznek* számok, de ezek ábrázolására nincs hely a megszámlálhatóan sok tört helyiértéken. Erre a számhalmazra ugyanaz mondható el, mint amit fentebb a …999 számról állítottam, azaz: $0{,}999\ldots^2 = 1$. Tehát **az intenzív végtelenek felöl is eljuthatok a hiperbolikus számokhoz.** A $0{,}999\ldots^2 = 1$ egyenlőség itt is furcsának tűnhet: hogyan lehet egy egynél kisebb szám négyzete 1-gyel egyenlő. A magyarázat hasonló, mint a $\ldots999^2 = 1$ esetén; itt az aktuálisan végtelen transzfinit parányok „hatása” *nagyítódik fel*, és jelenik meg az eddig már jól ismert valós számok körében.

Így akár az extenzív, akár az intenzív értelemben aktuálisan létező végtelen nagyok és végtelenül kicsiny parányok egy speciális fajtájának, vagy éppen ezek hiányának a modellezésére alkalmasak a kételemű számok. Azt mondhatjuk, hogy ezek a modellek **nem tesznek különbséget a végtelen extenzív és intenzív volta között**, a végteleneknek azt a tulajdonságát ábrázolják, melyek megfogalmazásai a kontinuum hipotézis és annak kétféle tagadása.

1.2. A homogén koordinátákkal megjelenített végtelen

Ha a klasszikus számegyenesemet – mely a valós számokat ábrázolja – végtelen távoli pontokkal egészítem ki és ezeket a pontokat homogén koordinátákkal definiálva írom le, akkor a kételemű számokhoz jutunk. A projektív geometria szóhasználatát követve a (szám)egyenes végtelen távoli pontjait ideális (szám)pontoknak is fogom nevezni.

[2] A „végtelen nagy” itt azt jelenti, hogy minden n természetes számnál nagyobb számról van szó.

A kételemű számok síkjain a számok polárkoordinátás alakjához a következő módon jutunk:

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (3)$$

Ahol **δ = i, j, k** (**i**^{2}**=–1, j**^{2}**=0, k**^{2}**=1**) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus**, vagy **hiperbolikus** számról van szó.

Az (3) egyenletben felírt alak szinte „kiált” egyfajta homogén koordinátarendszerbeli ábrázolásért. A homogén koordináták haszna pedig épp az, hogy a végtelen távoli pontokat véges koordinátákkal fejezzük ki. A kételemű számok tiszta képzetes részének végtelen-értelmezése is pontosan ezt teszi: a végtelent véges „koordinátájú” számponttal jellemzi.

A homogén koordinátára való áttérés gondolata a következő. A (3) egyenletben a komplex számoknál bevezetve az $\frac{y}{x} = \mathbf{tg}\varphi$, a parabolikus számoknál az $\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$, a hiperbolikus számoknál pedig az $\frac{y}{x} = \mathbf{th}\tau$ függvényeket. Ekkor

$$z = x(1 + \mathbf{i}\tan\varphi) \qquad (4)$$

$$z = x\left(1 + \mathbf{j}\frac{y}{x}\right) \qquad (5)$$

$$z = x(1 + \mathbf{k}\tanh\tau) \qquad (6)$$

A függvények argumentuma egyedül a parabolikus esetben – (5) egyenlet – egyezik meg a függvényértékkel. Ezt az esetet általánosítva azt mondom, hogy az argumentumnak megfelelő számegyenesbeli ponthoz az origóra illeszkedő sugársornak azt az elemét rendelem, melynek meredeksége az argumentumhoz tartozó függvényértékkel egyenlő.

Így a homogén koordinátákra való áttéréssel mindhárom számsíkot olyan számegyenesként értelmeztük, melyek tartalmazzák a végtelen nagy, azaz ideális számpontokat is a parabolikus és a hiperbolikus esetben, illetve annak hiányát a komplex számok esetén. A fentieket részletesebb áttekintését *„A kételemű számok, mint homogén koordinátával leírt számegyenesek”* [3] című cikk tartalmazza.

2. A végtelen és a geometriai algebra

A geometriai algebrában nem-igen foglalkoznak az egy dimenziós vektorok által generált geometriai algebrával, mondván, hogy túl szűkös a geometriai struktúrájuk.[4] Nagy hiba így vélekedni, hiszen a kételemű számok épp ezeket a geometriai algebrákat reprezentálják.

[3] Lásd: http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/176-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-mint-homog%C3%A9n-koordin%C3%A1t%C3%A1val-le%C3%ADrt-sz%C3%A1megyenesek.html

[4] Lásd például **Stephen Gull**, **Anthony Lasenby**, **Chris Doran** *„Imaginary Numbers are not Real — the Geometric Algebra of Spacetime”* című cikkében a 7. oldalon a 2.4 pont első mondatát. http://geometry.mrao.cam.ac.uk/wp-content/uploads/2015/02/ImagNumbersArentReal.pdf

2.1. A komplex és hiperbolikus számok, mint kétdimenziós Clifford algebrák – példa a szakirodalomból

Stefan Ulrych egy 2007-ben írt cikkében (*"Representations of Clifford algebras with hyperbolic numbers"*[5]) bemutatja, hogyan jutunk a hiperbolikus és a komplex számsíkhoz, ha egydimenziós kvadratikus térből generálom a **Clifford** algebrát. A parabolikus (vagy duális) számsík nála is "mostohagyerek", pedig ez a legegyszerűbb esete a Clifford algebra generálásának egydimenziós kvadratikus térből.

Összefoglalom, miképp jut el Ulrych a kételemű számokhoz. Általánosságban elmondható, hogy a **Clifford** algebrát egy kvadratikus formával felszerelt vektortér generálja. Ulrych egy szimmetrikus skalárszorzattal ellátott valós lineáris teret feltételez véges dimenzióval; jelölésben: $\mathbf{R}^{p,q}$, ahol a skalárszorzat – a szerző jelöléseit megtartva – a következő:

$$(x,y) = -\sum_{1\le i\le p} x_i y_i + \sum_{1\le j\le q} x_{p+j} y_{p+j} \tag{7}$$

A Clifford algebrában a kvadratikus formát a fenti skalárszorzatból képezve:

$$(x,x) = x\bar{x} \tag{8}$$

ahol $\bar{x}$ az x konjugáltját jelöli, mely azt jelenti, hogy a tér egy ortonormált bázisával leírva a vektort, a konjugáltjában a báziselemek előjelet váltanak. Így minden e_i báziselemre, ahol $1\le i\le n$ és $n=p+q$:

$$e_i\bar{e_i} = -e_i^2 \tag{9}$$

A báziselemek kölcsönösen antikommutatív elemei a Clifford algebrának:

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad ha \quad i \neq j \tag{10}$$

és négyzetük –1, 0, vagy 1 lehet.

Megjegyzés

Egyelőre azt gondolom, hogy a legutóbbi állítás a fizikában való használhatóságot célozza, de matematikailag csak az 1. pontban leírtak „magyarázzák”. Természetesen elegendő a fizikában való használhatóság is, hiszen ekkor a matematikában axiómaként mondható ki az állítás.

A kvadratikus $\mathbf{R}^{p,q}$ tér által generált algebra jelölése: $\mathbf{R}_{p,q}$. Az $\mathbf{R}_{0,1}$ és $\mathbf{R}_{1,0}$ algebrák az egydimenziós $\mathbf{R}^{0,1}$ és $\mathbf{R}^{1,0}$ kvadratikus terek által generáltnak tekinthetők. Egy eleme ezeknek a tereknek z=xe, ahol e az egyetlen báziselem, x pedig tetszőleges valós szám. A kvadratikus forma ennek alapján:

$$z\bar{z} = -x^2e^2 \tag{12}$$

Az (1,0) szignatúrájú kvadratikus tér esetén $e^2=1$, (0,1) szignatúránál pedig a báziselem négyzete $e^2=-1$ a (7) egyenletből adódóan. Mindkét esetben a Clifford algebrának két algebrailag különálló eleme van, a báziselem, és az egységelem, így ezeket az algebrákat a kétdimenziós hiperbolikus és a komplex számok reprezentálják.

---

[5] Lásd http://arxiv.org/pdf/0707.3981v2.pdf

Megjegyzés

Itt már valóban matematikailag is következik, hogy az egységelemek négyzeteire 1 illetve –1 adódik a fenti egyenletekből.

***A parabolikus számok is származtathatóak a (7) egyenlettel magadott skalárszorzattal ellátott valós lineáris egydimenziós térből**, melyet jelöljünk $\boldsymbol{R}^{0,0}$-val. Legyen ugyanis $\boldsymbol{R}^{0,0}$ **olyan kvadratikus egydimenziós tér, melyben a skalárszorzat azonosan nulla minden vektorra**. Azaz, ha ennek a térnek egy eleme z=xe, ahol e az egyetlen báziselem, x pedig tetszőleges valós szám, akkor a kvadratikus forma $\boldsymbol{z\bar{z}} = -\boldsymbol{x^2 e^2} \equiv \boldsymbol{0}$ minden x-re. Ebből adódóan $\boldsymbol{e^2=0}$. Ebben az esetben is a Clifford algebrának – jelölve $\boldsymbol{R}_{0,0}$ – két algebrailag különálló eleme van, a báziselem, és az egységelem, és **ezt az algebrát a kétdimenziós parabolikus – más néven duális – számok reprezentálják**.*

2.2. A rejtőzködő végtelen

A fentiekből látható, miképp reprezentálják a kételemű számok a kvadratikus formával ellátott egydimenziós térből generált kétdimenziós Clifford algebrát. Elmondhatjuk, hogy **a geometriai algebra legegyszerűbb, egydimenziós vektorok által generált fajtái egyáltalán nem szegényes szerkezetűek, hanem igen izgalmas alapstruktúrát mutatnak a komplex, a parabolikus és a hiperbolikus számok formájában**. A kételemű számok viszont a végtelen egy speciális – a kontinuum hipotézissel kapcsolatos – fajtáját modellezik, így azt lehet mondani, hogy a geometriai algebra térelemei is az ilyen jellegű végtelent mintázhatják. Nagyon fontos az a modellbeli megfeleltetés is, miszerint e kétdimenziós Clifford algebrában a skalár-elem az idődimenzió megfelelője a hiperbolikus számok fizikában betöltött „szerepe” alapján. Így azt mondhatjuk, hogy **az egydimenziós térelem, mely a fenti geometriai algebrát generálja, nem más, mint az algebra skalárelemének végtelennel való kiterjesztése**. Hangsúlyozom, hogy ez a végtelen-fogalom a kontinuum hipotézis tagadásával definiálható végtelennel azonos.