Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása

A két probléma megoldásának kulcsa

„A matematika tudománya véleményem szerint egy oszthatatlan egész, egy organizmus, amelynek életereje a részei összekapcsolódásától függ.”
(**David Hilbert**)[1]

Amint ismeretes, 1900-ban egy matematikai kongresszuson **David Hilbert** összefoglalta a matematika akkor még megoldatlan legfontosabb problémáit, szám szerint 23-at[2]. E listán szereplő kérdések státuszát a mai napig nagy figyelem kíséri. Az elmúlt több mint száz év alatt jó néhányat megoldottak közülük, de vannak olyanok is, amelyek máig megoldatlanok, illetve olyanok is, amelyekkel kapcsolatban sok részmegoldás született, de összességükben még megoldatlanok, vagy vitatott a megoldásuk.[3] Ez utóbbiak közé tartozik **Hilbert** listáján az 1-es és a 6-os probléma.

1. Hilbert 1-es problémája, a kontinuumhipotézis és jelenlegi státusza

Nagyon egyszerű megfogalmazásban a kontinuumhipotézis azt állítja, hogy a valós számok számossága – azaz a kontinuum számosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. **Georg Cantor** eredetileg a valós számok számegyenesére vonatkozóan fogalmazta meg a sejtését: a valós számok halmazán (a számegyenes pontjain) egy tetszőleges számhalmaz (ponthalmaz) számossága vagy véges/végtelen megszámlálhatóan sok vagy kontinuum végtelen.

Hilbert ennek a hipotézisnek a bizonyítását elsőrendű fontosságúnak tartotta, és a problémák között elsőként szerepeltette.

Georg Cantor naiv halmazelméletét **Zermelo-Fraenkel** axiomatikus halmazelmélete (ZF) tette ellentmondásmentessé. **Hilbert** problémájára fontos választ adott **Kurt Gödel** és **Paul Cohen** a XX. század közepe táján, bizonyításaik alapján tudjuk, hogy kontinuumhipotézis konzisztens és független, azaz az állításnak sem a ZF-hez való hozzátétele sem az állítás tagadásának hozzáadása nem okoz ellentmondást. Ugyanez igaz a kiválasztási axiómára is. A geometria párhuzamossági axiómájához hasonlóan tehát ebben a ZF rendszerben is van eldönthetetlen állítás, mégpedig a ZF-et kiegészítő, és egymással szoros kapcsolatban álló kiválasztási axióma és a kontinuumhipotézis. A

[1] Lásd **David Hilbert**. *„Mathematical problems”*, 30. oldal; *„Mathematical science is in my opinion an indivisible whole, an organism whose vitality is conditioned upon the connection of its parts.”*
http://www.ams.org/journals/bull/2000-37-04/S0273-0979-00-00881-8/S0273-0979-00-00881-8.pdf
[2] Lásd például az 1. lábjegyzetbeli forrást.
[3] Az angol Wikipedia szócikke táblázatban közli a 23 probléma státuszait:
https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems , melynek magyar verziója kevésbé friss és tartalmas, de a lényegi elemeket tartalmazza.

kiválasztási axióma és a kontinuumhipotézis (CH) kapcsolatáról *„A kiválasztási axióma és a kontinuumhipotézis”* [4] című cikkemben írtam, elsősorban azt kiemelve, hogy a kiválasztási axióma következik a globális kontinuumhipotézissel[5] (GCH) kiegészített ZF-ből (ZFGCH-ból). Így a GCH-t kellene „útelágazásnak” választani, amelynek különböző variánsait csatolva a ZF-hez a kiválasztási axióma eltérő változatai következnének, és ezzel különböző axiomatizált halmazelméletekhez jutnánk.

Visszatérve **Hilbert** első problémájára, felmerül a kérdés, hogy ezek után miért tekintik csak részben megoldottnak ezt a problémát. **Totik Vilmos** következő megfogalmazása jól tükrözi a kontinuumhipotézis jelenlegi státuszával kapcsolatos általános véleményt. «*Jegyezzük meg, hogy Gödel és Cohen eredményei nem válaszolják meg a kontinuum kérdését: ma sem tudjuk, hogy igaz-e a kontinuum-hipotézis (az általunk használt “standard” számegyenesen); csak az derült ki, hogy ez logikailag eldönthetetlen a többi axiómából (azaz vannak olyan “nemstandard” számegyenesek, amelyeken igaz a kontinuum-hipotézis, meg vannak olyanok is, amelyeken nem igaz; de ez nem válaszolja meg azt a kérdést, hogy a “standard” számegyenesen igaz-e).*»[6].

2. A kontinuumhipotézis-verziók *számszerűsítése*

A kontinuum probléma számszerűsítése nem más, mint a kontinuumsejtés és két másik alternatívájának szám-modellként való megfogalmazása. Az itt következőket már több cikkben kifejtettem, ezért most egy kis ismétlés következik némi rövidítéssel.

A megoldáskeresésben a nemeuklideszi geometriák megjelenéséhez hasonlítanám a kontinuumhipotézissel kapcsolatban felmerült kérdéseket. A geometriában létezik a párhuzamossági axiómával, illetve alternatíváival ekvivalens állítás, amely a háromszögek szögösszegeire[7] vonatkozva *számszerűsíthetően* ellenőrizhetővé teszi, hogy egy *adott tér* a geometriák melyikébe tartozik. A nemeuklideszi geometriával kapcsolatban már **Gauss** és **Bolyai** is felvetette a *valós tér* tulajdonságának meghatározását a térbeli háromszögek szögösszegeinek megmérésével, sőt **Gauss** méréseket is végzett erre vonatkozóan. Tulajdonképpen ez az igény merül fel a kontinuumhipotézissel kapcsolatban is, hiszen a számegyenes éppúgy a valós tér egyeneseinek absztrakciója, amint a geometria egyenesei és háromszögei, a valós számok pedig az egyenes szakaszainak mértékéül szolgálnak. **Hilbert** kontinuumhipotézis megfogalmazásában[8] is azonos értelemben használja a számokat és a számegyenes pontjait. Kívánatos lenne tehát egy olyan *számszerű* állítás, amely ekvivalens a kontinuumhipotézissel és alternatíváival, és a valós terünkben (egy valós egyenesen) ellenőrizhető, *mérhető* összefüggésként fogalmazná meg a kontinuumhipotézis igaz, vagy hamis voltát az adott esetben. Ez a kívánalom egyben túlmutat a valós terünkre vonatkozó kíváncsiságon, mivel tulajdonképpen **Karl Popper**

---

[4] Lásd: https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/150-a-kivalasztasi-axioma-es-a-kontinuum-hipotezis

[5] Míg a CH a következő: $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, ahol $\aleph_0$ a természetes számok számosságát, $\aleph_1$ pedig a kontinuum számosságot jelöli, addig a globális kontinuumhipotézis a következő: $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$, $\alpha = 1,2,3, \ldots$.

[6] Lásd, **Totik Vilmos**, *Lehetetlen*, Természet Világa, 1998. III. különszám, Matematika, 87–92. oldal; http://www.termeszetvilaga.hu/kulonsz/k983/totik3.html

[7] Euklideszi térben a háromszög szögeinek összege 180° (radiánban π), a gömbi geometriában nagyobb ennél, a hiperbolikus geometriában pedig kisebb.

[8] „Every system of infinitely many real numbers, *i.e.*, every assemblage of numbers (or points), is either equivalent to the assemblage of natural integers, 1*;* 2*;* 3*;*… or to the assemblage of all real numbers and therefore to the continuum, that is, to the points of a line; *as regards equivalence there are, therefore, only two assemblages of numbers, the countable assemblage and the continuum*.” (Lásd az 1. lábjegyzetbeli forrást.)

falszifikálhatósági elvárását testesíti meg, azaz a kontinuumhipotézis mérhetően eldönthető, azaz *számszerűsíthetően* eldönthető állításként való megfogalmazását tartja szükségesnek.

2.1. A végtelenről másképp[9] - a helyiértékes számábrázolás segítségével

A negatív számok gépi ábrázolása adta az ötletet, hogy a végtelen nagy számokat a valós törtszámok helyiértékes számábrázolásához hasonlóan írjam fel, például egy speciális végtelen szám a következő helyiértékes alakban írható fel a tízes számrendszerben:

…999 (1)

Azaz a **…999** szám esetében megszámlálhatóan sok 9 szerepel az egész számok ábrázolására használt helyiértékeken a 10-es számrendszerben.

Mit tudunk elmondani erről a fenti végtelen nagy számról? Mindenekelőtt azt, amit a valós '–1'-ről, azaz

$\mathbf{\ldots 999}^2=1$ (2)

Mondhatjuk, hogy a (2) egyenletet egy szorzáskor előfordult „túlcsordulás" magyarázza, amely akkor áll elő, ha a számábrázolás nem terjed ki az un. transzfinit – azaz minden természetes számnál nagyobb – *helyiértékeken* való számábrázolásra. Fogalmazhatok úgy is, hogy ezek azok a számok, amelyeknél a transzfinit helyiértéken lévő esetlegesen értékes számjegyekkel nem számolhatok, mert „nincs rá hely". A „nincs rá hely" magyarázatául szolgálhat az, hogy mennyiségi aktuális végtelent nem tapasztalunk a valóságban, így a helyiértékes számábrázolásomat is csak potenciálisan végtelen *helyiértékekre* terjesztem ki az egész számokra vonatkozóan.

A **…999** nem adható össze a véges természetes számokkal a klasszikus összegzési szabályt követve – különben a negatív számokat ábrázolná – ezért egy betűt használok a jelölésére: '**k**', és vele a következő számokhoz jutottam:

$x + y\mathbf{k}$ ahol $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$ és x, y valós számok (3)

Ha y>0, akkor ezek olyan számok, melyek a kontinuum soknál kisebbek, de minden természetes számnál nagyobb számokat reprezentálnak, azaz a természetes számoknál nagyobb számosságot jelölnek. Ezzel eljutottam a kontinuumhipotézis egyfajta tagadásának számszerűsített modelljéhez, ugyanakkor nem más ez a számkör, mint a **hiperbolikus számok** halmaza. **Így a hiperbolikus számok azt a fajta végtelent modellezhetik, amikor végtelen sok olyan végtelen nagy[10] szám van, amely egyben a $10^{\aleph_0}$ transzfinit számnál kisebb.**

A **parabolikus (vagy duális) számok** egy olyan végtelent modellezhetnek, ahol egyetlen olyan végtelen nagy szám van, amely egyben a $10^{\aleph_0}$ transzfinit számnál kisebb. Ezt a számot is le lehet írni helyiértékes alakban, mégpedig **…000** formában, ahol a nullák úgynevezett értékes nullák, mivel a helyiértékek transzfinit tartományában lehetnek nem nulla számjegyek, de ezek ábrázolására „nincs hely" a helyiértékes

[9] Az itt leírtakat „*A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen*" című cikk 1. pontjából emeltem át, némi rövidítéssel; (https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/199-a-geometriai-algebraban-rejtozkodo-vegtelen), ami viszont „*Az idő, a tér és a végtelen*" című írásom 4.5 pontjának ismétlése; http://infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/88-az-id%C5%91-a-t%C3%A9r-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html

[10] A „végtelen nagy" itt azt jelenti, hogy minden n természetes számnál nagyobb számról, azaz a természetes számoknál nagyobb számosságról van szó.

számábrázolásban. Itt is egyfajta túlcsordulásként képzelem el a **…000** négyzetre emelését, és ezt **…000**^{2}=0-val fejezem ki. Így máris a parabolikus, más néven duális számokhoz jutottunk, amelyekre

$x + y\mathbf{j}$ ahol $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq 0$ és x, y valós számok (4)

A **komplex számok**, azaz az

$x + y\mathbf{i}$ ahol $\mathbf{i}^2=-1$, és x, y valós számok (5)

alakban felírható számok pedig azt modellezhetik, amikor nincs egyetlen egy végtelen szám sem, amely egyben a $10^{\aleph_0}$ transzfinit számnál kisebb. Ezt a hiányt az egész számokhoz hasonló módszerrel, negatív számmal jellemzem, csak itt egy olyan szám jelzi a hiányt, amelynek a négyzete mínusz egy, hiszen a négyzetre emeléssel tudom megjeleníteni a „túlcsordulást". Hangsúlyozom, hogy ennél a modellnél is *lehet* végtelen nagy szám, de azok a – helyiértékesen nem ábrázolható – transzfinit tartományba tartoznak. Ennél a modellnél a *hiány* tehát a transzfinit és a tetszőlegesen nagy, de véges természetes számok közötti végtelenekre vonatkozik.

2.2. A végtelenről másképp – a projektív geometria módszereivel

A klasszikus számegyenesen a végtelen elemeket homogén koordinátaként definiálva szintén a kételemű számok síkjához juthatunk. A projektív geometria szóhasználatát követve a (szám)egyenes végtelen távoli pontjait ideális pontoknak is nevezhetjük. E geometriák egyike a végtelen távoli pontot nem tartalmazó „klasszikus" (szám)egyenest tartalmazó sík, a másik a projektív geometria, ahol végtelen távoli – pontosabban ideális – ponttal bővített (szám)egyeneseket tartalmaznak a síkok. Végül a harmadik eset a hiperbolikus geometriáé, ahol egy külső pontból a (szám)egyenest nem metsző egyenesekhez rendelhetek olyan végtelen távoli – pontosabban ideális – pontokat, amelyek az adott (szám)egyenesnek is „végtelen-pontjai", hasonlóan a klasszikus projektív geometriához. E geometriák egyeneseit feleltetem meg a háromféle kételemű számsíkkal, mint végtelent tartalmazó „számegyenessel". A megfeleltetések részletesebb leírását a **Melléklet** tartalmazza.

2.3.A számegyenes számbővítései és a CH-alternatívák tanulságai

A CH és alternatíváinak fent említett modell-rendszerében a helyiértékes számábrázolásban rejlő, és eddig kiaknázatlan lehetőséget használtam fel egyfajta extenzív végtelen ábrázolására. Fontos megjegyezni, hogy a végteleneknek ezek a modelljei a törtszámok helyiértékes ábrázolásának a megfelelői a minden természetes számnál nagyobb „egész számokra" vonatkozóan. Mondhatom azt – **Totik Vilmos** kifejezését használva –, hogy a „standard" számegyenesemet oly módon bővítettem, hogy a számpontok valós számokkal való megfeleltetését kiterjesztettem az egész számok tetszőlegesen nagy – de nem végtelen nagy – *helyiértékeire* is, miközben a helyiértékes számábrázolás „szabályait" megtartottam. Így olyan három „számegyeneshez" – számsíkhoz – jutottam, amelynek része a valós számok „standard" számegyenese. Egyúttal ezek a bővített számegyenesek (számsíkok) a CH és két alternatívájának modelljei. Tehát a „standard" számegyenes sem a CH-t, sem annak variációit nem modellezi „önmagában", viszont része a három bővített, CH-t modellező számsíknak, így az abszolút geometria mintájára nevezhetjük „standard" helyett *abszolút*

*számegyenes*nek, mintegy utalva arra, hogy ez a számegyenes mindhárom CH-t modellező számsíknak közös része.

Megjegyzendő, hogy a számegyenes számbővítésének itt vázolt módszere logikailag igen egyszerű, és magától értetődő, de a halmazok jelenlegi axiomatizált rendszereibe kiegészítés vagy módosítás nélkül nem illeszthető. Ennek alapvető oka az, hogy számbővítés azon a tapasztalatunkon alapszik, hogy a végtelen mennyiséget csak potenciálisan létezőnek gondoljuk. Erre utaltam akkor, amikor a helyiértékes számábrázolásban arra hivatkoztam, hogy „nincsen hely" a transzfinit helyiértékeken esetlegesen létező értékes számjegyekre. Több megoldás kínálkozik a számszerűsített CH-alternatíváknak és a meglévő axiómáknak az összehangolására. Az egyik lehetőség az, hogy a jelenleg adott axiómákat változatlanul hagyom, és a GCH-nak, vagyis a globális kontinuumhipotézisnek és alternatíváinak is megfelelő számbővítést alakítok ki. A másik lehetőség az – és én ennek vagyok a híve – hogy a teljes axiómarendszert átalakítom azt a tapasztalatot alapul véve, hogy mennyiségi végtelen csak potenciálisan létezik, aktuálisan nem.[11] Ez a téma azonban túlnő e cikk keretein. Szándékomban áll visszatérni rá a későbbiekben.

Hilbert 1. problémája még ezzel a számszerűsítéssel sem oldódik meg, mert változatlanul fennáll az a kérdés, hogy melyik CH-variáció az „igazi"[12]. A kételemű számsíkok, mint CH-variációk óriási előnye, hogy egyfajta számmodellé alakította a CH-problémát, így a valós fizikai objektumok vizsgálatával eldönthetővé válik, hogy melyik hasznos ezek közül és melyik nem. Ezzel elérkeztünk ahhoz a ponthoz, ahol **Hilbert** 6-os problémájával kapcsolatos eredmények pontot tehetnek a CH-probléma megoldásának a végére.

3. Hilbert 6-os problémája, a fizika axiomatikus matematizálása és mai státusza

Hilbert a geometria példáját hozza fel, amikor egyfajta axiomatizálási igényt fogalmaz meg a fizika azon területein, ahol a matematika fontos szerepet játszik, így például a mechanika és a valószínűségszámítás terén. Amióta ezt **Hilbert** megfogalmazta, azóta a mechanika mellett megjelent a kvantummechanika (QM), és hasonlóan a valószínűségszámításnak is két hasznos ága van; az axiomatizált kolmogorovi valószínűségszámítás és a QM komplex valószínűségi amplitúdókat használó valószínűségszámítása. Ezek egységesítésére még aktív kutatás zajlik, amellyel kapcsolatban érdemes megemlíteni **Andrei Khrennikov** kutatásait; a harmadik valószínűségszámítás; a hiperbolikus valószínűségszámítás megjelenését. **Hilbert** problémafelvetése óta a fizika egyéb területeinek matematizálása is hatalmas eredményeket hozott, például a relativitáselmélet matematikai apparátusát.

[11] Mielőtt valaki idézné **Hilbert** ismert megfogalmazását a cantori végtelenről – *„Senki sem űzhet ki minket abból a paradicsomból, amelyet Cantor teremtett nekünk"* – megjegyzem, hogy sem a végtelen potenciálisra korlátozásával, sem a fenti számmodellel nincs száműzve a végtelen, sőt a fenti helyiértékes ábrázolás alkalmazásakor olyan trükkel élünk, amellyel a potenciálisan végtelen helyiértékek használata aktuálisba emel bizonyos „végtelen" nagy számokat. Ezek a számok mégsem mennyiségi végtelenként „vesznek részt" a műveletekben, hanem „minőségileg" mások a képzetes voltuk miatt. **Ezért nevezem a végtelennek ezt a fajta számábrázolását minőségi végtelennek.** A tapasztalatunknak tökéletesen megfelel ez a fajta végtelen, hiszen mennyiségi végtelent nem észlelünk, de minőségileg különböző létezők sokasága vesz körül bennünket.

[12] Az „igazi" alatt azokat a modelleket értem, amelyeket a tapasztalataink megerősítenek, azaz a való világ valamely rendszerének, vagy jelenségének leírására alkalmasak.

Sokan és sokat írtak **Hilbert** matematikai formalizmusáról, amelyet a legtöbben az axiomatizálásra való törekvéssel és egyfajta pragmatizmussal jellemeztek. Saját értelmezésemben az axiomatizálás azt jelenti, hogy bizonyos tapasztalatokon alapuló, – objektumokról és törvényszerűségeikről szóló – megállapításokat közmegegyezéssel elfogadnak, majd azokon alapuló következtetések halmazával (tételekkel, bizonyításokkal) újabb és újabb megállapításokat tesznek. **Gödel** nemteljességi tétele[13] alapján pedig a kör nem zárul, hanem mindig újra nyílik, azaz minden elég bonyolult axiomatizált rendszer tovább bővíthető egy, a rendszerben sem nem bizonyítható, sem nem cáfolható állítás valamely verziójával. Ezen új állításokkal kapcsolatban ismét felmerül a tapasztalatokkal való egyezés kérdése, így történt ez a geometria párhuzamossági axiómájával és a halmazelmélet kontinuum hipotézisével kapcsolatban is. Ebben a folyamatban benne rejlik a **Hilbert** által zseniálisan a matematikában is felismert dialektika, a formalizmus és a pragmatizmus koegzisztenciája.

A fizika matematikai modelljei ma már hatalmas terepéül szolgálnak a kételemű – komplex, parabolikus (duális) és hiperbolikus – számoknak, tehát azoknak a számoknak, amelyek az előzőekben a kontinuum hipotézis és alternatívái modellezéséül szolgáltak.

Érdekes módon épp a **Hilbert** által axiomatizálni kívánt valószínűségszámításokban jelenik meg mind a három számfajta, a komplex számok a QM valószínűségszámításában, a parabolikus (duális) számokról csak most derült ki, hogy a klasszikus valószínűségszámítás alapelemei[14], és megjelent a hiperbolikus QM lehetősége is, elsősorban **Andrei Khrennikov**nak köszönhetően[15]. **Így fonódik össze Hilbert 1-es és 6-os problémája azzal, hogy egyrészt a CH számszerűsített alternatívái, a kételemű számok nélkülözhetetlenné válnak a fizika matematikai modelljeiben és így az axiomatizálásában is, másrészt e modelleken keresztül nyernek létjogosultságot a CH-alternatívák. Ezzel megoldottnak tekinthető Hilbert 1-es problémája. Kiemelten fontosnak tartom, hogy a Hilbert 6-os problémában nevesített valószínűségszámítás három modellje épp abban különbözik, hogy mely kételemű számot használja valószínűségi amplitúdóul.**

Hilbert 6-os problémáját nem lehet teljes egészében megoldottnak tekinteni, amíg a fizika matematikai modelljei még hiányosak, és nem helyezhető valamennyi axiomatikus alapokra. Fontos azonban, hogy **a Hilbert által is kiemelt valószínűségszámítás mindhárom ága axiomatizálható, és axiómarendszerük közös alapokon nyugszik; a kételeműeket, azaz a CH alternatívákat használó összefüggéseken.**

4. A valószínűségszámítás eseményeinek téridő jellege

Eddig bizonyos szempontból hátránynak gondoltam, pontosabban hiányosnak a halmazelméleti megalapozást a klasszikus valószínűségszámítás axiomatizált

[13] Minden ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó, formális-axiomatikus elméletben megfogalmazható olyan állítás, mely se nem bizonyítható, se nem cáfolható.

[14] Lásd ehhez a „*Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanikajahoz

[15] Többen javasolták már, de elég kevés szó esik az információnak *fizikai* létezőként való kezeléséről és ennek lehetséges matematikájáról. Azért említem itt e témát, mert **Andrei Khrennikov** hiperbolikus kvantummechanikája, és egyúttal hiperbolikus valószínűségszámítása felvetette a kérdést, hogy van-e egyáltalán a fizikának olyan területe, amelyet jellemezhet a hiperbolikus modell, és véleményem szerint ez adhat matematikai keretet egy új, *fizikai* információelméletnek.

kolmogorovi rendszerében, mivel ebben az esemény, mint a valószínűségszámítás alapeleme túl általánosan definiált, hiányzik az események téridő-jellege. Most a kételemű számok CH-modell szerepe miatt viszont nagy előnynek érzem a halmazelméleti alapokat, hiszen a CH-variációk halmazelméleti axiómaként könnyebben beilleszthetőek a valószínűségszámítás meglévő kolmogorovi axiómarendszerébe. Ezzel a kolmogorovi matematika alapjául szolgál majd a ma háromféleképpen megfogalmazott valószínűségszámításnak, a beágyazott CH variációkkal pedig háromfelé ágaztatható egy „abszolút valószínűségszámításnak" nevezhető rendszer a klasszikus kolmogorovi, a QM-beli, és a hiperbolikus valószínűségszámításra.

De menjünk sorjában. Először azt kell belátni, hogyan kerül téridő-elem a valószínűségszámításba.

A valószínűségszámítás eseményei téridő-jellegének bemutatása két lépésben történik; elsőként a kételemű számok szerepét kell megismerni a valószínűségszámításban, másodszor a kételeműek téridőt modellező funkciójának a jelentőségét kell belátni.

4.1. A kételemű számok és a valószínűségszámítás

Korábbi cikkeimben[16] írtam arról a fontos tényről, hogy az egymást kizáró események P_1 és P_2 valószínűségeinek klasszikus összegzési szabálya

$$P = P_1 + P_2 \tag{6}$$

nemcsak a makrovilágban teljesül, de a jelenleg ismert kvantumfizikában, és az **Andrei Khrennikov** hiperbolikus kvantumfizikájában is, ha a P, P_1, P_2 számok nem valós számokat jelölnek, hanem kételeműeket, azaz **komplex számok a QM-ben, hiperbolikus számok a hiperbolikus kvantumfizikában, és parabolikus számok a klasszikus esetben**. Ezt figyelembe véve számítható[17] az (6)-ból az általános valószínűségi összegzés, melyben már valós számokat kapok mindhárom kételemű számsíkon, és ezek az értékek a *mérhető* valószínűséget adják:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\mathrm{COS}\Theta \tag{7}$$

Ahol P, P_1, P_2 kételemű számok, $|\ |$ az adott számsíkon definiált normát jelöli, és Θ a P_1, és P_2 számvektorok által bezárt, az adott számsíkon értelmezett szög, a COS pedig az adott számsíkon értelmezett koszinusz függvény.

4.2. A kételemű számok és a téridő

Elsőként meg kell említeni a fizikának azt a területét, amely a **Hilbert**-problémák megszületésekor még nem létezett, ugyanakkor fontos szerepet fog játszani a fizika matematikai módszertanának axiomatizálásában. Ez pedig nem más, mint **Einstein** speciális relativitáselmélete.

A kételeműek egyikén, a hiperbolikus számsíkon a szorzás művelete a **Lorentz**-transzformációt[18], így a speciális relativitáselmélet alapvető téridő-összefüggését

[16] Lásd például a 14. lábjegyzetben szereplő cikket.

[17] A kételemű számokon, mint számvektorokon alkalmazott paralelogramma szabály felhasználásával adódik az eredmény.

[18] Lásd ehhez *„A téridő geometriai algebrái"* című cikk (https://www.infinitemath.hu/matematika/346-a-terido-geometriai-algebrai) 3. Mellékletét, illetve a *„A szimplektikus teve „természetes előfordulásai" II."* (https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/170-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai-ii) 3.

modellezi, – ha a teret leszűkítem egy dimenzióra –, a parabolikus (duális) számsík pedig newtoni téridő-viszonyt tükröz. Ennélfogva értelemszerűen kínálkozik a feltételezés, hogy a harmadik kételemű számhalmaz, a komplex számsík is modellezhet egyfajta téridő-összefüggést.

Olyan térbeli gömbfelületeken, melyeknek görbülete képzetes egység – azaz a g görbület az **i**, **j**, **k**, valós többszöröse, ahol $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$ – a geometria hiperbolikus, euklideszi, illetve gömbi. Ezek a klasszikus síkgeometriák azonban nem a téridőt modellezik, hanem kizárólag kétdimenziós térbeli, azaz síkbeli viszonyokat írnak le. A téridő kételemű számokkal való modellezése azonban hangsúlyosan a *tér* és az *idő* közötti viszonyt érzékelteti. A képzetes görbületű térbeli gömbök példája – a gömbök képzetes sugara miatt – sugallhatná azt, hogy képzetesekhez rendeljem az időt, és a valósokhoz a térdimenziót. Sokan helyeselnék ezt azok közül, akik az időt nem, csak a teret tartják „valósnak”. Ezt a számomra „fordított világot” azonban több okból is elvetettem; figyelembe véve a nagy-bumm elméletet[19], a kételemű számok által modellezett kontinuum hipotézist és alternatíváit, továbbá az antianyag matematikai modellezhetőségét. Így a valós számegyenest tartom az idővonal modelljének, és a számsíkok képzetes tengelyét a térdimenziónak. A figyelembe vett szempontok indoklását most nem részletezem, van azonban egyéb praktikus oka is a fentieknek, és annak, hogy a fizikusoktól eltérően, és a matematikusokhoz hasonlóan én is „vízszintesen” ábrázolom az időt a valós számegyenesnek megfeleltetve, és „függőlegesen” a teret. A speciális relativitáselmélet a térbeli sebességre állítja, hogy az nem lehet nagyobb a fénysebességnél; ezt modellezve – és a teret egy dimenzióra szűkítve – a hiperbolikus számsíkon kézenfekvő, hogy az egyenesek meredeksége a $\frac{v}{c}-t$, egyfajta *rapiditást* reprezentál, ahol v térbeli sebességet jelöl. Azaz a képzetes tengely a tér, a valós tengely pedig a fénysebességgel szorzott idő ábrázolója, hiszen $\frac{v}{c}=\frac{vt}{ct}=\frac{s}{ct}$.

Tehát a potenciálisan végtelen valós számegyenes, mint *idővonal* minden (idő)pontjában merőlegest állítva az adott (idő)ponthoz („mosthoz”) tartozó *térként* interpretálom a merőleges egyenes pontjait, amelyek a valós számegyenes (idővonal) adott (idő)pontjától 0-nál nagyobb, de minden n-re 1/n-nél kisebb „időtávolságra” vannak. Így tér mintegy „beágyazódik” az idővonal minden időpillanatába.

Ezzel elérkeztünk a CH-val való kapcsolathoz azzal a módosítással, hogy az extenzív végtelenre megfogalmazott CH-t intenzív végtelenre is értelmezzük. **Cantor** nem vitte át az extenzív végtelenben megtett utat az intenzív végtelenre is, azaz nem beszélt olyan parányokról, amelyek kisebbek az 1/n sorozat minden eleménél, de nagyobbak 0-nál. Nem tette ezt meg, mert ezzel megszüntette volna a folytonosság kiforrott, jól használható fogalmát, hiszen ugyanolyan mély szakadék nyílt volna meg az intenzív végtelenben (azaz a számegyenes minden pontjában) is, mint az extenzív végtelenben. Ez az intenzív végtelen kibővítését elkerülő magatartás csak elfedte a problémát, amely a CH-ban is ott lappangott. Megjegyzendő, hogy **Cantor** híres diagonális módszere is csak azért „működik” a valós számok számosságának bizonyításában, mert feltételezi, hogy 0-nál nagyobb, de minden n-re 1/n-nél kisebb szám nem létezik, azaz a tízes számrendszert használva a „0-végű” és a „9-es végű” racionális törtek egyenlők, egyetlen számpéldán bemutatva, például 0,4999…= 0,5000… . **Cantor tehát becsempészte a feltételek közé a kontinuumhipotézisnek az intenzív végtelenre**

oldalán azt, hogy miképpen modellezhető a hiperbolikus számsíkon a **Lorentz** transzformáció.

[19] A nagy-bumm elmélet figyelembe vétele azért szükséges, hogy az „egyidejűség” fogalmának értelme legyen.

megfogalmazott állítását a valós és a természetes számok számosságának összehasonlításakor.

Az intenzív végtelenek bevezetésével a parabolikus és hiperbolikus esetben „szakadozottnak” tűnő számegyenes azonban nem is olyan nehezen kezelhető, mint első pillanatra látszik, ezt épp a kételemű számsíkok elemzései tanúsítják, és a fizika matematikai modelljeiben megjelenő létük a szükségességükre is rámutatnak.

A parabolikus és a hiperbolikus esetben maguk a tapasztalatok szentesítik a számsíkok téridő-modell szerepét, de a komplex esetben úgy tűnhet, hogy „csak” az analógia erősíti feltételezésünket a komplex számsík téridőt modellező funkciójáról. **Feynman** pályaintegrál módszere a kvantumelektrodinamikában (QED-ben) nemcsak jól használható számítási módszer, de feltárja a komplex számok teret és időt rejtő szerepét is. A megoldás bonyolult matematikája elrejti ezt, de a heurisztikájának kezdeti lépéseiben könnyen tetten érhető, és maga **Feynman** is így *magyarázta* a módszerét egy népszerűsítő előadássorozatában.

Feynman a QED-et leíró – azaz a pályaintegrál – módszerét magyarázó kis könyvében[20] nyilakkal reprezentálta egy adott esemény különböző megvalósulásait, és e nyilak hosszának négyzete adta az esemény megvalósulásának valószínűségét. Ha egy esemény több úton is megvalósulhat, akkor az esemény valószínűségének meghatározásakor az összes lehetséges kimenetelt jelképező nyilakat összegezni kell, amely során az egyik nyíl hegyét össze kell kötni a következő tövével, és így tovább, végül az eredő vektort az adja, ha összekötjük az első vektor tövét az utolsó hegyével. A nyilak hosszának a négyzete az esemény valószínűségét adja, az irányának maghatározásához pedig elképzelünk egy stopperórát, amely a kvantumnak a forrásból a detektorba jutásának idejét méri, általánosabban fogalmazva egy esemény oka és okozata között eltelt időt határozza meg. Ennek a képzeletbeli stopperórának egy mutatója van, és ez a mutató pörög körbe, amíg a foton az útját bejárja. Amikor a foton (kvantum) a detektorba csapódik, a stopperóra leáll, és a mutatójának állását választjuk a nyíl irányának.

A fentiek matematikai leírását a komplex számsík adja, ahol a nyilaknak a számvektorok a megfelelői. Egy számvektor nagyságának a négyzete a komplex szám modulusának (normájának, vagy abszolút-értékének) a négyzete. A stopperóra mutatójának állása pedig a komplex szám argumentumával írható le. A nyilak összegzése tetszőleges számú számvektor összegének felel meg, és két vektorra nagyon ismerős a képlet; két egymást kizáró kvantum-esemény valószínűségének összegzése:

$$|P_1 + P_2|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cos\Theta \qquad (8)$$

ahol P_1, P_2 komplex számok, $|\ |$ az abszolútértéket jelöli, és Θ a P_1, és P_2 komplex számvektorok által bezárt szög. A (8) képlet tetszőleges számú vektorra is felírható, azaz tetszőleges számú komplex számvektor összegzésekor az eredővektor nagyságának négyzete a következő:

$$\left|\sum_i P_\mathrm{i}\right|^2 = \sum_i |P_\mathrm{i}|^2 + 2\sum_{i<j} |P_\mathrm{i}||P_\mathrm{j}|\cos(\Theta_i - \Theta_j) = \sum_{i,j} |P_\mathrm{i}||P_\mathrm{j}|\cos(\Theta_i - \Theta_j) \qquad (9)$$

A komplex számok ezen összegzése megegyezik **Feynman** nyilacskáinak összegzésével, a baloldal az eredő vektor hosszának a négyzete. Egyúttal a (9) egyenlet tetszőleges számú, egymást páronként kizáró események valószínűségének összegzése.

[20] Lásd **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

Így a komplex számvektorokat hosszmértékkel – egy valószínűségi mező mértékével –, azaz *tér*jellemzővel látja el **Feynman**. Még ennél is izgalmasabb e kis modellben az, hogy a komplex argumentumot *idő*ként interpretálja. Így ez a valószínűségi modell a komplex számok *polárkoordinátáit* használja; a modulus – vagy norma – *mérték* a valószínűségi mezőben, mint mértéktérben, az argumentummal pedig *idő*t rendelünk az eseményhez. Tehát a komplex valószínűségi amplitúdónak nemcsak a komplex normája határozza meg a valószínűséget, de az adott komplex szám argumentuma – tehát egyfajta idő-reprezentáció – is szerepet játszik a valószínűségi leírásban, méghozzá olyan fontos szerepe van, hogy egyrészt vele magyarázható az interferencia-jelenség, másrészt a stacionárius hatás[21] elvének QM-beli megfelelőjének is ez az oka. Gyakorlati példaként, ha a kétrés kísérletre gondolunk, akkor az érzékelő képernyő egy adott pontjába a két résen keresztül érkező fotonok eltérő úthosszat járnak be a fényforrástól számítva, így a sebességük állandóságát[22] figyelembe véve az „úton töltött idejük” is különböző (szintén a fényforrástól számítva). Ez okozza az interferenciát. Tehát maga a tapasztalt interferencia – mint mérés – a bizonyíték arra, hogy egy adott pontba jutó fotonok számát, pontosabban valószínűségét nemcsak a komplex normanégyzet, mint a valószínűségi mező „térmértéke”, de az „időmértéke” is meghatározza.

Megjegyzés

Feynman pályaintegrál matematikájának óriási előnyei vannak, de olyan hátrányai is, ami miatt csak komoly átalakításokkal alkalmazható, ha általánosságban szeretnénk alkalmazni mindhárom kételemű szám által modellezett téridőben és valószínűségszámításban. Csak a legfontosabb problémákat említve gond az, hogy newtoni teret és időt használ, valamint az egész matematikai apparátusa a valós és a komplex számok folytonossági tulajdonságain alapszik. A fent nagy vonalakban leírt értelmezésből kiindulva azonban nem látom akadályát annak, hogy mindhárom számkörben kidolgozzuk az elképzelés matematikáját. Sőt, olyan reményt is táplálok, hogy egy új matematikai megközelítéssel elkerülhetőek azok a problémák, amelyeket a **Feynman**-modell használatában a végtelenek felbukkanása okoz, és renormálási módszereket tesz szükségessé.

5. Összegzés

Hilbert 1-es problémája, a CH és alternatívái új megvilágításba kerülnek olyan – velük ekvivalens – számmodellek *megkonstruálásával*, amelyek egyúttal a kételeműek számsíkjait is modellezik. A végteleneknek ezekben a modellekben szereplő fajtái nem mennyiségileg jellemzik a fogalmat, hanem minőségében újként ragadják meg. Ezáltal a fizikai tapasztalatokkal adekvátabb matematikát kapunk, hiszen a valóságban mennyiségi végtelent nem észlelünk, csak a létezők minőségileg eltérő sokaságával találkozunk. A kételemű számok már eddig is nélkülözhetetlen szerepet játszottak a fizika matematikájában, anélkül, hogy tudtunk volna a végtelent modellező tulajdonságukról. E létfontosságú szerepük miatt a CH-alternatívák számmodelljeinek létjogosultsága is megkérdőjelezhetetlenné válik, és ezzel végre megoldottnak tekinthető **Hilbert** 1-es problémája.

[21] Ismertebb, bár pontatlan elnevezés szerint a legkisebb hatás elve alapján történő megvalósulása egy pályának.

[22] Itt magyarázatra szorul a „fénysebesség állandósága”, hiszen **Feynman** pályaintegrál modelljében mikroszinten a fénysebesség nem állandó. A kulcsszó a „mikroszint”, mivel nagyobb távon már konstanssá válik a fénysebesség **Feynman** szerint is, és a résektől az érzékelő berendezésig mért úthossz már „makrotávolság”.

Hilbert 6-os problémája ugyan még a fentiekkel együtt is befejezetlen, de a kételeműeknek a valószínűségszámításban játszott szerepe, és mint halmazelméletbeli CH-axiómák modelljei megkönnyítik a halmazelméleti alapokon nyugvó kolmogorovi valószínűségszámítás olyan kibővítését, amely egységbe képes foglalni az eddig külön kezelt klasszikus és QM-beli valószínűségszámítást. Ezzel óriási haladás érhető el a 6-os probléma megoldásában, azaz a fizikai matematika axiomatizálásában, hiszen nemcsak **Hilbert** nevesítette e probléma kapcsán a valószínűségszámítást, de mai tudásunk szerint is vele kapcsolható össze a klasszikus mechanika és a QM, valamint egy hiperbolikus QM, amely reményeim szerint egy fizikai információelmélet alapja lehet. Emellett a kételeműek a tér és az idő – azaz a fizika alapfogalmai – viszonyát is új megvilágításba helyezik, amely nem más, mint az egyes CH-alternatívákban megfogalmazott végtelenek közötti kapcsolat.

Mindent összevetve a matematika és vele a fizika fogalmi harmonizációja újabb, magasabb szintre lép a **Hilbert** 1-es probléma megoldásával, pontosabban a megoldás módszerével, és a 6-os probléma részmegoldásainak eszközeivel.

Melléklet

Az itt következőket tartalmazza *„A kételemű számok, mint homogén koordinátával leírt számegyenesek”*[23] című korábbi írásom is.

Induljunk el azon az úton, amint a számsíkokon a számok polárkoordinátás alakjához jutunk:

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad \text{(M1)}$$

Ahol **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \qquad \text{(M2)}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \qquad \text{(M3)}$$

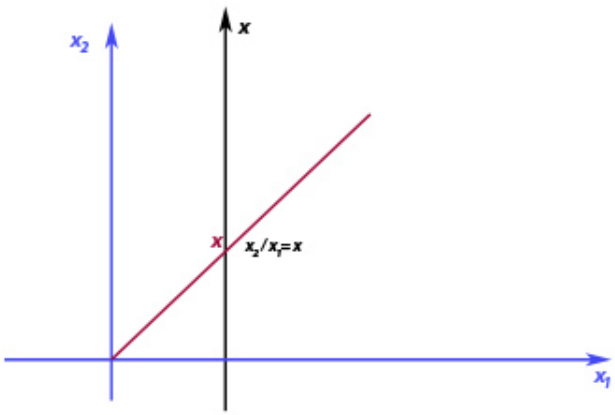
$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Az (M1) egyenletben felírt alak szinte „kiált” egyfajta homogén koordinátarendszerbeli értelmezésért. A homogén koordináták haszna épp az, hogy a végtelen távoli pontokat véges koordinátákkal fejezzük ki. A kételemű számok tiszta képzetes részének végtelen-értelmezése is pontosan ezt teszi: a végtelent véges „koordinátájú” számponttal jellemzi.

1. Parabolikus (szám)egyenes

A parabolikus számegyenes esetén a számegyenesre egyetlen ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik.

Ha a (szám)egyenesen egy közönséges (szám)pont Descartes-féle koordinátája (x), akkor $x_1 \neq 0$ esetén az illesztett homogén koordinátarendszerben az x_2/x_1 homogén koordinátával leírható elemet rendelem, melyre $x = x_2/x_1$, melyek az origón átmenő x_2/x_1 meredekségű egyenesek. (Lásd az 1. ábrát).



1. ábra

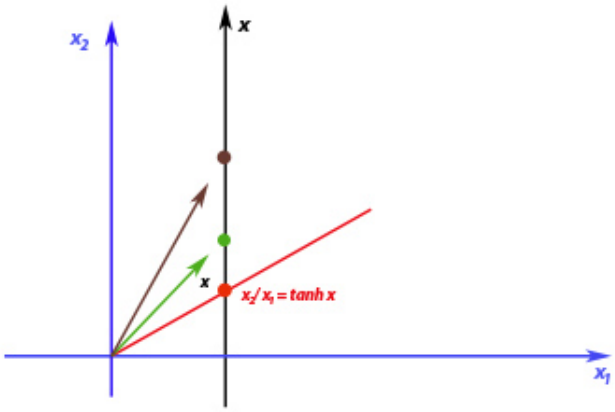
[23] Lásd: https://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/176-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-mint-homog%C3%A9n-koordin%C3%A1t%C3%A1val-le%C3%ADrt-sz%C3%A1megyenesek.html

Az $x_1=0$ homogén koordinátájú egyenes pedig a számegyenes egyetlen végtelen távoli pontjának a megfelelője. Ily módon az origón átmenő valamennyi egyenesnek egyetlen számpont felel meg az x számegyenesen, melynek egyetlen végtelen távoli pontja van.

Azt **mondom tehát, hogy az egyetlen végtelen távoli ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a parabolikus számsíkot adja.**

2. Hiperbolikus (szám)egyenes

A hiperbolikus számegyenes esetén a számegyenesre végtelen sok ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak. (A 2. ábrán fekete színnel rajzolt számegyenes piros színnel jelölt pontja közönséges pont, a zöld és a barna pontok ideális pontok. Ezen az ábrán torzítottan a végtelen távoli pontok is a végesben vannak ábrázolva.)



2. ábra

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes közönséges Descartes-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához a számsík $x_2/x_1=\tanh x$ homogén koordinátával leírható elemét rendelem $x_1\neq 0$ esetén, ezek az elemek olyan, az origón átmenő egyenesek, melyek meredeksége kisebb, mint egy. (Lásd például a 2. ábrát, és a piros színnel rajzolt egyenest.) Ily módon az origóra illeszkedő sugársorból csak egy nyaláb egyeneseit feleltettem meg kölcsönösen egyértelműen a számegyenesem *közönséges* pontjainak. A sugársor többi egyenesét a számegyenes *végtelen távoli* pontjaihoz rendelhetem. Az abszolútértékben egynél nagyobb meredekségű egyenesek meredekségét $x_1/x_2=\tanh x$ ($x_2\neq 0$) módon írom le. (Ezek egyike a 2. ábrán barna színnel rajzolt egyenes.) Az $x_1=x_2$ egyeneshez a számegyenes „legkisebb” végtelen távoli pontját, az $x_1=-x_2$ egyeneshez a számegyenes negatív számtartományában legnagyobb végtelen távoli pontját rendelem. (Ezek egyike a 2. ábrán zöld színnel rajzolt egyenes.) Ily módon az origón átmenő egyenesek közül egy kivétellel mindegyikhez egyetlen közönséges, vagy végtelen távoli – azaz ideális – számpont felel meg az x számegyenesen, melynek végtelen sok végtelen távoli pontja van. Az origóra illeszkedő sugársor egyenesei közül egyedül az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen sok ideális ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a hiperbolikus számsíkot adja.

3. Komplex, vagy elliptikus (szám)egyenes

A komplex számegyenes esetén a számegyenesre nem illeszkedik egyetlen ideális (végtelen távoli) pont sem. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak.

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes Descartes-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához $x_2 \neq 0$ és $|x|<\pi/2$ esetén a számsíknak a $\mathrm{tg}x=x_2/x_1$ homogén koordinátával leírható elemét rendelem, ezek az elemek az origón átmenő egyenesek. Ily módon az origóra illeszkedő sugársor $x_1=0$ elemének kivételével minden elemét hozzárendeltem a számegyenes $(-\pi/2,+\pi/2)$ szakasz számpontjaihoz. Így egy tetszőleges hosszúságú[24] véges nyílt szakasz pontjait tudtam kölcsönösen egyértelműen megfeleltetni az origóra illeszkedő sugársor egyeneseinek úgy, hogy az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen távoli ponttal nem rendelkező számegyenes, (pontosabban tetszőlegesen nagy számszakasz) homogén koordinátákkal való leírása a komplex számsíkot adja.

[24] Tetszőleges hosszúságú, hiszen $\mathrm{tg}x=x_2/x_1$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$ esetén $x'= xL/\pi$ hozzárendeléssel egy L hosszúságú (-L/2,L/2) nyílt szakasz pontjait rendelhetem az origón átmenő egyenesekhez.