Kizárólag konstruktív interferencia van – ha a valószínűségi hullámok hiperbolikusak

Egy karnyújtásnyira az egységes valószínűségszámítástól

„A természetben minden rejtélyt a számok oldanak meg.”
(Beke Manó)

A címet olvasva valaki a hiperbolikus interferenciára asszociálhat, ami azt jelenti, hogy klasszikus hullámok – például vízhullámok – speciális megzavarásakor hiperbola rajzolódik ki az interferenciaképen. Ebben a cikkben azonban egészen másról, hiperbolikus valószínűségről, illetve a vele kapcsolatos interferenciafogalomról lesz szó. A hiperbolikus valószínűség meglehetősen új elképzelés és tárgya is erősen vitatott, vagy alig ismert a fizikusok körében. Számomra azonban nagy jelentőséggel bír ez az új elgondolás, mert nagyon sok minden érthetővé válik általa. Mielőtt a hiperbolikus valószínűségre térnék, érdemes az eddig ismertekről, azaz környezetünk klasszikus és a kvantummechanika (QM) valószínűségéről néhány szót ejteni.[1]

1. A kolmogorovi klasszikus valószínűségszámítás

1.1. A kolmogorovi matematika ma

Hétköznapjaink klasszikus valószínűségszámítását **Andrei Kolmogorov** axiomatizálta alig száz évvel ezelőtt, gyakorlatilag egyidős a QM valószínűségi matematikájával.

Kolmogorov axiomatikus valószínűségszámítása halmazelméleti alapokon nyugszik[2], ami annyit jelent, hogy a valószínűségszámítás alapfogalmát, az eseményt a halmazok mintájára nem definiálja pontosan, a közöttük bevezetett műveleteket pedig a halmazelmélet műveleteivel állítja párhuzamba[3].

---

[1] Ez a cikk kiegészítése és pontosítása egy korábbi írásomnak:
„*Egy univerzális valószínűségszámítás felé, I. rész*”;
https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/356-egy-univerzalis-valoszinusegszamitas-fele-i-resz
és szorosan kapcsolódik több másik cikkhez, például a következőhöz:
„*A negatív hiperbolikus valószínűségektől egy új és egységes matematikai eszköztár felé*”;
https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/203-a-negativ-hiperbolikus-valoszinusegektol-egy-uj-es-egyseges-matematikai-eszkoztar-fele

[2] Lásd **Kolmogorov** axiómáit az **A. Melléklet**ben.

[3] Ehhez lásd a **B. Melléklet**et, amely a **Kolmogorov** által párhuzamba állított halmazelméleti és valószínűségszámítási fogalmakat mutatja be.

Jelen tárgyalásom szempontjából csak néhány alapvető elemet emelek ki a kolmogorovi valószínűségszámításból. Ezek egyike az, hogy az egymást kizáró eseményhalmazoknak a P_1, P_2 valószínűségei esetén, a P teljes valószínűségére a klasszikus összeadási tétel a következő:

$$P = P_1 + P_2 \tag{1}$$

Ahol P, P_1, P_2 pozitív valós számok. (A normálás kérdése nem túl fontos jelen tárgyalásom szempontjából, de mindig feltételezem, hogy 1-re normáltak a valószínűségek, ami (1) esetén azt jelenti, hogy P=1.)

1. Megjegyzés

Az egyszerűség kedvéért fogalmaztam meg az összegzési axiómát csak két lehetséges alternatívára, ez általánosan igaz tetszőleges n eseményalternatíva esetén is, így pontosabban fogalmazva, ha A_1, A_2, … A_n diszjunkt eseményhalmazok, akkor az eseményalternatívák valószínűségeire a következő igaz:
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

Kolmogorov megjegyzi, hogy a + jelet csak diszjunkt halmazok egyesítésére fogja használni, ami eseményhalmazokra azt jelenti, hogy ezek valószínűségei az egymást kizáró *lehetséges kimenetelek* valószínűségei (lásd a **B. Melléklet** 8. pontját).

Schrödinger macskáját sokat emlegetik a QM-valószínűségszámítás furcsaságának szemléltetésére, holott az a kolmogorovi matematikával írható le. E gondolatkísérletben az okozza a zavart, hogy a gyilkos gép bekapcsolását egy kvantum okozhatja, ezért úgy tűnik, mintha a gép és a macska kvantum-sokaságait írná le az állapotösszefüggésük. Ez viszont tévedés, hiszen a macska *macskaságában* van élő vagy holt állapotban, és nem a kvantum-miriádjai vannak ebben az állapotban, hasonlóan a gép, mint egész van ki- vagy bekapcsolt állapotban, és nem a kvantumsokasága, függetlenül attól, hogy bekapcsolódását egy kvantumesemény váltja ki. Így a gép és a macska kettős rendszerének állapota a két alrendszer állapotainak klasszikus lineáris kombinációjaként írható le, azaz

$MG = M_{él}G_{be} + M_{él}G_{ki} + M_{holt}G_{be} + M_{holt}G_{ki}$

Ahol M a macska, G a gép állapotainak halmaza, $M_{él}$ a macska élő, M_{holt} a macska holt állapota, értelemszerűen a G_{be} és a G_{ki} a gép be-illetve kikapcsolt állapota. Az egyenletben a „szorzás” művelete az eseményhalmazok közösrészének, másképp metszetének, az összeadás pedig a *diszjunkt* eseményhalmazok uniójának a megfelelője.

Tekintettel arra, hogy a gép bekapcsolt állapota mellett a macska nem lehet élő, és kikapcsolt állapota mellett nem valószínű, hogy holt a macska, ezért a valószínűségeket P-vel jelölve a lehetséges alternatívák valószínűségei leegyszerűsödnek a következőre:

$P(MG)= P(M_{él}G_{ki}) + P(M_{holt}G_{be})$

A **Schrödinger**-cica rejtélye azonban ezzel nem oldódott meg, mert felmerül a kérdés, hogy vajon miképp váltok át a kolmogorovi valószínűségszámításra, amikor a folyamatot elindító kvantumeseményt a komplex matematika írja le. Hasonló ez a probléma ahhoz, amint a fény sebessége bármekkora lehet mikroszinten, és tetszőleges pályán mozoghat, viszont makrotávolságokon „kiegyenesedik” a pályája és megjelenik a sebességhatár[4]. A komplex matematika magyarázza a mikroszintű, és a hiperbolikus matematika a makroszintű tulajdonságokat, de nincs még válasz arra, miképp történik, és miképp írható le az átmenet a kettő között.

[4] Lásd ennek részletesebb leírását **Richard P. Feynman** egyik könyvében: *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

1.2. A kolmogorovi matematika „jövője”

A szakirodalomban nem találtam arról anyagot, hogy milyen eredményre jutunk, ha a valós számokat parabolikus (duális) számokra cseréljük a kolmogorovi valószínűségszámításban.

A valószínűségek összegzése, a parabolikus esetben a következő szabállyal írható le:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \operatorname{cp} \Theta = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| = (|P_1| + |P_2|)^2 \qquad (2)$$

Az egyenlőség második lépésénél felhasználtam, hogy $\operatorname{cp} \Theta \equiv 1$

A fenti egyenletben P, P_1, P_2 parabolikus számok, Θ a P_1, és P_2 parabolikus számvektorok által bezárt parabolikus szög, és cp a koszinusz függvény megfelelője a parabolikus számsíkon.[5]

Ha a parabolikus számokat azokra korlátozzuk, amelyeknek valós eleme nemnegatív, azaz P, P_1 és P_2 abszolútértéke (normája) is pozitív, akkor a (2) egyenletben elvégezhető a gyökvonás, azaz a megkapjuk a klasszikus valószínűségi összefüggést:

$$|P| = |P_1| + |P_2|$$

2. Megjegyzés

Nagyon egyszerű az alapműveletek, a parabolikus képzetes definíciója: $\mathbf{j}^2=0$ ($\mathbf{j}\neq 0$), valamint a parabolikus számok abszolútértékének (normájának) és a skalárszorzatának[6] ismerete alapján megkapni a (2) egyenletet.

$P=P_1+P_2$, $P_1=x_1+\mathbf{j}y_1$, $P_2=x_2+\mathbf{j}y_2$

$P=(x_1+x_2)+\mathbf{j}(y_1+y_2)$

$$|P| = x_1 + x_2 = |P_1| + |P_1|$$

$$|P|^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + 2x_1x_2$$

Így az abszolútérték és a skalárszorzat definícióját használva megkaptuk, hogy

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \operatorname{cp} \Theta = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| = (|P_1| + |P_2|)^2$$

A legfontosabb szerintem az, hogy **a parabolikus valószínűségi amplitúdók összegzési szabályát alkalmazva a klasszikus valószínűségi számításokkal megegyező összefüggéshez jutottam.** Elgondolkodtató, hogy az (1) egyenletet parabolikus számokra felírva nem kapjuk meg az azonosságot, de a négyzetes szabályt alkalmazva a parabolikus számokra, és a műveleteket elvégezve, *visszakapjuk* a klasszikus valószínűségi összefüggést valós számokra.

Ez természetesen egyelőre matematikai érdekesség, varázslat, értelme, jelentősége a valószínűségszámítások egységesítésekor lesz.

2. Komplex valószínűség, azaz a QM valószínűségszámítása

A kvantumelmélet különböző megfogalmazásai, a **Heisenberg**-féle mátrix-formalizmus, a **Dirac**-féle nemkommutatív algebra és a **Schrödinger**-féle parciális differenciálegyenletek matematikailag egymással ekvivalensek. **Max Born** a hullámfüggvény statisztikus értelmezését vitte az elméletekbe: ez a **Born**-féle valószínűségi interpretáció. E cikkben a QM valószínűségi megközelítéséről lesz csak szó.

---

[5] Lásd a C. Mellékletben a $\mathbf{j}^2=0$ ($\mathbf{j}\neq 0$) eset megfelelő képleteit.

[6] Lásd a C. Melléklet (M6) és (M8) képletét; **δ = j** ahol $\mathbf{j}^2=0$ ($\mathbf{j}\neq 0$) figyelembevételével.

A kolmogorovi (és a parabolikus) valamint a QM komplex valószínűségszámítása között az az alapvető különbség, hogy miközben a QM-ben is az állapotok lineáris kombinációit vesszük figyelembe a valószínűségek leírásakor, de a QM-ben komplex számmal súlyozott kombinációkat kell figyelembe vennünk, és a mérhető valószínűség a komplex szám normája. Az (1) összefüggéssel szemben QM-ben az egymást kizáró (itt ortogonális) állapotok valószínűségeinek összegzésére az alábbi törvényszerűség működik:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cos\Theta \tag{3}$$

Ahol P, P_1, P_2 komplex számok, $|\ |$ az abszolútértéket jelöli, és Θ a P_1, és P_2 komplex számvektorok által bezárt szög.

Nagyon fontos látni azt, hogy az (1) összefüggés itt is igaz, csak a P, P_1, P_2 *komplex* számokra értelmezve. A valószínűség azonban, – és ez az, ami mérhető –, a (3) összefüggés alapján számítható, azaz komplex abszolútérték-négyzettel egyenlő. A normálást itt úgy kell érteni, hogy $|P|^2=1$.

3. Megjegyzés

Itt is nagyon egyszerű az alapműveletek, az $\mathbf{i}^2=-1$ definíció, valamint a komplex számok abszolútértékének és a skalárszorzat[7] ismeretének alapján megkapni a (3) egyenletet.

$P=P_1+P_2$, $P_1=x_1+\mathbf{i}y_1$, $P_2=x_2+\mathbf{i}y_2$

$P=(x_1+x_2)+\mathbf{i}(y_1+y_2)$

$$|P| = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$$

$$|P|^2 = (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 = ({x_1}^2+{y_1}^2)+({x_2}^2+{y_2}^2)+2(x_1x_2+y_1y_2)$$

Így az abszolútérték és a skalárszorzat definícióját használva megkaptuk, hogy

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cos\Theta$$

Még **Roger Penrose** is csak megkérdőjelezi, hogy vajon valóban csak a komplex abszolútérték-négyzet a meghatározója a valószínűségeknek a QM-ben, de a (3) képletből *látva látható*, hogy egy *teljes rendszernél* – azaz minden alternatívát leíró esetben – számításba kell venni a komplex amplitúdónégyzet mellett a komplex argumentumot is, hiszen Θ a komplex számvektorok által bezárt szög, azaz egy komplex szám argumentuma.

A (3) egyenlet csak két lehetséges állapot valószínűségeinek összegzését mutatja, de ez a képlet tetszőleges számú komplex számvektorra is felírható:

$$\left|\sum_{i}^{n} P_{\mathrm{i}}\right|^2 = \sum_{i}^{n}|P_{\mathrm{i}}|^2 + 2\sum_{i<j}^{n}|P_{\mathrm{i}}||P_{\mathrm{j}}|\cos(\Theta_i-\Theta_j) = \sum_{i,j}^{n}|P_{\mathrm{i}}||P_{\mathrm{j}}|\cos(\Theta_i-\Theta_j) \tag{4}$$

A (4) egyenlet tetszőleges számú, egymást páronként kizáró (itt ortogonális) állapotok valószínűségének összegzése. Az argumentum koszinuszának megjelenése tökéletes értelmezését adja az interferenciáknak, például a kétréskísérletnél.

4. Megjegyzés

Ha a kétrés kísérletre gondolunk, akkor az érzékelő képernyő egy adott pontjába a – fényforráshoz szimmetrikusan elhelyezkedő – két rés valamelyikén keresztülhaladó fotonok eltérő úthosszat járnak be a

[7] Lásd a C. Melléklet (M6) és (M8) képletét; $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}$ ahol $\mathbf{i}^2=-1$ figyelembevételével.

másik résen átjutókhoz képest[8], így a sebességük állandóságát figyelembe véve az „úton töltött idejük” is különböző (szintén a fényforrástól számítva). Ez okozza azt, hogy a képernyőn eltérő fázisban „találkoznak”, így hol kioltódnak, hol erősítik egymást, azaz megjelenik az ismert interferencia. Tehát maga a tapasztalt interferencia – mint mérés – a bizonyíték arra, hogy egy adott pontba jutó fotonok számát, pontosabban valószínűségét nemcsak a komplex normanégyzet, mint a valószínűségi mező „térmértéke”, de a komplex argumentum, mint „időmérték” is meghatározza.

Nagyon fontos észrevenni, hogy a (4) egyenlet egy teljes rendszer akárhány egymást kizáró (ortogonális) állapotok valószínűségeinek összegzését leírja, azaz akár az egész univerzum valamennyi részecskéjének, valamennyi állapota leírható ezzel az összefüggéssel, hiszen – tapasztalataink[9] alapján – ezek száma is véges, és a (4) egyenlet minden véges alternatívára alkalmas leírást ad. Természetesen ez már viszonylag kis részecske kis számú állapotainak esetén is igen „hosszú” egyenlet lesz. Például, ha egyetlen részecskének 10 állapota lehetséges, akkor ezek kombinációiból írható fel a (4) egyenlet. Ha már 2 részecskénk van, egyenként 10 lehetséges állapottal, akkor a lehetséges állapotkombinációk száma 10^2=100, tehát a lehetséges állapotok valószínűségeinek 100 összeadandójából áll a (4) egyenlet. A valószínűségi összefüggés tehát logikai egyszerűsége mellett igen számításigényes, aminek elvégzése a QM-ben még az egyszerűbb esetekben sem igazán lehetséges a mérésben résztvevő kvantumok irdatlan sokasága miatt.

A fentiek szép és tiszta matematikája nehezen alkalmazható számításigénye és mérésigénye miatt, annak ellenére sem, hogy minden eddigi tapasztalatunknak megfelel. Vannak törekvések arra, hogy a kvantumméréseket másképp értelmezzék. Ezen törekvések egyike **Andrei Khrennikov**[10] próbálkozása, aki egyfajta kontextusfüggő szemléletben lelt megoldásra a kvantummechanika (QM) valószínűségeinek értelmezésében. Kontextuális valószínűsége megegyezik a kolmogorovi matematika teljes valószínűséget leíró formalizmusával, kiegészítve a statisztikus adatok okozta eltérési összetevővel. Következésképpen ez a megközelítés a statisztikus adatokra való áttérésben látja a klasszikus és a kvantum valószínűségek eltérésének okát, és egyfajta mérési hibaszázalékkal indokolja az eltérési faktor megjelenését. Az eltérésnek e statisztikus hibaként való kezelése azt jelenti, hogy arra a következtetésre jutunk egy mérés értelmezésekor, hogy az (1) egyenlettől a QM-béli csak egy statisztikus hibatagban különbözik, aza a (3) egyenlet helyett a következő áll fenn:

$$P = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2}|\lambda|$$

ahol $|\lambda| \leq 1$.

Ez két alternatíva esetén még elfogadható értelmezés, de tetszőlegesen sok, véges számú alternatíva esetén már értelmezhetetlen. Ennek az értelmezhetetlenségnek legjobb bemutatása a kétréskísérlet, ahol a hibataggal nehezen, sőt inkább lehetetlen értelmezni az interferencia-csíkok szimmetriáját, miközben ez a (3)-as és a (4)-es egyenlettel tökéletesen magyarázható. Leginkább a hiperbolikus eset érzékelteti a hibatag-értelmezés elfogadhatatlanságát, be fogjuk látni, hogy ott a hibatag-értelmezés alapjaiban hibás.

---

[8] Kivéve természetesen azokat a fotonokat, amelyek a detektornak a két réshez viszonyítva szimmetrikusan elhelyezkedő pontjaiba jutnak.

[9] Aki végtelennek feltételezi az univerzumunkat, az sohasem található erre tapasztalati bizonyítékot, hiszen csak véges *mennyiségekről* van tapasztalatunk. Ezen alapszik a végtelen *minőségi* értelmezése. Lásd erről „*A végtelen kicsiben és nagyban I.*” című cikket;
https://www.infinitemath.hu/matematika/442-a-vegtelen-kicsiben-es-nagyban-i

[10] Példaként **Andrei Khrennikov** néhány cikke;
„*Hyperbolic quantum mechanics*”; http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0101002v1.pdf ,
„*Quantum probabilities' as context depending probabilities*”; https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0106073.pdf ,
„*Contextual viewpoint to quantum stochastics*”; *https://arxiv.org/pdf/hep-th/0112076.pdf* ,

3. Hiperbolikus valószínűség, egy új matematika

Andrei Khrennikov a kvantumfizika valószínűségszámításon alapuló matematikáját taglalva eljut a hiperbolikus kvantummechanika, s így a hiperbolikus valószínűség gondolatához. Ez formailag a komplex számok hiperbolikus számokra való cseréjét jelenti a matematikai modellekben, így például a **Hilbert**-tér formalizmusában. Ez pedig azt jelenti, hogy az (1) egyenlet helyett a következővel számolhatunk:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cosh\Theta \tag{5}$$

5. Megjegyzés

Itt is egyszerű az alapműveletek, a hiperbolikus képzetes definíciója: $\mathbf{k}^2=1$, valamint a hiperbolikus számok abszolútértékének (normájának) és a skalárszorzatának[11] ismerete alapján megkapni az (5) egyenletet.

$P=P_1+P_2$, $P_1=x_1+\mathbf{k}y_1$, $P_2=x_2+\mathbf{k}y_2$

$P=(x_1+x_2)+\mathbf{k}(y_1+y_2)$

$$|P| = \sqrt{(x_1+x_2)^2-(y_1+y_2)^2}$$

$$|P|^2 = (x_1+x_2)^2-(y_1+y_2)^2 = ({x_1}^2-{y_1}^2)+({x_2}^2-{y_2}^2)+2(x_1x_2-y_1y_2)$$

Így az abszolútérték és a skalárszorzat definícióját használva megkaptuk, hogy

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cosh\Theta$$

Az (5)-ös egyenlet lényegi eltérése a (1)-es egyenlettől nemcsak a hiperbolikus koszinusz függvényben keresendő. Korábbi cikkeimben pongyolán fogalmaztam, csak a valós számokon mindenütt pozitív és egynél nagyobb hiperbolikus koszinusz függvényre hivatkoztam a hiperbolikus valószínűségek értékelésekor, holott az (5)-ös képletben a $|P_1|$ és a $|P_2|$ normák komplex számok is lehetnek és így a négyzetük negatív szám a hiperbolikus számsík egyes részein. A fizika matematikai modelljeiben számításba vehető síknegyedben azonban mindig pozitív valósak a normák, ekkor értékelődik fel a hiperbolikus koszinusz függvény, amelynek értéke itt szintén pozitív valós, így ekkor az (5)-ös egyenlet jobb oldalán minden összeadandó pozitív valós szám. Így hiperbolikus valószínűségek esetén nem fordulhat elő a klasszikus interferenciakép kioltás-erősítés váltakozása, ekkor csak erősítés állhat, azaz csak konstruktív interferencia van a számba vehető hiperbolikus síknegyedben.

6. Megjegyzés

A „fizika matematikai modelljeiben számításba vehető" kifejezés azt jelenti, hogy a hiperbolikus számsíknak arról a síknegyedéről van szó, amelynek elemei az eddig tapasztalt világunkra „fizikailag értelmes" megoldásokat adnak – azaz például a fénysebességnél kisebb sebességű eseményeket – modelleznek. A valószínűségszámítást illetően ez az **5. Megjegyzés**nek abból a képletéből látszik a legjobban, ahol nem polárkoordinátával, hanem Descartes-koordinátákkal van kifejezve az összefüggés:

$$|P|^2 = (x_1+x_2)^2-(y_1+y_2)^2 = ({x_1}^2-{y_1}^2)+({x_2}^2-{y_2}^2)+2(x_1x_2-y_1y_2)$$

Az $x_1 > y_1$ és $x_2 > y_2$ valamint $x_1, x_2 > 0$ eset az, amikor a fenti egyenlet minden tagja pozitív valós szám, és a hiperbolikus számsíkon ez az a síknegyed, amely egyedül számításba vehető nemcsak itt a hiperbolikus valószínűségszámításban, de a fizika minden olyan matematikai modelljében, ahol a hiperbolikus számsík szerepet játszik, így például a speciális relativitáselmélet hiperbolikus modelljében[12], ahol ebben a síknegyedben modellezettek a fénysebességnél kisebb sebességek.

---

[11] Lásd a C. Melléklet (M6) és (M8) képletét; $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{k}$ ahol $\mathbf{k}^2=1$ ($\mathbf{k}\neq 1$) figyelembevételével.

[12] Lásd például „*A Galilei-transzformáció és a parabolikus számok*" című cikk C. Mellékletét. https://www.infinitemath.hu/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

Itt is nagyon fontos, és az előzőkhez hasonlóan könnyű levezetni, hogy az (5)-ös összefüggés tetszőleges számú vektorra is felírható, azaz tetszőleges számú hiperbolikus számvektor összegzésekor az eredővektor nagyságának négyzete a következő:

$$\left|\sum_{i}^{n} P_{\mathrm{i}}\right|^{2} = \sum_{i}^{n} |P_{\mathrm{i}}|^{2} + 2\sum_{i<j}^{n} |P_{\mathrm{i}}||P_{\mathrm{j}}| \cosh(\Theta_i - \Theta_j) = \sum_{i,j}^{n} |P_{\mathrm{i}}||P_{\mathrm{j}}| \cosh(\Theta_i - \Theta_j) \qquad (6)$$

Így megkaphatjuk a hiperbolikus QM-ben is a tetszőleges számú objektum tetszőleges számú állapotának teljes valószínűségét. Az (5)-ös és a (6)-os képletben a hiperbolikus koszinusz függvényt tartalmazó tagok nem lehetnek egy statisztikai számítás hibatagjai, mert mindig pozitív számok, sőt tetszőlegesen nagy pozitív számok lehetnek. Tehát, *ha mérni tudnánk* egy ilyen valószínűségi összefüggést, akkor a (6) és az (1) egyenlet összehasonlításakor nem értelmezhetnénk statisztikus hibatagként a hiperbolikus koszinusz függvényt.

A napokban ismét elolvastam **Stefan Ulrych** egy 2007-es cikkét[13], amely szintén tartalmazza **Khrennikov** statisztikai megközelítését azzal a lényegi hibával, amellyel a hiperbolikus valószínűségi hullámokat statisztikusan jellemzi a két említett szerző. Amíg **Khrennikov** a **Hilbert-**tér formalizmusába emelte be a komplex számok helyére a hiperbolikus számokat, addig **Ulrych** a komplex és a hiperbolikus számokat írta le egydimenziós **Clifford** algebraként[14], és a fent idézett cikkében ezt összekapcsolta a **Khrennikov**-féle megközelítéssel. Sajnos **Ulrych** is átveszi a leírások közötti eltérés statisztikus hibaként való kezelését, és ezzel a hibás következtetéseket is „megörökli”, ami a hiperbolikus valószínűségeknél a leglátványosabb. **Ulrych** cikkét fogom idézni, aki ugyan a hiperbolikus koszinusz függvény abszolútértékét nagyobb egyenlő egynek tekinti, de plusz-mínuszos hibatagként kezeli[15]:

A concrete application of the hyperbolic numbers to quantum physics has been given by Khrennikov [35] in order to generalize the concept of interference of probabilities. The general formula for the interference of probabilities is given by [35]

$$P = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2}\lambda\,, \qquad (12)$$

where P_1 and P_2 are two probabilities and $\lambda \in \boldsymbol{R}$ is a free parameter. The case $|\lambda| \leq 1$ is covered by the parametrization $\lambda = \cos\theta$ leading to complex quantum mechanics. Eq. (12) can then be linearized in the form

$$P = |\sqrt{P_1} + e^{i\theta}\sqrt{P_2}|^2\,, \qquad (13)$$

which points out the role of the complex numbers for quantum physics. In general, the case $\boxed{|\lambda| \geq 1}$ needs to be considered for the superposition as well. Here, one can choose the parametrization $\boxed{\lambda = \pm\cosh\theta.}$ With the help of the

A fentiek tisztázása után természetesen nagy kérdés ebben a hiperbolikus esetben, hogy milyen objektumokra, milyen jelenségekre vonatkozhatnak a hiperbolikus valószínűségek. Nem véletlenül fogalmaztam úgy korábban, „*ha mérni tudnánk* egy ilyen valószínűségi összefüggést”. Egyelőre valóban nem tudunk mérni hasonlót, viszont ismerünk olyan jelenséget, amelynek „viselkedése” modellezhető lehet a hiperbolikus valószínűséggel. Ez nem más, mint az információ. Az információra nincs megmaradási törvény, másolásakor megmarad az eredeti helyén is, és a másolata beépül az új helyének információtartalmába – információfeldolgozás történik – így nemcsak sokszorozódik egy-egy információ, de az információfeldolgozás során folyamatosan új információ is keletkezik. Joggal feltételezhető, hogy az információ mérhetőségével – egy „fizikai” információelmélet létrehozásával

---

[13] Lásd **S. Ulrych**, *„Representations of Clifford algebras with hyperbolic numbers”;* https://arxiv.org/pdf/0707.3981v2.pdf

[14] Lásd erről *„A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen”* című cikk 2.1 pontját; https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/199-a-geometriai-algebraban-rejtozkodo-vegtelen

[15] Idézet a 13. lábjegyzetbéli cikk 5.oldaláról.

párhuzamosan – összhangot találunk majd a hiperbolikus valószínűségek fenti matematikája és az információmérések között.

A fentiekre ellenérveként említheti valaki azt, hogy kvantumszinten egy állapot és vele a róla szóló információ csak a törlésével együtt másolható a tapasztalataink szerint, tehát tulajdonképpen nem is másolásról van szó ekkor, hanem áthelyezésről, transzportálásról. Ám a kvantumvilág valószínűségei nem hiperbolikusak, hanem komplex valószínűségek, tehát az előző bekezdésbélieket annyiban kell pontosítani, hogy ne a QM-beli eseményekre vonatkozzanak. Úgy fogalmazhatunk – egyelőre pongyolán –, hogy a klasszikus (makro) környezetben az információra nincs megmaradási törvény. Így maga az a tapasztalatunk, hogy klasszikus környezetünkben az információ folytonosan növekszik, a QM által leírt világban pedig csak transzportálható az információ, mindez előrevetíti, hogy a matematikájuknak is különbözőeknek kell lenniük, amint a QM-től különböző matematika alkalmas a **Schrödinger**-macska esetében is a valószínűségek leírására. Tudnunk kell tehát, hogy egy adott esetben milyen valószínűségi modellt használjunk.

4. Összegzés és következtetések

A QM-ben a mérés és a komplex matematika teljes összhangban van. A hullámok interferencia-képei felnagyítják klasszikus szintre a kvantumszintű eseményeket, a hullámok erősítésének-kioltásának képét, amelynek jó leírását adja a komplex számok matematikája. Így a hullámmechanikai interferencia segítségével szinte látjuk a kvantumok valószínűségi matematikáját.

A parabolikus számok használata újdonság a hétköznapi valószínűségszámításban, és azt a reményt kelti, hogy velük kiküszöbölhetőek lehetnek a mindennapi valószínűségszámítás jelenlegi paradoxonjai. A köznapi valószínűségeink számolgatásába tehát új színt, új lehetőségeket visznek a parabolikus számok.

Az igazi kincs a hiperbolikus matematika, amely lehetőséget teremt egy „fizikai” információelmélet megalapozására. Az információk halmozódását, az információfeldolgozást nagyban végző objektumok valószínűségi matematikájának a hiperbolikus számok lesznek az eszközei.

A kétréskísérlet rejtélyeinek nem mindegyikét szünteti meg a komplex valószínűségi matematika, ha csak a komplex normanégyzetet tekintem a valószínűség meghatározójának. Ebben a cikkben bemutattam, hogy a valószínűségek klasszikus összegzésétől való QM-beli és hiperbolikus QM-beli eltérésnek az oka alapjaiban a kételemű számok argumentumában rejlik, és ezt nem értelmezhetem statisztikus hibatagként. Egyrészt a QM-ben nincs szükség másfajta értelmezésre, hiszen a komplex matematika *pontos* leírást ad tetszőleges számú részecske tetszőleges számú állapotának teljes valószínűségéről, és ennek értelmezését **Richard Feynman** nagyszerűen leírta a kvantumelektrodinamika módszerét magyarázó kis könyvében[16]. Másrészt a hiperbolikus QM-ben a hibatag-feltételezés félreérthetetlenül téves matematikailag. Méréssel ez a tévedés még nincs alátámasztva, mert nincs pontosan tisztázva az, hogy a hiperbolikus QM mire vonatkozik, ugyanakkor az, amit az információról jelenleg tudunk, esélyessé teszi az információt arra, hogy a hiperbolikus QM tárgya legyen. És ekkor a kvantumszintű hullámtalálkozások kioltás-erősítés váltakozása – interferenciaképe – helyett csak erősítéssel, azaz konstruktív interferenciával találkozhatunk az információs valószínűségek összegzésénél klasszikus szinten.

[16] Lásd **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

Körvonalazódik a valószínűségszámítások egységes elmélete, amelyben mind a három kételemű számtípus megjelenik, a komplex számok a QM valószínűségszámításában, a parabolikus (duális) számokról csak most derült ki, hogy a klasszikus valószínűségszámítás alapelemei[17], és megjelent a hiperbolikus QM lehetősége is, elsősorban **Andrei Khrennikov**nak köszönhetően, bár ennek korrekt használatához hiányoznak még a tapasztalatok, de elsősorban egy fizikai információelmélet hiányzik, amely alapján az információ éppoly mérhetően kezelhetővé válik, amint az egyéb energiafajták.

Nagy kérdés még, hogy a tapasztalatokon túl milyen *törvényszerűség* alapján kell komplex, parabolikus (kolmogorovi) vagy hiperbolikus valószínűséget alkalmazni az egyes esetekben. Ez a kérdés nemcsak itt merül fel, de átszövi az egész fizikát, például a mai tudásunk szerint csak az a különbség a QM és a klasszikus mechanika matematikája között, hogy a QM-beli matematikai leírásokban a komplex **i**=-1 képzetest a parabolikus **j**=0 (**j**≠0) képzetesre cseréljük.[18]

A „mikor melyik képzetes" kérdéséhez, a használatuk törvényszerűségének felfedezéséhez segítséget nyújthat a három képzetes szám – $\mathbf{i}^2$=-1, $\mathbf{j}^2$=0, (**j**≠0), $\mathbf{k}^2$=1, (**k**≠1) –, mint a végtelen *minőségi* értelmezése, a képzetesek, mint a kontinuumhipotézis és alternatíváinak modelljei. Van tehát a képzetes számoknak egy matematikai értelmezése, miszerint a hiperbolikus képzetes számok azt a fajta végtelent modellezhetik, amikor végtelen sok olyan végtelen nagy szám van, amely egyben a $10^{\aleph_0}$ transzfinit számnál kisebb, a parabolikus (vagy duális) számok egy olyan végtelent modellezhetnek, ahol egyetlen olyan végtelen nagy szám van, amely egyben a $10^{\aleph_0}$ transzfinit számnál kisebb, a komplex számok pedig azt modellezhetik, amikor nincs egyetlen egy végtelen szám sem, amely egyben a $10^{\aleph_0}$ transzfinit számnál kisebb.[19] Ez a három alternatíva egy-egy komplett halmazelméletet jelent, amelyek közötti transzformáció éppoly ismeretlen, mint a klasszikus mechanika és a QM közötti átmenet, leszámítva azt, hogy a képzetesek cseréjével juthatok az egyikből a másikba. Van tehát három mechanikánk (fizika) és mindegyikhez egy-egy halmazelmélet (matematika) és „csak" arra kell rájönni, hogy a természet miképp fordul az egyikből a másikba.

---

[17] Lásd ehhez a „*Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanikajahoz

[18] Voltak elképzelések arról, hogy a QM klasszikus mechanikává válik $\hbar \to 0$ határértéknél, de ez hibás elgondolás. Ennek részleteire nem térek ki, csak annyit jegyzek meg, hogy az ok abban rejlik, hogy a **j** parabolikus képzetesnek a négyzete egyenlő 0-val, miközben önmaga nem egyenlő nullával.

[19] Erről lásd „*A végtelen kicsiben és nagyban I.*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/matematika/442-a-vegtelen-kicsiben-es-nagyban-i

A. Melléklet – A valószínűségszámítás kolmogorovi axiómái[20]

Ω az ω∈Ω *elemi események* halmaza, F pedig Ω részhalmazainak halmaza, f∈F *véletlen esemény* vagy röviden *esemény*. F tehát az *események* halmaza, Ω-t pedig az *elemi események terének* nevezzük.

Axiómák:

I. F *halmazalgebra*, azaz Ω∈F és az F két halmazának uniója, metszete és különbsége az F-hez tartozik.
II. Minden F-beli A halmaznak megfelel egy P(A) nemnegatív valós szám. Ezt a számot az A esemény *valószínűség*ének nevezzük.
III. P(Ω)=1
IV. Ha A és B diszjunktak, azaz AB=∅, akkor
P(A+B)=P(A)+P(B)

Az I-IV. axiómákat kielégítő (Ω, F, P) objektumot *valószínűségi mező*nek fogjuk nevezni.

Ezen axiómák rendszere *ellentmondásmentes*, de *nem teljes*. **Kolmogorov** a rendszer nem teljes voltát abban látja, hogy „*különböző valószínűségszámításokban különböző valószínűségi mezőket vesznek figyelembe*”[21].

[20] Forrás: **A. N. Kolmogorov**, *A valószínűségszámítás alapfogalmai*, Hungarian translation © **Zibolen Endre**, Typotex, 2010
[21] Lásd a 20. lábjegyzetbeli forrás 13. oldalát.

B. Melléklet – A kolmogorovi valószínűségek és a halmazelmélet

Az alábbi idézet **Kolmogorov** „*A valószínűségszámítás alapfogalmai*”[22] című művéből való, ahol Ω azon ω elemek halmaza, amelyeket elemi eseményeknek nevezünk, a nagybetűvel jelöltek pedig Ω részhalmazai. A táblázat a halmazelmélet és a valószínűségszámítás fogalmait állítja párhuzamba:

Halmazelméletben	*Véletlen eseményekre*
1. A és B diszjunktak, azaz $AB = \emptyset$.	1. A és B események kizárják egymást.
2. $AB\ldots N = \emptyset$.	2. $A, B, \ldots, N$ események kizárják egymást.
3. $AB\ldots N = X$.	3. X esemény valamennyi A, $B, \ldots, N$ esemény egyidejű megvalósulásából áll.
4. $A \cup B \cup \ldots \cup N = X$.	4. X esemény $A, B, \ldots, N$ események legalább egyikének a bekövetkezését jelenti.
5. $\bar{A}$ komplementer halmaz.	5. $\bar{A}$ az A esemény be nem következését jelentő ellentett esemény.
6. $A = \emptyset$.	6. A lehetetlen esemény.
7. $A = \Omega$.	7. A-nak szükségszerűen be kell következnie.
8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok $\mathfrak{A}$ rendszere az Ω halmaz *felbontása*, ha $$A_1+A_2+\ldots+A_n = \Omega,$$ ahol feltesszük, hogy az A_i halmazok páronként diszjunktak. (A + jelet csak diszjunkt halmazok egyesítésére fogjuk használni.)	8. Az $\mathfrak{A}$ *kísérlet* abból áll, hogy megállapítjuk: az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül melyik következik be; ebben az esetben $A_1, A_2, \ldots, A_n$-t az $\mathfrak{A}$ kísérlet lehetséges kimeneteleinek nevezik.
9. B az A részhalmaza: $B \subseteq A$.	9. B esemény megvalósulásából szükségszerűen következik A megvalósulása.

[22] Lásd a 20. lábjegyzetbéli forrásban a 17. oldalt.

C. Melléklet – A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{M1}$$

ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j≠0, k**^{2}=1, **k≠1**) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus**, vagy **hiperbolikus** számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \tag{M2}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho\left(cp\frac{y}{x} + \boldsymbol{j}sp\frac{y}{x}\right) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \tag{M3}$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\varphi) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \tag{M4}$$

ahol ϱ-t a számok **normájának**, vagy – a komplexek nyomán – **abszolútértékének** a φ-t a számok **argumentumának** nevezem.

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám normája (abszolútértéke) $|z| = x$, argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \tag{M5}$$

ahol φ az argumentum és ϱ a norma az adott számsíkon, és mint fent **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j≠0, k**^{2}=1, **k≠1**) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus** vagy **hiperbolikus** számsíkról van szó.

A **| |** **abszolútérték-jelölést** jelölést is használva, mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$|z| = \varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{x - \boldsymbol{\delta}y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \tag{M6}$$

ahol **δ,** mint mindig, azaz **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j≠0, k**^{2}=1, **k≠1**) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{\mathrm{z}} = \mathrm{x} - \boldsymbol{\delta}\mathrm{y} \quad \text{ha} \quad \mathrm{z} = \mathrm{x} + \boldsymbol{\delta}\mathrm{y} \tag{M7}$$

Mindhárom számsíkon fontos szerepe van a fizikából jól ismert **skalárszorzatnak**, amely a három számsíkon általánosan a következő:

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1}z_2) = |\overline{z_1}||z_2|\,\mathrm{COS}(\tau_2 - \tau_1) = x_1x_2 - \boldsymbol{\delta}^2 y_1y_2 \tag{M8}$$

Ahol Re a kételemű számok **valós részét** jelöli, **| |** a z abszolútértéket, vagy normát jelöli, COS pedig az adott számsíkon definiált koszinusz függvényt jelenti, azaz koszinuszt (cos) a komplex számsíkon, cp [arg(z)] ≡ 1 függvényt a parabolikus számsíkon és hiperbolikus koszinuszt (cosh) a hiperbolikus számsíkon, **δ,** pedig, mint mindig, azaz **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0,

$j \neq 0$, k^2=1, **$k \neq 1$**) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli.