

Téridő-modellek és a kételemű számok

*Gyorsulásmentes mozgás-modellek a kételeműek számsíkjaiban*¹

„Két mennyiséget elosztani egymással pusztán számolás; a matematika azt kitalálni, hogy mit osszunk mivel.”
(**Jordan Ellenberg**, *Ne tévedjünk*)²

Belefogtam a differenciál- és integrálszámítás fogalmainak tisztázásába a kételemű számokon, természetesen a komplex számok kivételével, hiszen annak analízise egy jól kidolgozott területe a matematikának. Kezdett túl hosszú lenni a kalkulusról³ szóló cikk, ezért az előzményeit, pontosabban a kételemű számoknak azokat a fontos összefüggéseit –, amelyek megalapozzák analízisüket – jelen írásomban foglalom össze. Az itt szereplő összefüggések egy része már szerepelt korábbi cikkeimben, de most a differenciál- és integrálszámítás kontextusában, annak előkészítésére sorakoztattam fel a matematikai alapokat, kiegészítve újakkal és értelmezésükkel.

1. Bevezetés

Gyorsulásmentes esetben a tér leszűkíthető egy dimenzióra a modellezésben, így a kételemű számok közül mind a parabolikus számok, mind a hiperbolikusok téridőt modelleznek. A parabolikus számsíkon a számok szorzása a **Galilei**-transzformációt, a hiperbolikusoknál a **Lorentz**-transzformációt modellezi.⁴ Így logikus annak feltételezése, hogy a parabolikus és hiperbolikus számok „testvérei”, a komplex számok is speciális téridőt modelleznek. A „testvér” komplex szám azonban egy alapvető pontban eltér mind a hiperbolikusoktól, mind a parabolikusoktól, ugyanis a komplex képzetes az aktuális végtelen hiányát jelöli, szemben az aktuális végtelent modellező parabolikus és hiperbolikus képzetessel. A komplexek téridőt modellező szerepét tekintve ez jelentheti azt, hogy a komplexeknél tapasztalatilag nem különbözik a tér az időtől, hiszen a tér az idő aktuális végtelenjét modellezi, ha pedig az utóbbi – tehát az aktuális végtelen – hiányzik, akkor az előbbieket – tér és idő – „egyívásúak”. „Elég lehetetlen leírni azt, amin túl tér, idő és anyag elveszítik különálló identitásukat s egymás ruháját kezdik hordani.”⁵ A tréfát félretéve, a komplexeknél a tértől nem különböző idő abban is megnyilvánul, hogy a komplex szám normája, másnéven abszolútértéke megegyezik a vektoralgebra vektorjainak abszolútértékével, amely vektorok koordinátatengelyei egyenértékűek, azaz a tapasztalatot modellezve megkülönböztethetetlenek.

¹ A kételemű számok alaptulajdonságait lásd a [Melléklet](#)ben.

² „Dividing one number by another is mere computation; figuring out what you should divide by what is mathematics.”
(**Jordan Ellenberg**, *How not to be wrong*)

³ Rövidségük miatt mind az analízis, mind a kalkulus kifejezést használni fogom „differenciál- és integrálszámítás” matematikáját jelölve.

⁴ Lásd „A Galilei transzformáció és a parabolikus számok” című cikket:

<https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok>

⁵ Nem tudtam ellenállni annak a kísértésnek, hogy itt **Terry Pratchett**-et idézzek a „Bűbájos bajok”-ból.

Richard P. Feynman (1918-1988) nem nevezi nevén a komplex téridőt, de épp ezt írja körül a QED-et leíró – azaz a kvantumelektrodinamika pályaintegrál módszerét magyarázó – könyvében⁶, amikor érthetően elmagyarázza, hogy miképp összegződnek egy adott kvantum-esemény különböző megvalósulásainak a valószínűségei, világossá téve, hogy miképp kell számításba venni a komplex amplitúdónégyzet mellett a komplex argumentumot is, amelyet időként interpretál. Összefüggésben van a komplexek fent említett „homogén” térídeje **Feynmannak** azokkal a meglátásaival is, amelyeket a fény mikrotéridőbeli viselkedésével kapcsolatban fogalmazott meg: a minden utat bejáró és bármely sebességgel haladni képes fényről. Tehát annak, amelynek fizikáját **Feynman** leírja a QED-ben, annak a matematikáját két dolog határozza meg: egyrészt a komplex képzetes aktuális végtelen-hiányt ábrázoló volta, amely összes teret és időt, másrészt a komplex számsík, mint téridő modellben a korlátlan értékészletű tangensfüggvény, mint sebesség-modell.

2. Gyorsulásmentes sebességmodellek a kételeműek számsíkjaiban

A kételemű számok tehát téridőt modelleznek, és a valós számtengely az időt, a képzetes koordinátatengely a teret modellezi, így adott a gyorsulásmentes egyenesvonalú mozgás esetén a sebesség klasszikus – differenciálszámítást sem igénylő – definiálása, azaz térbeli távolság osztva a megtett út alatt eltelt idővel. Mindez a számsíkon egy számvektor meredekségét jelenti. Felhasználva a kételemű számoknak a [Melléklet](#)ben vázolt tulajdonságait a következő adódik:

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \delta y = x \left(1 + \delta \frac{y}{x} \right) \quad (1)$$

Ahol x és y valós számok, $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = 0, \mathbf{j} \neq 0, \mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számnál $\frac{y}{x} = \mathbf{tg}\varphi$, a hiperbolikus számnál pedig $\frac{y}{x} = \mathbf{th}\tau$ bevezetésével⁷ a következőt kapom:

$$z = x(1 + \mathbf{i} \tan \varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \quad (2)$$

$$z = x \left(1 + \mathbf{j} \frac{y}{x} \right) \quad \text{a parabolikus számoknál} \quad (3)$$

$$z = x(1 + \mathbf{k} \tanh \tau) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \quad (4)$$

Látható, hogy egyedül a parabolikus számnál marad meg a sebesség klasszikus „tér-per-idő” értelmezése egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén. Ezeket sebességfogalmakat fogom most áttekinteni.

2.1. Sebességmodell a hiperbolikus számsíkon

Mindig élek azzal a lehetőséggel, hogy gyorsulásmentes egyenesvonalú mozgás esetén a tér leszűkíthető egy dimenzióra⁸ a modellezésben, így a hiperbolikus számsíkon modellezett – a speciális

⁶ Lásd ehhez „Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása” című cikk. 4. pontját:

<https://www.infinitemath.hu/archivum/egyb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa>

valamint a következő könyvet: **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

⁷ Lásd erről a [Melléklet](#)et.

⁸ **Feynman** így ír erről: „... a legáltalánosabb Lorentz-transzformáció meglehetősen bonyolult, mivel mind a négy koordinátát kombinálja. Mi továbbra is az egyszerűbb alakot fogjuk használni, mivel a relativitás valamennyi lényeges

relativitáselméletben leírt – téridőben is a valós számtengely az időt, a komplex koordinátatengely a teret szemlélteti.

Amint a (4)-es képlet mutatja; a hiperbolikus számsíkon egy *hiperbolikus-tangensfüggvényt* kapunk a sebesség modellezésére⁹, és e sebesség additivitási szabályát fogom itt bemutatni. E törvényszerűséget pedig a valóság visszaigazolja.

1. Megjegyzés

Felmerülhet valakiben, hogy miért épp a hiperbolikus-tangensfüggvényt vezettük be a (4)-es képletben. Gondolhatunk például arra, hogy ezt a hiperbolikus és trigonometrikus függvények közötti kapcsolat indokolja; figyelembe véve a történetileg évszázadokkal korábban kialakított komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakját. Ezek figyelembevételével belátható a hiperbolikus-tangensfüggvény bevezetésének szükségszerűsége.

Legyen K és K' két rendszer, amelyet a hiperbolikus számsíkon ábrázolok. Legyen a K rendszer maga a hiperbolikus számsík koordinátarendszere, a K' rendszer pedig a K -hoz képest $\frac{y_0}{x_0} = \tanh \tau_0$ sebességgel halad. Legyen a K rendszerben egy $z=x+ky$ pont, amely a K rendszerhez képest $\frac{y}{x} = \tanh \tau = v$ sebességgel halad, a K' rendszerben ezt a pontot $z'=x'+ky'$ írja le és ez a K' -höz képest $\frac{y'}{x'} = \tanh \tau' = v'$ sebességgel mozog.

2. Megjegyzés

A klasszikus irodalom K' -t vonatként, később űrhajóként érzékelteti, a mozgó pontot pedig a vonatban vagy az űrhajóban mozgó objektumként kell elképzelni.

A K és a K' rendszer között a koordinátaösszefüggések – azaz a **Lorentz**-transzformáció modellje a hiperbolikus számsíkon – a következő¹⁰:

$$x' = x \cosh \tau_0 - y \sinh \tau_0 \tag{5}$$

$$y' = y \cosh \tau_0 - x \sinh \tau_0$$

és

$$x = x' \cosh \tau_0 + y' \sinh \tau_0 \tag{6}$$

$$y = y' \cosh \tau_0 + x' \sinh \tau_0$$

Tehát mindez a kételemű számokkal kifejezve azt jelenti, hogy a $z'=x'+ky'$ pont a **Lorentz**-transzformációval a következő:

$$z' = (x \cosh \tau_0 - y \sinh \tau_0) + k(y \cosh \tau_0 - x \sinh \tau_0)$$

Hasonlóan a $z=x+ky$ pont transzformáltja az alábbi:

vonását tartalmazza.” (Richard Feynman, *Mai Fizika 2 – Relativisztikus mechanika – Forgó és rezgőmozgás*, 22. oldal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968)

⁹ Lásd ehhez „A Galilei transzformáció és a parabolikus számok” című cikk C. Mellékletének (M3) képletét: <https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok>

¹⁰ Lásd ehhez „A Galilei transzformáció és a parabolikus számok” című cikk C. Mellékletét: <https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok>

$$z = (x' \cosh \tau_0 + y' \sinh \tau_0) + \mathbf{k}(y' \cosh \tau_0 + x' \sinh \tau_0)$$

Könnyen belátható, hogy e transzformációk egységvektorral való szorzást jelentenek a hiperbolikus számsíkon, azaz:

$$z' = z(\cosh \tau_0 - \mathbf{k} \sinh \tau_0) \tag{7}$$

$$z = z'(\cosh \tau_0 + \mathbf{k} \sinh \tau_0)$$

Exponenciális alakkal felírva:

$$z' = z e^{-\tau_0 \mathbf{k}} \tag{8}$$

$$z = z' e^{\tau_0 \mathbf{k}}$$

Ne feledjük, az x és x' koordináták az időkoordináták, az y és y' pedig a térbeli koordináták modelljei, így a sebességek a következők:

$$v' = \frac{y'}{x'} = \frac{y \cosh \tau_0 - x \sinh \tau_0}{x \cosh \tau_0 - y \sinh \tau_0} \tag{9}$$

A $v = \frac{y}{x} = \tanh \tau$ alapján $y = xv = x (\tanh \tau)$ összefüggést a (9) egyenletben felhasználva, majd $(x \cosh \tau_0)$ -vel osztva – ahol $\cosh \tau_0$ sohasem 0, x -ről pedig feltesszük, hogy nem 0 – a következőt kapjuk:

$$v' = \frac{x \tanh \tau \cosh \tau_0 - x \sinh \tau_0}{x \cosh \tau_0 - x \tanh \tau \sinh \tau_0} = \frac{\tanh \tau - \tanh \tau_0}{1 - \tanh \tau \tanh \tau_0} \tag{10}$$

Tehát:

$$v' = \frac{\tanh \tau - \tanh \tau_0}{1 - \tanh \tau \tanh \tau_0} = \frac{v - v_0}{1 - v v_0} \tag{11}$$

Hasonlóan juthatunk a következőre:

$$v = \frac{\tanh \tau' + \tanh \tau_0}{1 + \tanh \tau' \tanh \tau_0} = \frac{v' + v_0}{1 + v' v_0} \tag{12}$$

Azaz a sebességek nem a klasszikus módon adódnak össze, hanem a *hiperbolikus-tangensfüggvény* függvényváltozójának additivitása szerint, hiszen például a (12) egyenlet alapján a következő igaz:

$$v = \tanh \tau = \frac{\tanh \tau' + \tanh \tau_0}{1 + \tanh \tau' \tanh \tau_0} = \tanh(\tau' + \tau_0) \tag{13}$$

2.2. Sebességmodell a parabolikus számsíkon

A (3) alapján a parabolikus számoknál megmarad a sebességek klasszikus „tér/idő” összefüggése, és a parabolikus számok szorzásával a **Galilei**-transzformációt modellezve az egyenesvonalú és gyorsulásmentes sebességösszegzés klasszikus additivitását kapjuk.¹¹

¹¹ Lásd ehhez „A Galilei transzformáció és a parabolikus számok” című cikket:

<https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok>

Mozogjon a K' rendszer egyenesvonalú egyenletes mozgással, és v_0 sebességgel a K rendszerhez képest, amely itt a parabolikus számsík koordinátarendszerének felel meg. Az x koordinátatengely jelölje az időt, az y pedig a teret. Ha a két rendszer eredetileg egybeesett, azaz origójuk azonos, akkor a **Galilei**-transzformáció szerint:

$$y' = y - v_0 x \quad (14)$$

$$x' = x$$

Ne feledjük hát, hogy y egy térbeli irány, x pedig az idő modellje!

A parabolikus számsíkon modellezve a rendszereket, legyen a K rendszerben egy $z = x + jy$ pont, amely a K rendszerhez képest $\frac{y}{x} = v$ sebességgel halad, a K' rendszerben ezt a pontot $z' = x' + jy'$ írja le és a K' -höz képest $\frac{y'}{x'} = v'$ sebességgel mozog.

Így:

$$x' + jy' = x' \left(1 + j \frac{y'}{x'} \right) = x' (1 + jv') \quad (15)$$

A (15) egyenletben a (14) összefüggéseit, valamint a parabolikus számok tulajdonságait felhasználva:

$$x' (1 + jv') = x' + jy' = x + j(y - v_0 x) = x \left(1 + j \left(\frac{y}{x} - v_0 \right) \right) = x' (1 + j(v - v_0)) \quad (16)$$

Tehát a parabolikus számsíkon valóban a klasszikus sebességösszegzés modelljét kaptuk:

$$v' = v - v_0 \quad (17)$$

A (14) összefüggéseit, valamint a parabolikus számok tulajdonságait felhasználva a fentiekből könnyű levezetni, hogy a **Galilei**-transzformáció itt is egységvektorral való szorzást jelent, csak itt egy parabolikus egységvektor a szorzótényező:

$$z' = z e^{-v_0 j} \quad (18)$$

$$z = z' e^{v_0 j}$$

2.3. Sebességmodell a komplex számsíkon

A komplex számoknál a sebességre egy tangensfüggvényt kapok. Mivel a komplex téridő még nem vizsgált a fizikában, hiszen a komplex számok téridőt modellező szerepét sem fedezte fel a fizika, ezért ezt a sebességösszefüggést még nem igazolták tapasztalatián, de matematikája korrekt és a következőkben ezt mutatom be.

Most is gyorsulásmentes egyenesvonalú mozgást végző rendszerek közötti összefüggéseket vizsgálunk, és a teret leszűkíttem egy dimenzióra a modellezésben, így a komplex számsíkon modellezett téridőben is a valós számtengely az időt, a komplex koordinátatengely a teret modellezi.

Amint a (2)-es képlet mutatja; a komplex számsíkon egy tangensfüggvényt kapunk a sebesség modellezésére. E sebesség additivitási szabályát egyelőre csak matematikailag tudjuk bemutatni, ami nem más, mint a tangensfüggvény függvényváltozójának additivitása szerinti összegzés. Ezt mutatom be az alábbiakban.

Legyen K és K' két rendszer, amelyeket a komplex számsíkon ábrázolok. A K rendszer maga a komplex számsík koordinátarendszere. A K' rendszer a K -hoz képest $\frac{y_0}{x_0} = \tan \tau_0$ sebességgel halad. Legyen a K rendszerben egy $z=x+iy$ pont, amely a K rendszerhez képest $\frac{y}{x} = \tan \tau = v$ sebességgel halad, a K' rendszerben ezt a pontot $z'=x'+iy'$ írja le és a K' -höz képest $\frac{y'}{x'} = \tan \tau' = v'$ sebességgel mozog.

Tapasztalati bizonyíték híján egyelőre csak matematikai összefüggés, hogy a K és a K' rendszer között a koordinátaösszefüggések a következők a komplex számsíkon:

$$x' = x \cos \tau_0 + y \sin \tau_0 \quad (19)$$

$$y' = y \cos \tau_0 - x \sin \tau_0$$

és

$$x = x' \cos \tau_0 - y' \sin \tau_0 \quad (20)$$

$$y = y' \cos \tau_0 + x' \sin \tau_0$$

Tehát mindez a kételemű számokkal kifejezve azt jelenti, hogy a $z'=x'+iy'$ pontra a fenti transzformációt alkalmazva z' a következő:

$$z' = (x \cos \tau_0 + y \sin \tau_0) + i(y \cos \tau_0 - x \sin \tau_0)$$

Hasonlóan a $z=x+iy$ pont transzformáltja az alábbi:

$$z = (x' \cos \tau_0 - y' \sin \tau_0) + i(y' \cos \tau_0 + x' \sin \tau_0)$$

Könnyen belátható, hogy e transzformáció is egységvektorral való szorzást jelent, de most a komplex számsíkbeli egységvektort értve, azaz:

$$z' = z(\cos \tau_0 - i \sin \tau_0) \quad (21)$$

$$z = z'(\cos \tau_0 + i \sin \tau_0)$$

Exponenciális alakkal felírva:

$$z' = z e^{-\tau_0 i} \quad (22)$$

$$z = z' e^{\tau_0 i}$$

Most se feledjük, az x és x' koordináták az időkoordináták, az y és y' pedig a térbeli koordináták modelljei.

Ezek után a sebességek a következők:

$$v' = \frac{y'}{x'} = \frac{y \cos \tau_0 - x \sin \tau_0}{x \cos \tau_0 + y \sin \tau_0} \quad (23)$$

A $v = \frac{y}{x} = \tan \tau$ alapján $y=xv=x (\tan \tau)$ összefüggést a (23) egyenletben felhasználva, majd $(x \cos \tau_0)$ -vel osztva – ahol feltesszük, hogy x és $\cos \tau_0$ nem 0 – a következőt kapjuk:

$$v' = \frac{x \tan \tau \cos \tau_0 - x \sin \tau_0}{x \cos \tau_0 + x \tan \tau \sin \tau_0} = \frac{\tan \tau - \tan \tau_0}{1 + \tan \tau \tan \tau_0} \quad (24)$$

Tehát:

$$v' = \frac{\tan \tau - \tan \tau_0}{1 + \tan \tau \tan \tau_0} = \frac{v - v_0}{1 + v v_0} \quad (25)$$

Hasonlóan juthatunk a következőre:

$$v = \frac{\tan \tau' + \tan \tau_0}{1 - \tan \tau' \tan \tau_0} = \frac{v' + v_0}{1 - v' v_0} \quad (26)$$

Azaz a sebességek nem a klasszikus módon adódnak össze, hanem a tangensfüggvény függvényváltójának additivitása szerint, hiszen például a (26) egyenlet alapján a következő igaz:

$$v = \tan \tau = \frac{\tan \tau' + \tan \tau_0}{1 - \tan \tau' \tan \tau_0} = \tan(\tau' + \tau_0) \quad (27)$$

És valóban, a komplex számsíkon is szorzásnál az argumentumok összeadódnak, azaz a szorzat argumentuma a tényezők argumentumainak összege, tehát a (27)-es egyenlet komplex számok szorzásából adódó sebességösszegzést, ugyanakkor egy *téridőbeli* forgást mutat.

Bár azt írtam korábban, hogy a komplex számok téridőt modellező szerepe tapasztalatilag nem igazolt, pontosabban, hogy *nem vizsgált* ez a téridő, de ez nem teljesen igaz, hiszen az interferencia jelensége jól vizsgált a fizikában, még ha *értelmezése* máig vita tárgya. A kvantummechanika (QM) valószínűségi modelljébe épp azért kerültek be a komplex számok, mert velük tökéletesen leírhatóak voltak a tapasztalatok. Így a komplex számok szerepe tapasztalatilag igazolt a kvantumvilágban, csak a *téridő-értelmezésük* hiányzik. Tehát nem egy tapasztalat, hanem egy értelmezés hiányzik, amit viszont épp itt fogalmaztam meg. Így azt állítom, hogy a sebességösszegzés tangens-szabályát, ha nem is direktben, de áttételesen igazolják azok a tapasztalatok, amelyet **Feynman** a fény mikrotéridőbeli tulajdonságairól leírt¹², azaz kvantumszinten a fénysebességnek nincs határa, és nem létezik a másik korlát sem, azaz a fény egyenesvonalú terjedése sem törvényszerű.

Nagyon fontos észben tartani, hogy a gyorsulásmentes **egyenesvonalú mozgás a térben egyenesvonalúra vonatkozik**, amely **a téridőben nem egyenesvonalú**, hiszen a hiperbolikus esetben egy *téridőbeli hiperbolán* való mozgást (**Lorentz**-transzformációt) ábrázol, egyedül a parabolikus esetben mutat szintén *téridőbeli egyenes* mentén való elmozdulást (**Galilei**-transzformációt), a komplex téridőben pedig egy *téridőbeli körmozgást*.

Visszatérve a komplex téridő sebességösszegzésében a tangens-szabályra, magyarázatra szorul, miképp függ ez össze a két korlát – a sebességhatár és a térbeli egyenesvonalú terjedés – hiányával kvantumszinten. Hogy **a fénysebességnek nincs határa kvantum szinten, az a sebesség tangensfüggvény voltával áll kapcsolatban**. A tangensfüggvényből, mint sebesség-modellből következik a sebesség korlátlan volta, de fordítva a sebesség korlátlan voltából a parabolikus eset is adódhatna. A sebesség korlátlan volta és a klasszikus összegzési szabály hiányából már következik a tangens-szabály a sebesség-összegzésre. *A térben* egyenesvonalú terjedés törvényszerűségének hiánya a komplex képzetesnek az aktuális végtelen hiányát modellező voltával áll kapcsolatban, tehát azzal, hogy **az aktuális végtelen hiánya a komplexeknél a tapasztalatilag nem különböző teret és időt** szemlélteti. Így a fenti bekeretezett figyelemfelhívás alapján megkülönböztethetetlen a térben

¹² Lásd erről: **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

egyenesvonalú az időben egyenesvonalútól, magyarul **tapasztalatilag nem különböztethető meg a térben egyenesvonalú mozgás a tetszőleges térbeli pályától kvantumszinten**. Szemléletessé teheti ezt a téridőt az a tulajdonsága is, hogy ugyan tetszőleges lehet a mérete, de aktuálisan csak véges lehet, hiszen épp azt modellezi, amikor nincs aktuális végtelen. A sebesség korlátlan volta is azt jelenti, hogy ugyan tetszőlegesen nagy lehet, de aktuálisan mindig véges. Mindezek matematikájából már következnek a **Feynman** által megfogalmazott tapasztalatok: egyrészt a sebességkorlát hiánya, másrészt a fény pályájának tetszőleges volta, ami abból következik, hogy a tér/idő végeessége és a sebesség tetszőlegesen nagy volta miatt kvantumszinten a téridő minden pontját nemnulla valószínűséggel járja be a fény.

Ne tévedjünk! Változatlanul inerciarendszerekről van szó itt is, azaz a *térben* egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgással mozgó (gyorsulásmentes) rendszerek közötti transzformációkról. Erre a komplex téridőben is igaz az, amit már a hiperbolikus téridővel, azaz a **Lorentz**-transzformáció kapcsán egy korábbi cikkemben¹³ megfogalmaztam, hogy az egyik rendszerből klasszikus méréssel nem ellenőrizhetőek a másikon mérhető téridőbeli távolságok. Csak fény – vagy egyéb közvetítő – útján és matematikai számításokkal szerzhető információ a másik rendszerről. Így a **Lorentz**- és a **Galilei**-transzformáció mellett a komplex *téridőbeli körmozgásról* látással szerzett információ sem más, mint egy *téridő-perspektíva* az egyik rendszerből a másikra tekintve – itt a klasszikus méreteink világából a kvantumok világát figyelve – amely során a látás-tapasztalatok éppúgy nem az igazi méreteket mutatják, ahogy a térben távoli tárgyak perspektivikus mérete sem.

3. A sebességmodellek, mint a külső és belső szorzatok hányadosai

A kételemű számok és a geometriai algebra összefüggéseit vizsgálva definiáltam a kételeműeken is a geometriai szorzathoz hasonlóan egy skaláris és egy ferde-skaláris szorzat segítségével.

3.1. Emlékeztetőül a szorzatok definíciói

Az egyenletekben a \bar{z}_1 a z_1 szám konjugáltját jelenti, Re pedig egy kételemű szám valós, Im pedig a képzetes részét jelöli.

SKALÁRIS VAGY BELSŐ SZORZAT

Hiperbolikus számsík:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| \cosh(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad (28)$$

Parabolikus számsík:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| = x_1 x_2 \quad (29)$$

Komplex számsík:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| \cos(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \quad (30)$$

¹³ Lásd a „Szimmetriák és téridők” című cikket; <https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/426-szimmetriak-es-teridok>

A kételemű számokra a skaláris szorzat általánosan a következő:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \text{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| \text{COS}(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 - \delta^2 y_1 y_2 \quad (31)$$

Ahol COS az adott számsíkon definiált koszinusz-függvényt jelöli, és $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{j}^2 = 0, \mathbf{j} \neq 0$, $\mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó.

FERDE-SKALÁRIS SZORZAT:

Hiperbolikus számsík:

$$\omega(z_1, z_2) = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| \sinh(\tau_2 - \tau_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (32)$$

Parabolikus számsík¹⁴:

$$\omega(z_1, z_2) = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| (sp \arg z_2 - sp \arg z_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (33)$$

Komplex számsík:

$$\omega(z_1, z_2) = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| \sin(\tau_2 - \tau_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (34)$$

A kételemű számokra a ferde-skaláris szorzat általánosan a következő:

$$\omega(z_1, z_2) = \text{Im}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| \text{SIN}(\tau_2 - \tau_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (35)$$

Ahol SIN az adott számsíkon definiált szinuszfüggvényt jelöli.

GEOMETRIAI SZORZAT:

$$\Pi(z_1, z_2) = \bar{z}_1 z_2 = \langle z_1, z_2 \rangle + \delta \omega(z_1, z_2) \quad (36)$$

Ahol $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{j}^2 = 0, \mathbf{j} \neq 0$, $\mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\langle z_1, z_2 \rangle$ a skaláris, $\omega(z_1, z_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ a ferde-skaláris szorzat az adott kételemű számsíkon.

3. Megjegyzés

Első látásra a geometriai szorzat zavarba ejtő lehet két okból is.

- Egyfelől a definícióban szereplő szorzatban az egyik kételemű tényező konjugáltja szerepel, de egy szám konjugáltjának a konjugáltja a számmal azonos, így például $\Pi(\bar{z}_1, z_2) = \bar{\bar{z}}_1 z_2 = z_1 z_2 = \langle \bar{z}_1, z_2 \rangle + \delta \omega(\bar{z}_1, z_2) = \text{Re}(z_1 z_2) + \delta \text{Im}(z_1 z_2)$. Tehát tetszőleges kételemű szorzat felírható geometriai szorzatként.
- Másfelől a kételeműek szorzata kommutatív, ez igaz a geometriai szorzat definíciójában szereplő szorzatra is. A geometriai szorzatban a számok konjugációja az, ami nem felcserélhető, pontosabban felcserélés esetén előjelet vált a szorzat, azaz: $\Pi(z_1, z_2) = \bar{z}_1 z_2 = -z_1 \bar{z}_2 = -\Pi(z_2, z_1)$. Tehát a geometriai szorzatot definiáló Π függvényben nem szabad felcserélni a változókat, pontosabban a csere előjel-változással jár. Ugyanis a Π függvényben a változók sorrendje határozza meg, hogy közülük az első konjugáltja szerepel a szorzatban: $\Pi(z_1, z_2) = \bar{z}_1 z_2$.

¹⁴ A kevésbé ismert parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényekről lásd a [Mellékletet](#).

KÜLSŐ SZORZAT:

A geometriai szorzat (36) és a ferde-skaláris szorzat (32), (33), (34) definícióinak felhasználásával a külső szorzatok a következők:

Hiperbolikus számsík:

$$z_1 \wedge z_2 = \mathbf{k} \omega(z_1, z_2) \text{ ahol } \mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{k} \neq 1 \quad (37)$$

Parabolikus számsík:

$$z_1 \wedge z_2 = \mathbf{j} \omega(z_1, z_2) \text{ ahol } \mathbf{j}^2 = 0, \mathbf{j} \neq 0 \quad (38)$$

Komplex számsík:

$$z_1 \wedge z_2 = \mathbf{i} \omega(z_1, z_2) \text{ ahol } \mathbf{i}^2 = -1 \quad (39)$$

A kételemű számokra a külső szorzat általánosan a következő:

$$z_1 \wedge z_2 = \delta \omega(z_1, z_2) \quad (40)$$

Ahol $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{j} \neq 0, \mathbf{k}^2=1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\omega(z_1, z_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ ferde-skaláris szorzat mindhárom kételemű számsíkon.

A külső szorzatokat felhasználva a geometriai szorzat a következő mindhárom számsíkon:

$$\mathbf{\Pi}(z_1, z_2) = \overline{z_1} z_2 = \langle z_1, z_2 \rangle + z_1 \wedge z_2 \quad (41)$$

3.2. A skaláris szorzat algebrája és geometriája

A skaláris szorzat az euklideszi geometriában két hasznos tulajdonsággal bír, és ugyanezekkel a tulajdonságokkal a kételeműek számvektorai is rendelkeznek.

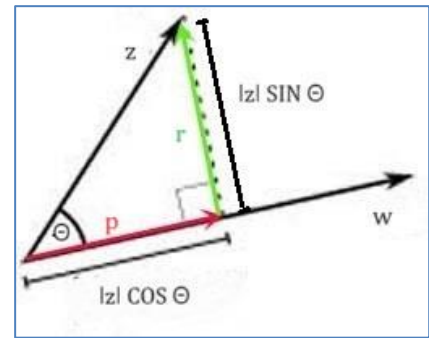
Egyrészt egy vektor önmagával vett skalárszorzata a vektor hosszának négyzete, számvektor esetén a hossz alatt a számvektor normáját, más kifejezéssel abszolútértékét kell érteni. Ennek belátása triviális a definíciók alapján.

Másrészt a skalárszorzatot geometriailag úgy lehet értelmezni, mint két vektor esetén az egyiknek a másik irányába eső vetületének ez utóbbival való skaláris szorzatát. Lásd ehhez az 1. ábrát, ahol „piros” \mathbf{p} vektor jelöli a \mathbf{z} vektor \mathbf{w} -re való vetületét, és a $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle$ skaláris szorzat egyenlő a \mathbf{p} vektor és \mathbf{w} skaláris szorzatával, azaz:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle \quad (42)$$

Mindez nemcsak az 1. ábrán bemutatott euklideszi síkon igaz, de a kételeműek számsíkjain is. Ennek belátása könnyű, de nem triviális, mivel el kell tekintenünk az ábrának a klasszikus merőlegességet sugalló jellegétől, hiszen a számsíkok geometriája különbözik az euklideszitől. Meg kell hát vizsgálni, mit jelent e számsíkokon a merőlegesség.

A merőlegesség azonosan definiált mindhárom számsíkon; azaz két számvektort akkor nevezem merőlegesnek, ha a skalárszorzatuk nullával egyenlő. A különbözőségek pedig a skalárszorzatok eltéréseiből adódnak. Egyedül a komplex számsíkon kapunk olyan



1. ábra

merőlegesség fogalmat – $\pi/2$ -vel forgatást – amely megegyezik az intuitív képünkkel. A hiperbolikus számsíkon az egymásra merőleges vektorok egyenesei az egységhiperbolák aszimptotáira tükrözöttek, a parabolikus számsíkon pedig a képzetes számtengelyre illeszkedő számvektorok merőlegesek minden másik számvektorra. A merőlegességnek ezek a *geometriai* jellemzései nemcsak konstraintitívek, de bonyolultak is, pedig *algebrailag* igen egyszerűen, ráadásul mindhárom számsíkra egységesen szemléltethető a merőlegesség fogalma: merőleges két számvektor, ha az egyik egyenlő a másik képzetes számszorosával:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow z_1 = b\delta z_2 \quad (43)$$

Ahol b valós szám, és $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{j}\neq 0, \mathbf{k}^2=1, \mathbf{k}\neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. Ez egyedül a komplex számoknál jelenti a klasszikus meredekséget, hiszen ott, ha a tiszta képzetes számmal, azaz \mathbf{i} -vel szorzunk egy komplex számot, a szorzatvektor az eredeti vektor elforgatását jelenti $\pi/2$ -vel, azaz az eredeti számvektorra merőleges a szorzatvektor. Általánosan is egyszerű belátni, hogy **bármely kételemű számsíkon két számvektor skalárszorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha az egyik egyenlő a másik képzetes számszorosával.** A bizonyítástól most eltekintek, egy korábbi cikkemben erre kitértem.¹⁵

A fentiek ismeretében már könnyű belátni, hogy a (42)-es összefüggés a kételeműek számsíkjaiban is igaz. Ennek bizonyítását az olvasóra bízom, ha van kedve játszani a számokkal. Csak azt a jó tanácsot kell megfogadni, hogy ne geometriai, hanem algebrai eszközöket használjunk: a kételemű számok tulajdonságait és a (43)-as bizonyítható állítást.

Két összefüggést fontos hangsúlyozni. Ha az egyik definíció közülük, akkor a másik bizonyítható tétel:

- **A kételeműek számsíkjaiban két számvektort akkor nevezek merőlegesnek, ha a skalárszorzatuk nullával egyenlő.**
- **Bármely kételemű számsíkon két számvektor skalárszorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha az egyik egyenlő a másik képzetes számszorosával**

3.3. A ferde-skaláris szorzat algebraja és geometriája

Az euklideszi síkon egy paralelogramma területe egyenlő két szomszédos oldalának hossza, valamint az oldalak által közbezárt szög szinuszával szorzatával:

$$T = |a||b|\sin\varphi \quad (44)$$

A *komplex* számsíkon definiált ferde-skaláris szorzat is két számvektor által kifésített paralelogramma előjeles területének nagysága, lásd a (34)-es egyenletet, figyelembe véve, hogy egy komplex szám konjugáltjának abszolútértéke egyenlő az adott szám abszolútértékével. A ferde skaláris szorzatok azonos módon definiáltak a parabolikus és a hiperbolikus számsíkokon is – lásd a (32)-, és (33)-as egyenleteket – de ezeken a számsíkokon a terület fogalma még nem

¹⁵ Lásd „A szimplektikus tevé „természetes előfordulásai” II.” című cikket, <https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/170-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai-ii>

definiált. Egy korábbi cikkemben¹⁶ számvektorpárok ekvivalenciájaként vezettem be a kételeműeken általánosan egy területfogalmat a ferde-skaláris szorzat segítségével, majd beláttam, hogy ez a területfogalom ekvivalens a komplex számsík – és az euklideszi sík – paralelogrammáinak területével. Így kezdetben a ferde-skaláris szorzatokat akartam területként bevezetni, de később meg fogom indokolni, hogy miért választom inkább a külső szorzatot – tehát a ferde-skaláris szorzat képzetes számszorosát – a terület definíciójaként.

4. Megjegyzés

Aki hasonlóságot vél felfedezni a vektoralgebra vektoriális szorzata és a fent definiált „vektoriális terület” fogalma, mint külső szorzat között, az nem téved. Épp ez az egyik ok, amiért a külső szorzatot választottam a terület definíciójaként. Hasznos lesz a matematikai fizikában.

Tehát két vektor – legyenek ezek \mathbf{z} és \mathbf{w} számvektorok – által kifeszített paralelogramma területének nevezem a következőt:

$$T = \mathbf{z} \wedge \mathbf{w} = \delta \omega(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \delta \operatorname{Im}(\bar{z}w) = \delta |\bar{z}| |w| \sinh(\Theta_z - \Theta_w) = \delta (z_1 w_2 - z_2 w_1) \quad (45)$$

Ahol szokás szerint $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2 = -1, \mathbf{j}^2 = 0, \mathbf{j} \neq 0, \mathbf{k}^2 = 1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, Θ_z a \mathbf{z} vektor, Θ_w pedig a \mathbf{w} vektor argumentuma, z_1, z_2, w_1, w_2 pedig a vektorok **Descartes**-koordinátái, azaz $\mathbf{z} = z_1 + \delta z_2$ és $\mathbf{w} = w_1 + \delta w_2$.

Könnyen igazolható, hogy a ferde-skaláris szorzat – és így két vektor által kifeszített paralelogramma területe – akkor 0, ha a két vektor párhuzamos, másképp az egyik vektor a másik valós számszorosa.¹⁷

Két fontos összefüggés közül, ha az egyik definíció, akkor a másik bizonyítható tétel:

- **A kételeműek számsíkjaiban két számvektort akkor nevezek párhuzamosnak, ha a ferde-skaláris szorzatuk nullával egyenlő.**
- **Bármely kételemű számsíkon két számvektor ferde-skaláris szorzata akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha az egyik egyenlő a másik valós számszorosával:**

3.4. A sebességmodellek speciális szorzatokkal kifejezve

A geometriai szorzat (36)-os alakja egyrészt egy kételemű számot határoz meg, másrészt definíció szerint két kételemű szám szorzata. Ez eszembe juttatja a **Lorentz**-, a **Galilei**- és a

¹⁶ Lásd „A geometriai algebra alapelemei és a számok II. – A bivektor és a paralelogrammák ekvivalenciája a három számsíkon” című cikket;

<https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/185-a-geometriai-algebra-alapelemei-%C3%A9s-a-sz%C3%A1mok-ii>

¹⁷ Lásd Lásd „A szimplektikus tevé „természetes előfordulásai” II.” című cikket,

<https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/170-a-szimplektikus-teve-termeszetes-elofordulasai-ii>

komplex téridőbeli inerciarendszerek közötti transzformációk exponenciális alakját a (8), (18) és (22) egyenletekben. Általánosan igaz az inerciarendszerek közötti téridőkben, hogy

$$z' = ze^{-\tau_0\delta} \quad (46)$$

Ahol, mint mindig $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{j}\neq 0, \mathbf{k}^2=1, \mathbf{k}\neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A (46)-os egyenletben a jobboldali szorzatot geometriai szorzatnak tekintve a következőt kapjuk:

$$z' = ze^{-\tau_0\delta} = \Pi(\bar{z}, e^{-\tau_0\delta}) = Re(ze^{-\tau_0\delta}) + \delta Im(ze^{-\tau_0\delta}) \quad (47)$$

Így a szorzatok definícióit felhasználva:

$$z' = \langle \bar{z}, e^{-\tau_0\delta} \rangle + \delta \omega(\bar{z}, e^{-\tau_0\delta}) \quad (48)$$

Inerciarendszerek modellezéséről van szó, így lényeges a sebesség transzformáltja, ami a (48) szerint:

$$v' = \frac{\omega(\bar{z}, e^{-\tau_0\delta})}{\langle \bar{z}, e^{-\tau_0\delta} \rangle} \quad (49)$$

Így a sebesség transzformáltját felírtuk egy ferde-skaláris és egy skaláris szorzat hányadosaként.

4. Összegzés

Az egész cikk a kételemű számok legfontosabb összefüggéseit tartalmazza a differenciál- és integrálszámításra tekintettel, ezért nehéz ezek közül is a legjelentősebbeket kiemelni. Mindenesetre a bekeretezett szövegek különös figyelmet érdemelnek a mozgások tér- és téridőre vonatkozó jellemzését illetően, illetve a skaláris és ferde-skaláris szorzatok kétféle, egymással ekvivalens definícióira vonatkozóan. Sejthető, bár a cikkben direktben nem utaltam rá, hogy miért készítik elő a felsorolt összefüggések a differenciál- és integrálszámítást, hiszen egyrészt a sebességek a differenciálszámítás speciális elemei, mivel a sebesség az út idő szerinti deriváltja, másrészt az integrálszámítás eredetileg nem más, mint területszámítás és e cikk bevezetett egy területfogalmat a kételeműeken.

Melléklet – A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \delta y = x \left(1 + \delta \frac{y}{x} \right) \quad (\text{M1})$$

ahol x és y valós számok, $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{j} \neq 0, \mathbf{k}^2=1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus**, vagy **hiperbolikus** számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x} = \mathbf{tg}\varphi$, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x} = \mathbf{th}\tau$ bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \mathbf{i} \tan \varphi) = \varrho(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \quad (\text{M2})$$

$$z = x \left(1 + \mathbf{j} \frac{y}{x} \right) = \varrho \left(\mathbf{cp} \frac{y}{x} + \mathbf{jsp} \frac{y}{x} \right) \quad \text{a parabolikus számoknál} \quad (\text{M3})$$

$$z = x(1 + \mathbf{k} \tanh \varphi) = \varrho(\cosh \varphi + \mathbf{k} \sinh \varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \quad (\text{M4})$$

ahol ϱ -t a számok **normájának**, vagy – a komplexek nyomán – **abszolútértékének** a φ -t a számok **argumentumának** nevezem, mindkettőt pedig a számok **polárkoordinátáinak** hívom, szemben az kételeműek (M1)-beli *algebrai* alakjával, amelyben x és y a számok **Descartes**-koordinátái a kételeműek számsíkjaiban.

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a \mathbf{z} parabolikus szám normája (abszolútértéke) $|z| = x$, argumentuma $\mathbf{arg} \mathbf{z} = \mathbf{y}/x$, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a $\mathbf{cp} [\mathbf{arg}(\mathbf{z})] \equiv 1$ függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a $\mathbf{sp} [\mathbf{arg}(\mathbf{z})] = \mathbf{y}/x$, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a $\mathbf{tp} [\mathbf{arg}(\mathbf{z})] = \mathbf{y}/x$.

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta \varphi} \quad (\text{M5})$$

ahol φ az argumentum és ϱ a norma az adott számsíkon, és mint fent $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{j} \neq 0, \mathbf{k}^2=1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy **komplex**, **parabolikus** vagy **hiperbolikus** számsíkról van szó.

A $|z|$ **abszolútérték-jelölést** jelölést is használva, mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$|z| = \varrho = \sqrt{x^2 - \delta^2 y^2} = \sqrt{z \bar{z}}$$

$$\delta \varphi = \ln z - \ln \varrho = \ln \frac{z}{\varrho} = \ln \frac{x + \delta y}{\sqrt{x^2 - \delta^2 y^2}} = \ln \sqrt{\frac{x + \delta y}{x - \delta y}} = \ln \sqrt{\frac{\bar{z}}{z}} \quad (\text{M6})$$

ahol δ , mint mindig, azaz $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{j} \neq 0, \mathbf{k}^2=1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és \bar{z} a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \delta y \quad \text{ha} \quad z = x + \delta y \quad (\text{M7})$$

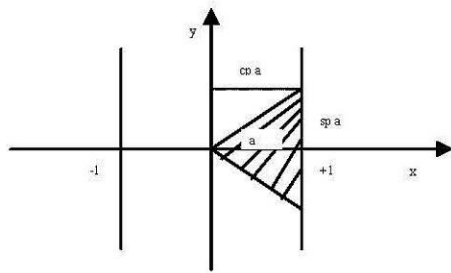
Mindhárom számsíkon fontos szerepe van a fizikából jól ismert **skalárszorzatnak**, amely a három számsíkon általánosan a következő:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \text{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1| |z_2| \text{COS}(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 - \delta^2 y_1 y_2 \quad (\text{M8})$$

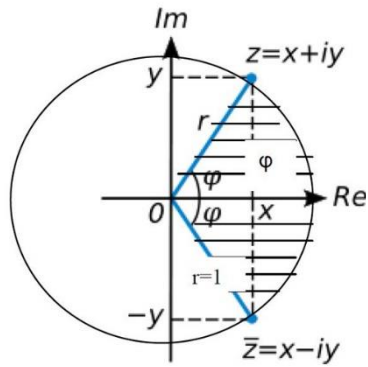
Ahol Re a kételemű számok **valós részét** jelöli, $|z|$ a z abszolútértéket, vagy normát jelöli, COS pedig az adott számsíkon definiált koszinusz függvényt jelenti, azaz koszinuszt (cos) a komplex számsíkon, $\mathbf{cp} [\mathbf{arg}(\mathbf{z})] \equiv 1$ függvényt a parabolikus számsíkon és hiperbolikus koszinuszt (cosh) a hiperbolikus számsíkon, δ , pedig, mint mindig, azaz $\delta = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1, \mathbf{j}^2=0, \mathbf{j} \neq 0, \mathbf{k}^2=1, \mathbf{k} \neq 1$) aszerint,

hogyan komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és \bar{z} a z konjugáltját jelöli.

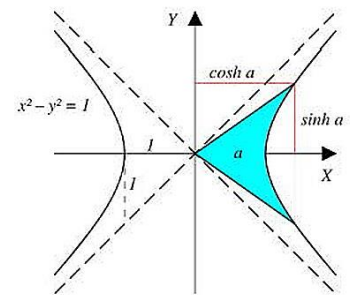
A számsíkok szemléltetése:



Parabolikus számsík



Komplex számsík



Hiperbolikus számsík