A végtelen kicsiben és nagyban I.

Avagy az intenzív és az extenzív végtelen

> *„Ahhoz, hogy megismerjük azoknak a számoknak a természetét, amelyek szerint például a "geometriai távolságot" meg kell határozni, tudnunk kell, hogy mi történik mind a végtelenül kis, mind a végtelenül nagy távolságban. Ezek a kérdések még ma sincsenek egyértelműen megoldva."*
> ***(Roger Penrose)***[1]

1. Bevezetés

Eddig másról sem írtam, mint arról, hogy a kontinuumhipotézist (CH) és alternatíváit[2] modellező[3] kételemű számok[4] képzetesei a végtelent mind végtelenül kicsiben (az intenzív végtelenben), mind pedig végtelenül nagyban (az extenzív végtelenben) modellezik, azaz a végtelennek olyan minőségében eltérő jellegét ábrázolják, amely mind az intenzív, mind az extenzív végtelen sajátja. A projektív geometria ideális elemei is érzékeltetnek valami hasonlót, amelyek ugyan intuitív módon egy „végtelen távoli" ponttal és egyenessel bővítik az egyenest, illetve a síkot, de e „végtelenséget" nem mennyiségileg jellemzik a matematikai leírásban – ez ellentmondásokhoz vezetne[5] –, hanem egy egyenes vagy egy sík *állásával* szemléltetik.[6] Így a „messze távol" értelmezése itt is lehet akár intenzív, akár extenzív végtelen abban az értelemben, hogy már nem mennyiségként ábrázolt a végtelen, hanem olyan minőségileg új elemként reprezentált, amely mindkét esetet ábrázolhatja. Ez

---

[1] *„In order to know the nature of the numbers according to which „geometrical distance" to be defined, for example, it would be necessary to know what happens both at indefinitely tiny and indefinitely large distance. Even today, these questions are without clearcut resolution."* **Roger Penrose**, *The Road to Reality*, Jonathan Cape, London, 2004, 58. p.

[2] A CH feltételezése szerint a valós számok számossága – azaz a kontinuumszámosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. Ennek két alternatívája az, hogy közöttük egyetlen egy, vagy legalább kettő – amiből következik, hogy végtelen sok – végtelen nagy számosság létezik.

[3] Lásd erről például a témát összefoglaló „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*" című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

[4] Lásd a kételemű számokról az 1. Mellékletet.

[5] *„Az új térelemek bevezetésekor nem volt szó arról, hogy egy pont vagy egy egyenes minden határon túl eltávolodik. Ha valaki így akarna szemléletes jelentést adni az újonnan bevezetett pontoknak, és egyeneseknek, és azokat «végtelenbe távozott» pontoknak és egyeneseknek látja, akkor jelentős akadályok állják útját a szemléletes kép kialakulásának. Ilyen akadályt jelent az a kijelentés, hogy ha egy egyenesen az egyik vagy a másik irányban «távozik a végtelenbe» egy pont, akkor ugyanahhoz a határhelyzethez jut, s hogy a különböző irányokban «végtelenbe távozott» pontok nem kört, hanem egyenest alkotnak. Jobb tehát, ha lemondunk arról, hogy az újonnan bevezetett pontoknak és egyeneseknek ilyesfajta szemléletes jelentést adjunk. Jobbnak mondhatjuk ezért az ideális pont és ideális egyenes elnevezéseket, mert a «végtelen távoli» jelző zavaros gondolatokra csábíthat."* (***Hajós György***, „*Bevezetés a geometriába*")

[6] A kételemű számok és a projektív geometria kapcsolatáról lásd a 2. Mellékletet. Meg kell jegyeznem, hogy amíg a parabolikus számok jól modellezhetőek a jelenlegi projektív geometriával, addig a hiperbolikus számsík „projektív geometriai" megfelelőjének létezéséről nincs tudomásom, de az egyenesek kiegészítése végtelen sok ideális ponttal jó geometriai modellje lehet a hiperbolikus esetnek.

rendben is lenne, azonban a matematikának más területei – mondhatnám majdnem az egésze – különbséget tesz végtelenül kicsi és végtelenül nagy *távolságok* között, ráadásul mindenkinek van egy ösztönös képe a végtelenül osztható kicsiről és a végtelenül kiterjedt nagyról, természetesen csak potenciális értelemben. Így feltétlenül szükséges annak végiggondolása, hogy mikor és miért van szükség e megkülönböztetésekre a matematikában, és vajon mi az oka annak, hogy ezek a megkülönböztetések hol szükségesek, hol nem. Többek között ezeken szeretnék most töprengeni.

Még két fontos fogalom tartozik e tárgykörbe, amelyet gyakran használok, és nem biztos, hogy közérthető gondolat; mégpedig az aktuális és potenciális létezés ideája. Nem fogok pontos definíciókkal élni velük kapcsolatban, csak közelítő leírással, hasonlatokkal próbálkozom. Aktuálisan létező az, amit egészében megtapasztalhatok, a potenciálisan létező viszont teljességében „még” nem tapasztalható, csak folyamatában konstruálhatónak gondolt. Másképp fogalmazva az aktuális lét egy „megvalósultság”, a potenciális lét pedig a kialakulás folyamatában a létezés lehetőségével, képességével bír.

Mondhatjuk továbbá azt is, hogy a *valóságban* a potenciális végtelenség, mint végtelen folyamat[7] **az időbeliséghez kötődik, míg az aktuális végtelenség megvalósultságában az egyidejűséggel, a térbelivel áll kapcsolatban.**

2. Az extenzív végtelen heurisztikája – a CH és alternatívái „nagyban”

A CH és alternatíváinak számokkal való modellezése a helyiértékes számábrázolásban rejlő, és eddig kiaknázatlan lehetőséget használja fel egyfajta extenzív végtelen ábrázolására. Kiindulásként szolgál az is, hogy *aktuális végtelen mennyiséget* nem ismerünk, számlálási és mérési tapasztalataink alapján csak a potenciális végtelent feltételezhetjük. Ezt matematikai axiómaként úgy fogalmazhatjuk meg, hogy *mennyiségileg csak potenciális végtelent posztulálunk*, és ebből egy *konstrukciós* szabállyal jutunk *aktuális végtelen*hez, amely már nem mennyiségileg, hanem *minőségében másként* jellemzi a végtelent.

Tulajdonképpen a potenciális végtelen is idealizációja a tapasztalatainknak, hiszen csak véges mennyiséget tudunk számlálni és mérni, és ezek között igen nagy és igen kicsi mennyiségeket, de mindenképpen korlátozott mértékben.

Első megközelítésben a helyiértékes számábrázolással kétféleképpen gondolhatunk a természetes számoknál nagyobb számokra:

- olyan egész számokként, amelyeknek tetszőlegesen nagy helyiértéken létezik nemnulla számjegyük. Ezeket **potenciális végtelen egész számok**nak fogom nevezni.
- olyan egész számokként, amelyeknek minden természetes számnál *nagyobb helyiértékeken* létezik értékes számjegyük. Ezeket **transzfinit egész számoknak** fogom nevezni, de ezekkel nem fogok „számolni”, a transzfinit egészek nem tartoznak majd a bővített számrendszerhez, csak a műveletvégzésekre „vannak hatással”. Figyelem! Ezek a transzfinit számok a cantori transzfinitekhez hasonlóan *aktuális* végtelenek, de kizártuk az új számrendszerből őket, hatásukat viszont figyelembe fogjuk venni. Ahogy mondani szokták, két legyet ütünk egy csapásra; az aktuális végtelen van is (hatásában), meg nincs is, mert ki van zárva a rendszerből.

---

[7] *„Az aktuális végtelenségtől eltérően a potenciális végtelenség elemei egymásra következve keletkeznek felépítésük folyamatában, s nem egyidejűleg léteznek. … A konstruktivisták szemszögéből nézve a potenciális végtelenség lényegében egybeesik azzal a gondolattal, hogy létezhet a konstruktív objektumok felépítésének egy végtelen folyamata.*” **G. I. Ruzavin**, *„A végtelenség problémája a matematikában”*, *„Végtelenség és világegyetem*” kötet (100. oldal), Gondolat - Budapest, 1974

A potenciális végtelen számok egyike a következő helyiértékes alakban írható fel a tízes számrendszerben: …999, azaz ebben az esetben megszámlálhatóan sok 9 szerepel az egész számok ábrázolására használt helyiértékeken. A potenciális végtelen számokat leképezhetem az a$\mathbf{k}$ képzetes számok halmazára, ahol ’a’ „klasszikus”[8] valós szám és $\mathbf{k} \triangleq \ldots \mathbf{999}$. Amint a projektív geometriában sem jellemezhetem az egyenesek „végtelen-bővítéseit” *mennyiségi* végtelennel, mert az ellentmondáshoz vezetne, hasonlóan a potenciális végtelen számoknak sem a *mennyiségi* végtelenségét ragadom meg a leírásuknál, – hiszen ellentmondáshoz vezetne –, hanem azzal a speciális tulajdonságukkal jellemzem, hogy:

$$\mathbf{k} \triangleq \ldots \mathbf{999} \quad , \quad \mathbf{k}^2 = 1 \tag{1}$$

teljesül a *potenciális végtelen helyiértékek* tartományában. Ezzel eljutunk a *hiperbolikus* számokhoz, amelyek z=x+y$\mathbf{k}$ alakban írhatók fel, ahol x, y valós számok és $\mathbf{k}$ az (1)-béli potenciális végtelen számot reprezentáló képzetes szám. Fontos észrevenni, hogy egy hiperbolikus szám olyan helyiértékesen ábrázolt és végtelen elemet is megtestesítő szám, amely egy valós számnak – azaz a klasszikus számegyenes egy valós számának – és egy potenciális végtelent képviselő képzetesnek az összege. A hiperbolikus – és általában a kételemű számok – legelemibb tulajdonságait lásd az 1. Mellékletben.

Megjegyzés

Mintha egy valós számot úgy írnék le, hogy egy természetes szám és egy tizedestört összege. A valós számok ábrázolásában ezt az összeget „le tudtam rövidíteni” a számnak olyan felírásával, hogy az egész számot és a tizedestörtet egy tizedesvessző elválasztásával egymás után írtam. Tulajdonképpen ez a fajta ábrázolás a potenciális végtelen egészekre is alkalmazható lenne, azaz a tizedesvesszőtől balra sorakoznának az egészek, jobbra pedig a tört helyiértékek – azaz egészrész plusz törtrész – és annyi helyiérték lenne feltüntetve a szám mindkét „végén”, amennyit egy adott esetben a számolás hibahatárán belül érdemes alkalmazni. A lebegőpontos számábrázolás pedig további egyszerűsítést jelentene. Ez a fajta ábrázolás azonban eltüntetné a végtelen minőségileg eltérő jellegét, pedig a kételemű számok használatának eredményessége azt mutatja, hogy bár csak véges mennyiséget tudok mérni, de a végesben nem tapasztalható és nem ábrázolható mennyiségi végtelen *új minőségként* kinyilvánítja önmagát.

Vegyük észre, hogy az (1) aktuális létbe emel potenciális végteleneket; az eredetileg végtelensége miatt nem tapasztalható mennyiséget képzetes számként minőségileg másnak láttatja, és e képzetes négyzetének végessége miatt az új minőséget mennyiségileg mérhetővé teszi.

A végteleneknek ezek a modelljei a törtszámok helyiértékes ábrázolásának a megfelelői a minden természetes számnál nagyobb „egész számokra” vonatkozóan. Tehát a valós számegyenest oly módon bővítettem, hogy a számpontok valós számokkal való megfeleltetését kiterjesztettem az egész számok tetszőlegesen nagy – de nem végtelen nagy – *helyiértékeire* is, miközben a helyiértékes számábrázolás „szabályait” megtartottam.

Megjegyzés

Érdemes a potenciális végtelen számok felfedezésének történetét is emlékezetbe idézni, mert megkönnyíti ezeknek a számoknak az értelmezését, elképzelését.

A negatív számok gépi ábrázolása adta az ötletet, hogy a végtelen nagy számokat a valós törtszámok helyiértékes számábrázolásához hasonlóan írjam fel, például egy speciális végtelen szám a következő helyiértékes alakban írható fel a tízes számrendszerben: **…999**.

---

[8] A „klasszikus” jelző azért indokolt, mert e számok fogalmát, pontosabban a valós számok tört részét általánosabban értelmezem az intenzív végtelenekről szóló részben.

Mit tudunk elmondani erről a fenti végtelen nagy számról? Mindenekelőtt azt, amit a valós ’-1’-ről, azaz

…999^2=1

Mondhatjuk, hogy ez az egyenletet egy szorzáskor előfordult „túlcsordulás” magyarázza, amely akkor áll elő, ha a számábrázolás nem terjed ki a transzfinit egész számokra, azaz a minden természetes számnál nagyobb *helyiértékeken* való számábrázolásra. Fogalmazhatok úgy is, hogy ezek azok a számok, amelyeknél a transzfinit helyiértéken lévő esetlegesen értékes számjegyekkel nem számolhatok, mert „nincs rá hely”, mert aktuális végtelen mennyiséget nem tapasztalunk a valóságban, így a helyiértékes számábrázolásomat is csak potenciális végtelen *helyiértékekre* terjesztem ki az egész számokra vonatkozóan. Ugyanakkor a transzfinit egészek „hatásukban” megjelennek műveletvégzéskor a fent említett „túlcsordulás” jelenségeként.

Ahhoz, hogy a cantori fogalmaknak adekvát állítást fogalmazhassunk meg, elegendő a következőket belátni:

- A potenciális végtelen egészek kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetőek a végtelen tizedestörteknek (szükséges a „végtelen” jelző a tizedestörtekre vonatkozóan, mert a véges tizedestörtek megfelelői a természetes számok, ezeket pedig definíció szerint nem tartalmazzák a potenciális végtelen egészek). Így a potenciális végtelen egészek számossága a cantori kontinuum számosság megfelelője.
- A potenciális végtelen egész számok rendezhetőek[9], és a negatív számokhoz hasonlóan létezük közöttük legnagyobb potenciális végtelen egész, amely helyiértékes szám voltából adódóan a nála kisebb-egyenlő egészek számát/számosságát jelenti, azaz a potenciális végtelen egész számok esetében a potenciális végtelen egészek számát, tehát az előző pont alapján a cantori kontinuum számosságot jelenti.
- A potenciális végtelen számokra igaz, hogy eredeti mennyiségi értelmükben nagyobbak minden természetes számnál, de könnyű belátni azt is, hogy nagyobbak a természetes számok számosságánál is. Elegendő arra gondolni, hogy egy helyiértékes alakban ábrázolt egész szám mindig nagyobb, mint a helyiértékes alakjában a helyiértékek száma[10], ezt a tulajdonságot a potenciális végtelen számok is megöröklik, azaz nagyobbak a megszámlálhatóan sok – azaz a természetes számok számosságával egyenlő – helyiértékeiknek a számánál.

Tehát a potenciális végtelen egészek mindegyike nagyobb a természetes számok számosságánál, de van közöttük legnagyobb, amely egyben a potenciális végtelen egészek számával/számosságával egyenlő, azaz a cantori kontinuum számossággal. Így ebben az esetben a cantori kontinuum számosság és a természetes számok számossága között végtelen sok végtelen nagy szám létezik. Eljutottunk hát egy olyan számbővítéshez és vele egy olyan halmazelmélethez, amelyben a cantori CH nem teljesül, és amint korábban jeleztem, a **valós számegyenesnek ezt a bővítését a hiperbolikus számsík modellezi.**

A CH másik alternatívája az, amikor a cantori kontinuumszámosság és a megszámlálható sok között *egyetlen* végtelen nagy szám létezik az előzőkhez hasonlóan potenciális végtelen szám formájában, ezt a számot is le lehet írni helyiértékes alakban, mégpedig **…000** formában, ahol a nullák úgynevezett értékes nullák, mert a számegyenes transzfinit helyiértékein léteznek értékes számjegyek, amelyek ábrázolására „nincs hely”, de hatásuk a potenciális helyiértékeken is érvényesül műveletvégzés közben. E potenciális végtelen számot a parabolikus (duális) képzetes modellezi, azaz

[9] A négyzetükkel fordított sorrendben rendezhetőek, azaz a legkisebb négyzetű potenciális végtelen egész lesz sorrendben a legnagyobb, ami nem más, mint az (1)-ben megnevezet …999 potenciális végtelen szám.

[10] Gondoljunk a logaritmusra; egy szám logaritmusa mindig kisebb magánál a számnál.

a $\mathbf{j} \triangleq \ldots \mathbf{000}$ számra $\mathbf{j}\neq 0$ és $\mathbf{j}^2=0$ a potenciális végtelen helyiértékek tartományában, ezzel pedig **a parabolikus, más néven duális számokhoz jutottunk**. Egy parabolikus szám szintén olyan helyiértékesen ábrázolt és végtelen elemet is reprezentáló szám, amely egy valós számnak – azaz a klasszikus számegyenes egy számának – és egy potenciális végtelent megtestesítő képzetesnek az összege. A parabolikus számok legelemibb tulajdonságait is lásd az 1. Mellékletben.

A **komplex számok** képzetese pedig azt modellezi, amikor nincs egyetlen egy potenciális végtelen szám sem. Ezt a hiányt az egész számokhoz hasonló módszerrel, negatív számmal jellemezhetem, csak itt egy olyan szám jelzi a hiányt, amelynek a négyzete mínusz egy, hiszen a négyzetre emeléssel tudom megjeleníteni a „túlcsordulást”. Hangsúlyozom, hogy ennél a modellnél is *létezik* végtelen nagy szám, de az a transzfinit tartományba tartozik, és csak hatásában jelentkezik. Ennél a modellnél a *hiány* tehát a cantori kontinuum és a természetes számok számossága közötti végtelenekre vonatkozik. Egy komplex szám olyan helyiértékesen ábrázolt és a végtelen-elem hiányát ábrázoló szám, amely egy valós számnak – azaz a klasszikus számegyenes egy számának – és egy potenciális végtelen hiányát megtestesítő képzetesnek az összege. A komplex számok legelemibb tulajdonságait is lásd az 1. Mellékletben.

Az extenzív végtelenek helyiértékes ábrázolásának két fontos következménye van:

- A potenciális végtelen egész számok reprezentációi már **nem mennyiségileg, hanem egyfajta új minőségként**, *képzetes* számként jellemzik a végtelent, hasonlóan a projektív geometriához, ahol a kezdetben végtelennek gondolt elemet egy egyenes, vagy sík állása jellemez, és *ideális* elnevezést nyer. Az ideális térelem plusz dimenzióként ábrázolt a homogén koordináták használatakor, hasonlóan a képzetes szám által megjelenő új dimenzióval.
- Az aktuális végtelenek helyiértékes ábrázolása és képzetes szám reprezentációja lehetővé, sőt elkerülhetetlenné teszi az extenzív végtelenekre a **reciprokképzést**, azaz az **intenzív végtelenek számbavételét**.

A potenciális végtelen és a transzfinit számok fenti ismertetése csak annak bemutatására szolgál, hogy miképp juthatok el általuk a kételemű számok képzeteseihez. E végtelenek mennyiségi értelmezését nem erőltetem tovább – amint a projektív geometria sem teszi ezt a „végtelen távoli” pontokkal – mert ellentmondásokhoz vezetne.

3. Az intenzív végtelen heurisztikája – a CH és alternatívái „kicsiben”

3.1. A klasszikus matematika és az intenzív végtelen

Az alábbi egyenlet mindent elmond arról, hogy a mai matematika mit tart az intenzív végtelenről, azaz az infinitezimálisokról:

$$1=0,999\ldots \tag{2}$$

Tehát a 0,999… számot a mai matematika egyenlőnek tekinti az 1 természetes számmal, úgy bizonyítva ezt, hogy egyrészt

$$10*0,999\ldots -1*0,999\ldots=9*0,999\ldots$$

másrészt

$$10*0,999\ldots - 0,999\ldots=9,999\ldots-0,999\ldots=9$$

Így

$$9*0,999\ldots=9, \text{ azaz } 0,999\ldots=1$$

A fenti bizonyítás azonban csak a klasszikus valós számok körében igaz, azaz olyan számokra, amelyeknek a tört helyiértékek transzfinit tartományában nincs értékes, nemnulla számjegyük. Amennyiben ilyen transzfinit törtszámok esetleges létezésével számolnunk kell – például létezik a transzfinit egész számok inverze –, csak azt mondhatjuk, hogy

$$1{,}000\ldots \geq 0{,}999\ldots \tag{3}$$

A fenti (3) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy bár a transzfinit helyiértékeken az értékes számjegyeket nem tudom ábrázolni, de a *létüket érzékeltetni* tudom.

A (2) egyenlet és annak bizonyítása feltételezi tehát, hogy *aktuális* infinitezimális nem létezik, azaz az intenzív végtelen csak potenciális léttel bír.

Eddig nem fordítottunk elég figyelmet arra, hogy az aktuálisan létező extenzív végtelenek gazdag tárházának tükröződnie kellene az intenzív végtelenben is. Jelen matematikánknak van sok-sok aktuális extenzív végtelen-fogalma, például a cantori végtelenek a halmazelméletben, míg egyetlen végtelen fogalom létezik az intenzív végtelenben, a potenciális végtelen a valós számok limeszes, vagy „epszilon-deltás” definícióiban, azaz általában a végtelen oszthatóság potenciális megvalósíthatóságán vagy a folytonosság fogalmán keresztül.

Az analízis végtelen kicsi fogalmának nehézségei – például a 0-val osztás lehetetlensége – miatt kivezető utat a határérték fogalmának bevezetésében találták meg, ami nem jelent mást, mint az aktuálisan – azaz megvalósultságában – létező infinitezimális helyett csak annak potenciális létével, azaz csak folyamatában konstruálható létével számoltak.

Megjegyzés

Az „epszilon-deltás” definíciók példájául tekintsük a folytonosság definícióját[11] a valós számokon. Jelölje ℝ a valós számok halmazát. Az $f(x)\in \mathbb{R}$ ($x\in \mathbb{R}$) függvény a végesben fekvő $x_0\in \mathbb{R}$ pontban folytonos, ha minden ε>0-hoz létezik δ>0, hogy

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})|<\boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{ha} \;\; |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|<\boldsymbol{\delta} \quad \boldsymbol{minden}\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}-\mathbf{re}$$

Itt a || abszolútértéket jelöl, és ugyan mindig elmarad a definícióból, de fontos észrevenni, hogy az abszolútérték a számok mérték-jellegét fejezi ki. Ez azért lényegbevágó, mert a természetes számoknál a számok mérték- és rendszám-jellege ugyanaz, de ez az azonosság megszűnik a végteleneket reprezentáló képzeteseknél.[12]

Vegyük észre tehát, hogy a (2) definíción alapszanak az „epszilon-deltás” módszerek, valamint a határérték, és a folytonosság valamennyi definíciója, amelyek feltételezik a nullánál nagyobb, de tetszőlegesen kicsi pozitív valós számokkal leírható, azaz *potenciálisan* infinitezimális ε-k és δ-k létét, ugyanakkor a (2) ki is zárja további, például a törtek transzfinit tartományában létező parányok egzisztenciáját. Így ez a matematika egyrészt nem aktualizálja[13] a végtelen tizedestörttel leírható számokat – kivéve a „9-es végű” tizedestörteket, lásd az (2) egyenletet – másrészt a cantori CH-tól eltérő infinitezimálisoknak még a lehetőségét sem teremti meg.

---

[11] A folytonosság határérték felhasználásával is definiálható, de belőle csak a kiválasztási axióma felhasználásával következik az itt alkalmazott „környezetes” definíció, így inkább ez utóbbit választottam, mivel ebből már a kiválasztási axióma nélkül is bizonyítható, hogy a „határértékes” definíció vele ekvivalens. Lásd erről a „*Hiperbolikus kalkulus I.*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/168-hiperbolikus-kalkulus-i

[12] Lásd erről a „*Számok: rend és mennyiség*” című cikket https://www.infinitemath.hu/matematika/430-szamok-rend-es-mennyiseg

[13] Ez így pontatlan, de egyelőre nem tárgyalom a kiválasztási axiómát és annak végteleneket aktualizáló szerepét, mert a kiválasztási axióma a globális kontinuumhipotézisből következik, pontosabban a globális kontinuumhipotézissel kiegészített **Zermelo-Fraenkel** axiómarendszerből, ahol a globális kontinuumhipotézis a következő: $\aleph_{\alpha+1}=2^{\aleph_\alpha},\ \alpha=1,2,3,\ldots$ Jelen írásomban nem foglalkozom még a globális kontinuumhipotézissel.

Megjegyzés

Megjegyzem, hogy az extenzív végtelenek esetén az (1) egyenlet is csak a „9-es végű" potenciális végtelen egész számokat aktualizálja. Amikor arról írtam, hogy a potenciális végtelen egészek leképezhetőek az a**k** számok halmazára, ahol 'a' klasszikus valós szám és **k** az (1) definícióbéli hiperbolikus képzetes, akkor nem tértem ki erre a különbségre, pedig ez lényeges a számok „aktuálisan létező volta" miatt. A potenciális végtelen egészeknél azért nem probléma a „9-es végű" és a „0 végű" potenciális végtelen egészek egyenlőségének/különbözőségének kérdése, mert a „0 végűek" – azaz a természetes számok – nem tartoznak közéjük.

3.2. Az intenzív végtelen új megközelítése

Cantor végtelenség fogalma az extenzív végtelenről szól, de ő nem kötötte össze e fogalmat az intenzív végtelennel. Az ő számbővítésében nincs kapcsolat a végtelen nagy, és a végtelenül kicsi között, pedig van egy művelet: a reciprokképzés, ami elvezethetne egyiktől a másikig, csak erre a cantori számosság fogalma alkalmatlan.

Az extenzív végtelenekhez hasonlóan a helyiértékes számábrázolással is kétféleképpen gondolhatunk intenzív végtelenekre:

- olyan tört számokként, amelyeknek létezik tetszőlegesen nagy *tört* helyiértéken értékes – nemnulla – számjegyük. Ezeket **potenciális végtelen tizedestörteknek** fogom nevezni.[14]
- olyan tört számokként, amelyeknek minden természetes számnál *nagyobb tört helyiértékeken* létezik értékes számjegyük. Ezeket **transzfinit törtszámoknak** fogom nevezni, és hasonlóan a transzfinit egészekhez ezekkel sem fogok számolni, azaz a transzfinit törtek az extenzív transzfinitekhez hasonlóan szintén nem tartoznak majd a bővített számrendszerhez, csak a műveletvégzésekre „vannak hatással". Figyelem! Ezek azok a számok, amelyeket *infinitezimálisoknak* nevez a matematika **Newton** és **Leibniz** óta. Tehát az infinitezimálisok most sem tartoznak az új számrendszerhez, de a létük figyelembe van véve. Mint az okos lány a népmesében, hozunk is, meg nem is egy aktuálisan végtelen parányt a rendszerünkbe.

Amíg a **Cantor**-féle végtelen felől nem volt megközelíthető egy *aktuális léttel bíró* intenzív végtelen, addig a végtelenek helyiértékes ábrázolása, majd ennek képzetes modellje nemcsak megkönnyíti a reciprokképzést, de szükségessé is teszi ezt azért, hogy a valós számokon definiált két alapművelet és azok inverze a bővített számkörre is érvényes legyen.

A (3) egyenlet arra csábítana, hogy az extenzív végtelenben értelmezett helyiértékes végtelen-ábrázolásokhoz hasonlóan az intenzív végtelenben is értelmezzünk megfelelő számábrázolásokat. Ez azonban ellentmondásokhoz vezetne, így amint a projektív geometriában is el kell szakadni az ideális térelemek végtelen-szemléletétől, ehhez hasonlóan itt a számbővítéseknél sem kell tovább erőltetni a kezdetben gondolatébresztő végtelen modellt, hiszen itt is látható, hogy annak képzetes-szám modellje már nem mennyiség, hanem minőségében új elem**. Az infinitezimálisok bevezetését ezért az új számkörben megvalósítható reciprokképzéssel végzem, az extenzív végteleneket „új minőségként" reprezentáló képzetes számok reciprokaként vezetem be az infinitezimálisokat**. Figyelem! Zavarba ejtő lehet, hogy az előbb arról írtam, hogy a *transzfinit törtszámok,* mint *infinitezimálisok* – azaz aktuális végtelen parányok – nem részei a rendszernek, most meg infinitezimálisok bevezetéséről beszélek. Ennek az az oka az, hogy itt is a potenciális végtelen „aktualizálásáról" van szó, amint az (1)es egyenlettel kapcsolatban megjegyeztem, hogy a

[14] Figyelem! A potenciális végtelen tizedestörte közé nem tartoznak bele a „0-végű", azaz véges tizedestörtek.

képzetes számok, mint *minőségi végtelen* modellek aktualizálják az eredetileg potenciális végtelen.

- A **hiperbolikus számsíkkal modellezett** extenzív végtelen képzetesének reciprokára az igaz, hogy $\frac{1}{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$, azaz **k** önmaga reciproka, tehát az általuk modellezett extenzív és intenzív végtelenek duálisok abban az értelemben, hogy számmodelljük azonos, azaz minőségi végtelenként azonos a leírásuk, pongyolán fogalmazva: egyformán „viselkednek".
- A **parabolikus számsíkkal modellezett** extenzív végtelen képzetesének, a **j** számnak ($\mathbf{j}^2$=0, **j**≠0) reciproka nem értelmezett, ahogy a 0 szám reciproka sem. Egyedül itt térek vissza a (3) egyenletre, és jutok el a segítségével az extenzív és az intenzív végtelen dualitásához. A (3) posztulátumból 1,000…-0,999≥0,000…, de itt a 0,000… szám nem azonos a valós 0-val[15], mivel transzfinit tört helyiértékein is lehetnek értékes, nemnulla számjegyek. Így ezt is az extenzív végteleneknél bevezetett egyfajta **j** számmal jellemzem, amelynek négyzete 0, de önmaga nem nulla. Tehát az extenzív végtelen parabolikus számsíkkal modellezett reprezentációja az intenzív végtelennek is modellje.
- A **komplex számsíkkal modellezett** extenzív végtelen képzetesének, az **i** számnak a reciprokára az igaz, hogy $\frac{1}{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$, azaz **i** reciproka önmaga mínusz egyszerese. Itt is egyfajta dualitást értelmezhetek, hiszen az extenzív végteleneknél a komplex képzetes egy hiányt, a transzfinit egészek és a természetes számok közötti végtelenek hiányát ábrázolta az **i** képzetessel, annak négyzetének mínusz voltából, hiszen a négyzetre emeléssel tudom megjeleníteni a „túlcsordulást". A –**i** négyzete szintén mínusz egy, ez éppúgy hiányt jelölhet, ezért alkalmas az intenzív végteleneknél a végtelen parányok, azaz infinitezimálisok hiányának értelmezésére. Így e CH modell esetén is minőségi végtelenként azonos a reprezentációja az extenzív és az intenzív végtelennek.

Intuíciónknak ellentmondhat, hogy ugyanaz a képzetes szám modellezi az oly különböző extenzív és intenzív végtelent, de ne felejtsük el, hogy a képzetes modellek már minőségileg jellemzik a végtelent és nem mennyiségileg.

4. Összegzés és következmények

A mai matematikánk az infinitezimálisokkal kapcsolatos CH-t rejtő (2) posztulátumon alapszik. **Cantor** ugyan az extenzív végtelenre fogalmazta meg a CH-t, de a fentiek alapján ez átfogalmazható az intenzív végtelenre is. **Az (2) posztulátum helyett a (3)-t alkalmazva egy, az eddigi matematikai analízist is magába foglaló, de gazdagabb halmazelméletet alapozhatunk meg, és ebben a kételemű számok már modellezni képesek a tapasztalatainknak megfelelő *potenciális végteleneket*, és a *végtelenek aktuálisan létező* formáit *nem mennyiségi, hanem speciális minőségi tulajdonságuknál* ragadják meg**, és ezeket mind „kicsiben", mind „nagyban" modellezik.

Előretekintésként érdemes még arról szólni, hogy az intenzív és az extenzív végteleneknek a kételemű számok képzeteseivel való modelljei, és az e modellekben rejlő dualitás gondolata lehetőséget teremt arra, hogy e képzeteseket görbületekként értelmezzük sokdimenziós terek/téridők leírásában. Töprengéseim folytatásában erről fogok írni, továbbá arról, hogy milyen matematika alkalmazható akkor, ha szeretném megkülönböztetni az extenzív és intenzív végteleneket. A képzetesek görbületként való értelmezése szoros kapcsolatban áll a szám rend és mérték jellegének szétválásával, továbbá azzal, hogy a valóságban a polárkoordináták a mérhető mennyiségek.

[15] Nevezhetnénk ezt a valós 0-t *abszolút* nullának.

1. Melléklet

A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{M1}$$

Ahol x és y valós számok, **δ** = **i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \tag{M2}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j}sp\varphi) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \tag{M3}$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \tag{M4}$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta\varphi} \tag{M5}$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{x - \boldsymbol{\delta} y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \tag{M6}$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ** = **i, j, k** aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta} y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta} y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.

2. Melléklet

A kételemű számok és a homogén koordináták

Az itt következőket tartalmazza „*A kételemű számok, mint homogén koordinátával leírt számegyenesek*”[16] című korábbi írásom is.

Induljunk el azon az úton, amint a számsíkokon a számok polárkoordinátás alakjához jutunk:

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{M7}$$

Ahol **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \tag{M8}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \tag{M9}$$

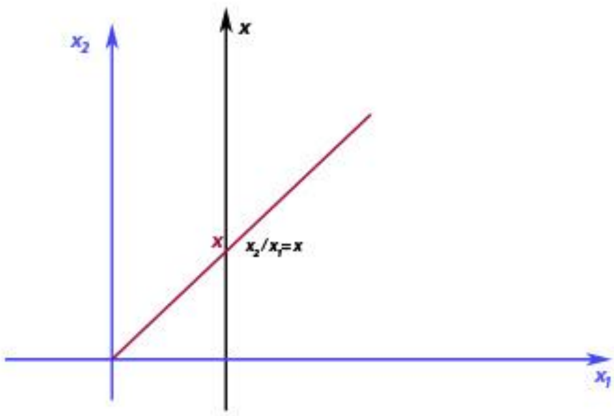
$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \tag{$M10$}$$

Az (M7) egyenletben felírt alak szinte „kiált” egyfajta homogén koordinátarendszerbeli értelmezésért. A homogén koordináták haszna épp az, hogy a végtelen távoli pontokat véges koordinátákkal fejezzük ki. A kételemű számok tiszta képzetes részének végtelen-értelmezése is pontosan ezt teszi: a végtelent véges „koordinátájú” számponttal jellemzi.

1. Parabolikus (szám)egyenes

A parabolikus számegyenes esetén a számegyenesre egyetlen ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik.

Ha a (szám)egyenesen egy közönséges (szám)pont Descartes-féle koordinátája (x), akkor $x_1 \neq 0$ esetén az illesztett homogén koordinátarendszerben az x_2/x_1 homogén koordinátával leírható elemet rendelem, melyre $x = x_2/x_1$, melyek az origón átmenő x_2/x_1 meredekségű egyenesek. (Lásd az 1. ábrát).



1. ábra

Az x_1=0 homogén koordinátájú egyenes pedig a számegyenes egyetlen végtelen távoli pontjának a megfelelője. Ily módon az origón átmenő valamennyi

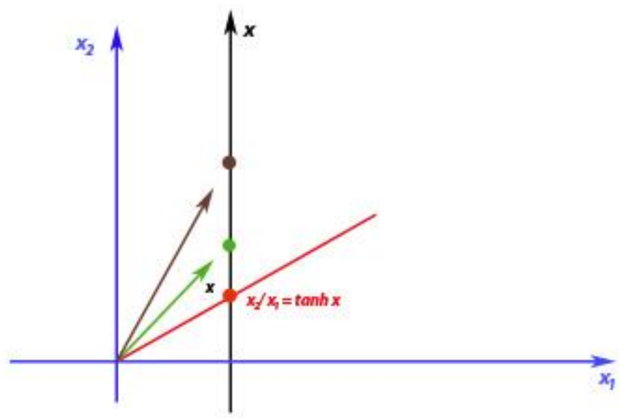
[16] Lásd: https://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/176-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-mint-homog%C3%A9n-koordin%C3%A1t%C3%A1val-le%C3%ADrt-sz%C3%A1megyenesek.html

egyenesnek egyetlen számpont felel meg az x számegyenesen, melynek egyetlen végtelen távoli pontja van.

Azt **mondom tehát, hogy az egyetlen végtelen távoli ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a parabolikus számsíkot adja.**

2. Hiperbolikus (szám)egyenes

A hiperbolikus számegyenes esetén a számegyenesre végtelen sok ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak. (A 2. ábrán fekete színnel rajzolt számegyenes piros színnel jelölt pontja közönséges pont, a zöld és a barna pontok ideális pontok. Ezen az ábrán torzítottan a végtelen távoli pontok is a végesben vannak ábrázolva.)



2. ábra

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes közönséges Descartes-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához a számsík x_2/x_1=tanhx homogén koordinátával leírható elemét rendelem $x_1 \neq 0$ esetén, ezek az elemek olyan, az origón átmenő egyenesek, melyek meredeksége kisebb, mint egy. (Lásd például a 2. ábrát, és a piros színnel rajzolt egyenest.) Ily módon az origóra illeszkedő sugársorból csak egy nyaláb egyeneseit feleltettem meg kölcsönösen egyértelműen a számegyenesem *közönséges* pontjainak. A sugársor többi egyenesét a számegyenes *végtelen távoli* pontjaihoz rendelhetem. Az abszolútértékben egynél nagyobb meredekségű egyenesek meredekségét x_1/x_2=tanhx ($x_2 \neq 0$) módon írom le. (Ezek egyike a 2. ábrán barna színnel rajzolt egyenes.) Az $x_1=x_2$ egyeneshez a számegyenes „legkisebb” végtelen távoli pontját, az $x_1=-x_2$ egyeneshez a számegyenes negatív számtartományában legnagyobb végtelen távoli pontját rendelem. (Ezek egyike a 2. ábrán zöld színnel rajzolt egyenes.) Ily módon az origón átmenő egyenesek közül egy kivétellel mindegyikhez egyetlen közönséges, vagy végtelen távoli – azaz ideális – számpont felel meg az x számegyenesen, melynek végtelen sok végtelen távoli pontja van. Az origóra illeszkedő sugársor egyenesei közül egyedül az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen sok ideális ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a hiperbolikus számsíkot adja.

3. Komplex, vagy elliptikus (szám)egyenes

A komplex számegyenes esetén a számegyenesre nem illeszkedik egyetlen ideális (végtelen távoli) pont sem. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak.

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes Descartes-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához $x_1 \neq 0$ és $|x| < \pi/2$ esetén a számsíknak a $tgx = x_2/x_1$ homogén koordinátával leírható elemét rendelem, ezek az elemek az origón átmenő egyenesek. Ily módon az origóra illeszkedő sugársor $x_1=0$ elemének kivételével minden elemét hozzárendeltem a számegyenes $(-\pi/2, +\pi/2)$ szakasz szánpontjaihoz. Így egy tetszőleges hosszúságú[17] véges nyílt szakasz pontjait tudtam kölcsönösen egyértelműen megfeleltetni az origóra illeszkedő sugársor egyeneseinek úgy, hogy az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen távoli ponttal nem rendelkező számegyenes, (pontosabban tetszőlegesen nagy számszakasz) homogén koordinátákkal való leírása a komplex számsíkot adja.

[17] Tetszőleges hosszúságú, hiszen $tgx = x_2/x_1$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ esetén $x = x'\pi/L$ helyettesítéssel egy L hosszúságú (-L/2,L/2) nyílt szakasz pontjait rendelhetem az origón átmenő egyenesekhez.