Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához

A kételemű számok normája, mint valószínűségi amplitúdó

Amióta csak felfedeztem a kételemű számok családját és szoros kapcsolatukat a minőségi végtelennel és a téridővel, tervbe vettem[1], hogy végiggondolom, vajon a komplex számok, mint valószínűségi amplitúdók, helyettesíthetőek-e a hiperbolikus és a parabolikus (duális) számokkal a kvantummechanikában, és milyen körülmények között kell az egyiküket, vagy a másikukat használni.

Nagyon megörültem, amikor az interneten ráakadtam **Andrei Khrennikov** cikkeire[2], melyekben bemutatja az általa hiperbolikus kvantummechanikának nevezett elméletet, melyben a hiperbolikus számokat vonja be a valószínűségek összegzésébe. Teóriájának használhatóságát többen vitatják[3], de érdemes foglalkozni az elképzelésével, mert szerintem helyes általánosítását adja a valószínűségek számításának, és a kételemű számok felhasználásának.

1. Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikája

Nézzük, miképp jut el **Andrei Khrennikov** a hiperbolikus kvantummechanikájához. Nem fogom pontosan követni a szerző jelöléseit és matematikai levezetéseit[4], mert egy fontos következtetés szemléletes megjelenését jobban segíti az általam választott leírás. A két leírás matematikailag egyenértékű.

Egymást kizáró eseményekre a valószínűségek klasszikus összegzési szabálya a makrovilágban a következő:

$$P = P_1 + P_2 \qquad (1)$$

Ahol P, P_1, P_2 pozitív valós számok. (A normálás kérdése nem túl fontos jelen tárgyalásom szempontjából, de mindig feltételezem, hogy 1-re normáltak a valószínűségek, ami (1) esetén azt jelenti, hogy P=1.)

Az (1) összefüggéssel szemben a kvantumfizikában az elemi részecskéknél a valószínűségeik összegzésére – a kétrés-kísérlettel szemléltethető interferenciára – az alábbi törvényszerűség működik a kísérletek alapján:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cos\Theta \qquad (2)$$

Ahol P, P_1, P_2 komplex számok, $|\,|$ az abszolútértéket jelöli, és Θ a P_1, és P_2 komplex számvektorok által bezárt szög.

Megjegyzések:

Látható, hogy miben tértem el a klasszikusnak mondható, és **Khrennikov** által is használt interferencia-leírástól; nem amplitúdóra, hanem intenzitásra írtam fel a képletet

[1] Lásd „*A kvantumelmélet matematikájáról II.*” című cikket; http://www.infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/72-a-kvantumelm%C3%A9let-matematik%C3%A1j%C3%A1r%C3%B3l-ii.html

[2] Lásd például: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0101002

[3] Lásd például: http://arxiv.org/pdf/1311.6461.pdf

[4] Lásd a „*Hyperbolic quantum mechanics*” című cikkét: http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0101002v1.pdf

a (2) összefüggésben.

Nagyon fontos látni azt, hogy az (1) összefüggés itt is igaz, csak a P, P_1, P_2 *komplex* számokra értelmezve. A klasszikus valószínűség azonban, – és ez az, ami mérhető –, a (2) összefüggés alapján számítható, azaz komplex abszolútérték-négyzettel egyenlő. A normálást itt úgy kell érteni, hogy $|P|^2=1$.

Egy linearizáció után a (2)-ből a következőt kapjuk:

$$|P|^2 = \left||P_1| + e^{i\Theta}|P_2|\right|^2 \tag{3}$$

(Itt a négyzetgyökvonást azért nem érdemes végrehajtani, mert egyelőre csak az abszolútérték-négyzetnek van fizikai jelentése számunkra.[5])

A fenti (3) egyenletben **i** a komplex képzetes egység, azaz $\mathbf{i}^2=-1$. A (2)-ből a (3) egyenlethez úgy jutunk, hogy felhasználunk két ismert egyenlőséget: $e^{i\Theta} = \cos\Theta + \boldsymbol{i}\sin\Theta$, $cos^2\Theta + sin^2\Theta = 1$, az abszolútérték pedig a komplex számok körében $|z| = |x + \boldsymbol{i}y| = \sqrt{x^2 + y^2}$.[6]

Andrei Khrennikov oly módon általánosította a fentieket, hogy nem egy komplex **Hilbert** térből indult ki, hanem egy hiperbolikus **Hilbert** térből.[7] Ekkor a valószínűségek összegzésének módja, azaz a hiperbolikus interferencia leírása a következő:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cosh\Theta \tag{4}$$

Ahol P, P_1, P_2 hiperbolikus számok és Θ a P_1, és P_2 hiperbolikus számvektorok által bezárt hiperbolikus szög.

Megjegyzés:

Megismétlem, hogy az (1) összefüggés itt is igaz, csak a P, P_1, P_2 *hiperbolikus* számokra értelmezve, és ebből vezethető le a (4) összefüggés, ahol már a valós számok körében számolhatunk.

A (4)-ből linearizáció után adódik a formula:

$$|P|^2 = \left||P_1| + e^{k\Theta}|P_2|\right|^2 \tag{5}$$

A fenti egyenletben **k** a hiperbolikus képzetes egység, azaz $\mathbf{k}^2=1$. Az (4)-ből az (5) abból következik, hogy a hiperbolikus függvényekre $e^{\boldsymbol{k}\Theta} = \cosh\Theta + \boldsymbol{k}\sinh\Theta$, $cosh^2\Theta - sinh^2\Theta = 1$, a norma, pedig $|z| = |x + \boldsymbol{k}y| = \sqrt{x^2 - y^2}$.[8] Szándékosan használtam a norma[9] kifejezést az abszolútérték helyett, mivel itt ez nem mindig pozitív valós szám, és a háromszög-egyenlőtlenségre

[5] A mai napig vitatott, hogy a komplex amplitúdó önmagában is fizikai jelentéssel bír-e, vagy csak segédeszköz az abszolútérték-négyzet kiszámítására. Ugyanis csak az utóbbit tudjuk jelenleg mérni, azaz ellenőrizni. Kvantummechanikailag minden olyan állapotot, amelyet egy részecske felvehet, komplex számokkal, mint súlyokkal figyelembe kell venni. A komplex súlyoknak a variációira a ψ függvényjelölést használják, mely a hely és az idő függvénye, és a részecske hullámfüggvényének nevezik. A $|\psi|^2$ pedig a részecske megtalálási valószínűség-sűrűsége. A kérdést úgy teszik fel, hogy vajon a részecske mindig egyetlen adott állapotban – például adott helyen és időben – létezik, ahogy a mérésnél tapasztaljuk, vagy a mérések között az összes lehetséges állapotot felveszi, azaz például több helyen van egyszerre. Szerintem a kérdés-feltevés pontatlan, ezért nincs még egyértelmű válasz. De erről majd máskor.

[6] Bár nem tartozik szorosan a témához, de fontos megjegyezni a (3) képlettel kapcsolatban, hogyha az egységnyi abszolútértékű $e^{i\Theta}$ komplex számmal szorzunk, akkor az abszolútérték nem változik. Ez lényeges a hullámtanban, mert így egy hullámfüggvény és annak $e^{i\Theta}$-szerese fizikai szempontból egyenértékű. Ebből következik a kvantummechanika *mérték-invariancia* elve.

[7] Ennek részleteit lásd **Khrennikov** *„Hyperbolic quantum mechanics”* című cikkében: http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0101002v1.pdf

[8] Itt is igaz, hogy az egységnyi hiperbolikus normájú $e^{k\Theta}$-val szorozva a norma értéke nem változik.

[9] Tulajdonképpen normának sem nevezhetném a szakirodalomban elterjedt definíciók alapján, de egyéb tulajdonságai miatt mégis annak nevezem, mert nem akartam új elnevezéssel ellátni.

is mást mondhatunk (lásd a **Melléklet** 2.2 pontját). Egyelőre azokkal a megszorításokkal alkalmazhatjuk a fentieket, amelyek megegyeznek a **Melléklet** M9 képlete után megfogalmazottal**.**

2. A mostohagyerek parabolikus számok

Mielőtt szólnék a valószínűségszámítás és ennek folyományaként a hullámelmélet valószínűségi leírásával kapcsolatos problémáimról, és megjegyzéseimről, feltétlenül meg kell említenem, hogy **Khrennikov** tárgyalása nem teljes. Korábbi cikkemben[10] írtam arról, hogy a kvadratikus formával ellátott egydimenziós térből generált kétdimenziós **Clifford**-algebrákat a kételemű számok számsíkjai reprezentálják. Így annak mintájára, amint **Khrennikov** értelmezte a hiperbolikus **Hilbert** teret, beszélhetünk *parabolikus* **Hilbert**-térről is. A valószínűségek összegzése, azaz a parabolikus interferencia leírása a következő szabállyal írható itt le:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \operatorname{cp} \Theta \tag{6}$$

A fenti egyenletben P, P_1, P_2 parabolikus[11] számok, Θ a P_1, és P_2 parabolikus számvektorok által bezárt parabolikus szög, és cp a koszinusz függvény megfelelője a parabolikus számsíkon.

Megjegyzés:

Megismétlem, hogy az (1) összefüggés kezdettől fogva igaz itt is, csak a P, P_1, P_2 *parabolikus* számokra értelmezve.

A (6)-ból következik:

$$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| = \big||P_1| + |P_2|\big|^2 \tag{7}$$

Itt a linearizációra nem is volt szükség, mivel a parabolikus koszinusz függvényre $\operatorname{cp} \Theta \equiv 1$.

A (7) egyenlet is felírható olyan alakban, mely a parabolikus képzetes egységet is tartalmazza:

$$|P|^2 = \left||P_1| + e^{\boldsymbol{j}\Theta}|P_2|\right|^2 \tag{8}$$

A fenti egyenletben **j** a parabolikus képzetes egység, azaz $\mathbf{j}^2=0$. A (7)-ből a (8) egyenlősége abból következik, hogy parabolikus függvényekre $e^{\boldsymbol{j}\Theta} = \operatorname{cp} \Theta + \boldsymbol{j} \operatorname{sp} \Theta = 1 + \boldsymbol{j}\Theta$, a norma, pedig $|z| = |x + \boldsymbol{j}y| = x$. A norma negatív értékeket is felvehet, ezért a parabolikus számok fizikai használatánál is megszorításokat kell alkalmazni, csak olyan parabolikus számokra szorítkozom egyelőre, melyeknél a szám valós része nem negatív.[12]

A (7) egyenletekből kiemelem a következőt:

$$|P|^2 = \big||P_1| + |P_2|\big|^2 \tag{9}$$

Ehhez a (9) összefüggéshez a (6), (7), (8) „bonyodalmai" nélkül is eljuthattam volna, hiszen a megjegyzésben említettek miatt már a parabolikus összegből képzett parabolikus abszolútérték-négyzet a (9)-et eredményezi. A (6), (7), (8) összefüggéseket csak azért írtam le, hogy bemutassam; ezek itt is igazak a komplex, és a hiperbolikus esethez hasonlóan.

A (9) összefüggés után kell megjegyeznem, hogy a fizikai jelentésén túl, miért is ragaszkodtam a „négyzetes-szabályból" kiindulni a levezetések során. Ha **Khrennikov** hivatkozott cikkében használtaknak megfelelő matematikát használok, azaz intenzitások helyett az amplitúdókra írom fel az interferencia-képletet, akkor a (9) egyenlet helyett $P = \left|\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}\right|^2$ egyenlethez jutok, és bár

---

[10] Lásd *„A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen"* című cikk 2.1 pontját: http://infinitemath.hu/index.php/matematika/item/199-a-geometriai-algebr%C3%A1ban-rejt%C5%91zk%C3%B6d%C5%91-v%C3%A9gtelen.html

[11] **Parabolikus, vagy duális számok** alapvető tulajdonságait lásd a **Melléklet** 1. pontjában.

[12] Itt is igaz, hogy az egységnyi parabolikus normájú $e^{\boldsymbol{j}\Theta}$-val szorozva egy számot, a norma értéke nem változik.

ebből is látszik, de csak áttételesen az, ami a (9)-ből és a parabolikus számok norma-definíciójából[13] azonnal nyilvánvaló. A **klasszikus valószínűségi összegzést, az (1) egyenletet kaptuk itt meg**, ha a parabolikus számokat azokra korlátozzuk, melyeknek valós eleme nem negatív. Ezekre ugyanis P, P_1 és P_2 pozitív valós számok, így a normájuk is az, tehát elhagyhatóak az abszolútérték-jelek a (9) egyenletben, és P=1 is igaz, valamint egy – most már elvégezhető – gyökvonás után megkapjuk az (1)-et.

Így elmondható, ami – szerintem – a legfontosabb a fenti levezetésekben, hogy **a parabolikus valószínűségi amplitúdók összegzési szabályát alkalmazva a klasszikus valószínűségi számításokkal megegyező összefüggéshez jutottam.** Érdekesség, és nagyon elgondolkodtató, hogy az (1) egyenletet parabolikus számokra felírva nem kapjuk meg az azonosságot, de a négyzetes szabályt alkalmazva a parabolikus számokra, és a műveleteket elvégezve, *visszakapjuk* a klasszikus valószínűségi összefüggést valós számokra.

3. Egy univerzális valószínűségszámítás és hullámelmélet körvonalai

A fentieket összegezve közös leírását adhatjuk a komplex, a parabolikus és a hiperbolikus valószínűségek összegzési szabályának. Egyelőre nem tudom, hogy léteznek-e azok a fizikai jelenségek, melyeket a hiperbolikus valószínűségi amplitúdókkal írhatok le. Azt viszont jól tudom, hogy a komplex valószínűségi amplitúdók sikeresen használhatóak a kvantummechanikai jelenségek leírásában, és a parabolikus valószínűségi-amplitúdók bevezetésével a közönséges valószínűségek számításait kaptuk vissza. (A kételemű számok néhány fontos tulajdonságát és felhasználását a **Melléklet** 1. pontja tartalmazza.)

A fenti (3), (5), (8) képletekből **a valószínűségek összegzési szabályának globális alapegyenlete** a következő:

$$|P|^2 = \left||P_1| + e^{\delta\Theta}|P_2|\right|^2 \qquad (10)$$

Ahol P, P_1, P_2 komplex, parabolikus vagy hiperbolikus szám attól függően, hogy $\boldsymbol{\delta}$ a komplex, parabolikus vagy hiperbolikus képzetes egység, azaz $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ melyekre $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$.

A mai elképzelések alapján minden objektumnak van hullámtermészete, így a valószínűségekre vonatkozó fenti *globális* képlet alapján a hullámmechanikát is ki lehetne terjeszteni valamennyi objektumra. A fentiekből az is következik, hogy a háromféle valószínűségi összegzés egyenértékű; egyik sem származik a másikból, de sejthetően „azonos származásúak”.[14] A kételemű számok tulajdonságai – eltérései és azonosságai – már sokat sejtetnek a hullámmechanikai valószínűségek közös alapjáról, de egy eszköz nagyon hiányzik az alapok megismerésére; egy olyan számrendszer, amelynek része mind a három kételemű számsík. A geometriai algebra euklideszi térből generált **Clifford** algebrái „majdnem” megfelelőek erre, hiszen a kételemű számok számsíkjai reprezentálják az egydimenziós, kvadratikus normával ellátott térből generált kétdimenziós **Clifford**-algebrákat. Viszont az egynél több véges dimenziós tér által generált **Clifford**-algebrákkal nekem több problémám is van, ezek egy részére már tettem utalást[15].

[13] Lásd a **Melléklet** M6 képletét.
[14] **Andrei Khrennikov** más utat bejárva hasonló következtetésre. Lásd; **Khrennikov**, *Classical and quantum spaces as rough images of the fundamental prespace*; http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0306069v1.pdf
[15] Lásd a „*Problémák a geometriai algebrában*” című írást; http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/197-probl%C3%A9m%C3%A1k-a-geometriai-algebr%C3%A1ban.html

4. További megjegyzések

Mivel a valószínűségek összegzését a kételemű számok segítségével lehet szemléletesen leírni, ezért érdemes ezeknek a számrendszereknek a tulajdonságai és egyéb felhasználási területei szempontjából megvizsgálni a valószínűségeket.

4.1 Valószínűségek összegzése

A (2), (4) és (6) – koszinusz függvényt tartalmazó – négyzet-összegek nem mások, mint az egyes számsíkokon a *koszinusztétel* (pontosabban a *paralelogramma szabály*[16]) megfelelői. Ez pontosan azt jelenti, hogy két lehetséges állapot valószínűségeinek összegzése számvektorok összeadásából származik, és az eredő-vektor nagyság-négyzetének kiszámítását jelenti. Ez nemcsak két valószínűség, és így két vektor, hanem akárhány összegzése tekintetében is igaz:

$$|P|^2 = \sum_i |P_\mathrm{i}|^2 + 2\sum_{i<j} |P_\mathrm{i}||P_\mathrm{j}| \operatorname{COS}(\Theta_i - \Theta_j) \;=\; \sum_{i,j} |P_\mathrm{i}||P_\mathrm{j}| \operatorname{COS}(\Theta_i - \Theta_j) \tag{11}$$

Ahol COS a koszinusz függvények megfelelője az egyes számsíkokon.

4.2 Valószínűségek és a háromszög-egyenlőtlenség

Mivel a (2), (4) és (6) egyenletek vektorok összegzését szemléltető háromszög-oldalak hosszúságára felírt összefüggések az egyes számsíkokon, ezért igaz rájuk az a háromszög-egyenlőtlenség, amelyet a **Melléklet** 2.2 pontja tartalmaz. Így az egyes számsíkokon igazak a következőek:

- **Komplex számsíkon a**z egész számsíkra, ahol P, P_1, P_2 komplex számok:

$$|P| \le |P_1| + |P_2| \tag{12}$$

- **Parabolikus számsíkon a** számsíknak arra a felére, ahol P, P_1, P_2 parabolikus számok valós része nem negatív szám:

$$|P| = |P_1| + |P_2| \tag{13}$$

- **Hiperbolikus számsíkon a** számsíknak arra a síknegyedére, melynél P, P_1, P_2 hiperbolikus számok valós része nem negatív szám, és a számvektorok meredekségének abszolútértéke kisebb, mint egy:

$$|P| \ge |P_1| + |P_2| \tag{14}$$

A fentiekből messzemenő következtetések vonhatók le, de ezek tárgyalását későbbre halasztom. Annyit azért már itt is érdemes megjegyezni, hogy a komplex valószínűségi amplitúdók a kvantummechanika, a parabolikusak pedig a közönséges környezetünk valószínűségi számításaihoz kapcsolódnak. Egyedül a hiperbolikus számokhoz kapcsolódó valószínűségekkel nem találkoztunk eddig a gyakorlatban, a (14) egyenlőtlenség viszont sokat elárul a használhatóságukról. **Khrennikov** első cikkeiben hiperbolikus kvantummechanikának nevezte ezt a matematikát, és elismerte, hogy felhasználási területe egyelőre ismeretlen. Későbbi cikkeiben már – véleményem szerint – jó helyen tapogatózik, a kvantumelmélet

---

[16] A paralelogramma szabályban a koszinusztételhez képest a koszinusz függvényben szereplő szög az utóbbi kiegészítő szöge, így a függvényérték előjele ellentétes a koszinusztételbélihez képest:
A koszinusztétel szerint: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$
A paralelogramma szabály szerint $c^2=a^2+b^2+2ab\cos(\gamma')$

„információs jellege” érdekli, és a fizikán túli területek felé fordul.[17] Bele-bele olvasgattam ilyen irányú cikkeibe, de ezeket nem tudom még kommentálni. Első megérzésem szerint nem is annyira az a kérdés, hogy egy rendszer fizikai-e, vagy fizikán túli, hanem inkább az adott rendszer entrópia-változása a lényeges. Hozzáteszem, hogy én az információt is fizikai létezőnek tartom, így a hozzá kapcsolódó változásokat is a fizikaiak közé sorolom, még ha ez nem is széles körűen elfogadott nézet. Ennek megfelelően én az entrópia-változástól függően használnék valamilyen valószínűségi modellt, így; komplex valószínűségi amplitúdóval számolnék ott, ahol az entrópia növekszik a változás során, hiperbolikussal, ha az entrópia csökken, és parabolikussal ott, ahol az időbeli folyamatok megfordíthatóak.

Nagyon kíváncsi vagyok, hogy mi az igazság. Az viszont biztos, hogy – amint említettem – **szükség lenne egy olyan matematikai modellre, ahol a háromféle kételemű számot; a komplexet, a parabolikusat és a hiperbolikusat *egy* számrendszeren belül tudnám kezelni**.

4.3 A valószínűségek a kételemű számok végtelen-összefüggéseinek tükrében

A kételemű számok képzetes részének végtelen-értelmezése és a valószínűségszámítás közötti kapcsolatot is egyelőre csak ötletszinten közelítem meg. Ebből a szempontból a valószínűségekre vonatkozó (12), (13) és (14) egyenlőtlenségek fontosak, és az a heurisztikus megközelítés, amit korábbi cikkemben[18] leírtam a képzetes rész, mint intenzív végtelen-modell kapcsán. Ez a 0,999… szám és az 1,000… szám közötti egyenlőség/egyenlőtlenségről szól, és ezek egy-egy variációjának a kételemű számok képzetes részével való modellezéséről. Ha a (12), (13) és (14) egyenlőtlenségekben szereplő valószínűségek normáltak; az összegvalószínűség abszolútértékére $|P|=1$, a lehetséges két alternatíva valószínűségeire pedig $|P_1|<1$, és $|P_2|<1$, akkor könnyen összekapcsolható a valószínűségek közötti háromszög egyenlőtlenség egy adott állítása a 0,999… szám és az 1,000… szám közötti egyenlőség/egyenlőtlenség egyikével. (Például $|P_1|=0{,}333\ldots$ és $|P_1|=0{,}666$ esetén csak a parabolikus esetben áll fenn egyenlőség az eredő valószínűség abszolútértéke és a lehetséges alternatívák valószínűség-abszolútértékeinek összege között.)

4.4 A valószínűségek a kételemű számok téridő-értelmezésének tükrében

Említettem már korábban[19], hogy az általános relativitáselmélet és a kvantummechanika egyesítésének az az egyik –, és lehet, hogy a legnagyobb – akadálya, hogy az általános relativitáselmélet egy **háttérfüggetlen** leírás, ami azt jelenti, hogy a tér és az idő dinamikusan változik az anyagtól függően, míg a kvantummechanika eseményei egy időben változatlan geometriájú klasszikus téridő hátterén íródnak le. Itt meg kell jegyeznem, hogy már az „anyag- és így gravitáció-mentes” speciális relativitáselmélet sem a klasszikus newtoni teret és időt fogalmazza meg. **A hiperbolikus számsík a speciális relativitáselméletbéli téridő geometriájának topológiáját ábrázolja nagyon szemléletesen, ha a teret egy dimenzióra szűkítem**. Ha ennek mintájára mindegyik kételemű számsíkot, így a komplex számsíkot is a tér és az idő egyfajta topológiai modelljének tekintem, akkor – rejtve a kvantummechanika komplex valószínűségi amplitúdóiban – valamiféle speciális (komplex) téridő-függvényt

---

[17] Lásd pl. **Khrennikov**; *Quantum-like Probabilistic Models outside Physics;* http://arxiv.org/pdf/physics/0702250.pdf

[18] Lásd *„A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen”* című cikk 2. oldalának a középső részét; http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/199-a-geometriai-algebr%C3%A1ban-rejt%C5%91zk%C3%B6d%C5%91-v%C3%A9gtelen.html

[19] Lásd *„Az idő, a tér és a végtelen”* című cikk 5.2 pontjának 5. pontját a 20. oldalon: http://www.infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/88-az-id%C5%91-a-t%C3%A9r-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html

rendelünk a klasszikus térhez és időhöz, mint háttérhez. Van-e kapcsolat a valószínűségek komplex síkja, mint egyfajta fiktív téridő és a részecske mozgásának valós tere és ideje között? Őrült kérdésnek hangzik, hiszen a fiktív komplex téridő elemeinek hossznégyzetei csak súlyozzák – azaz „minősítik" – az igazi téridőben történtekről szóló tudásomat.[20] Miképp mondhatnának bármit is a mikrovilágban zajló események „valódi" teréről és idejéről azok az összefüggések, melyek egy-egy részecske lehetséges állapotainak – például egy adott időben való helyének – valószínűségéről szólnak. Ha a valószínűségek között van olyan összefüggés, mely teljesen független egy adott részecskétől és annak állapotaitól, akkor a fiktív téridőnek ezek az összefüggései magáról a valódi téridőről kell, hogy mondjanak valamit. És ilyen kontextusok bizony vannak, hiszen épp ezek azok az összefüggések, melyekben eltérnek a mikro- és a makrovilág valószínűségi szabályai, tehát az, hogy a valószínűségek összegzésénél a kételemű számok mely fajtáját kell használnom. Ennek a gondolatmenetnek megfelelően szerintem a valószínűségi amplitúdókat leíró kételemű számok síkjainak, mint egyfajta téridőnek a jellemzői a valós téridő tulajdonságait tükrözik. Ennek megfelelően a kvantummechanika klasszikus tér- és idő-hátterét éppúgy helytelen használni, amennyire helytelen a newtoni téridő a fénysebesség-közeli mozgások leírására. **Azt állítom ezzel, hogy a tapasztalatból szerzett valószínűségi összegzési szabály a kvantummechanikában alapvetően a mikrovilág valós téridejének sajátosságait érzékelteti és a valószínűségek egyedi viselkedését csak áttételesen tükrözi**. Azért nem igazán nyilvánvaló mindez, mivel a komplex számoknál a számvektorok több tulajdonsága (például abszolútértéke, vagy folytonossági definíciói) matematikailag azonosak az euklideszi vektorterekben definiáltakkal.

A fentiek a speciális relativitáselméletnek a mikrovilágbéli megfelelőjéről szóltak egyelőre, és arról is csak sejtéseket fogalmaztak meg. Most már harmadszor ismétlem meg ebben a kis írásban, hogy óriási szükség volna a kételemű számok közös számrendszerére. Szerintem csak ez segíthet a valóság adekvát és univerzális – azaz a mikro- és makrovilág közös – leírásához.

Zárójeles megjegyzések:

A fentebb említett sejtésem szerint nem a méretek közötti különbség a lényeges a valószínűségek összegzésénél, hanem az események során bekövetkező entrópia-változás. A kvantummechanikában azért használunk komplex számokat az amplitúdóknál, mert az interferencia – és vele együtt minden mérés – során az entrópia növekszik, hiszen információ semmisül meg. Ezt fejezi ki a komplex amplitúdókra felírt (12) háromszög egyenlőtlenség. A kételemű számok közötti választás entrópia-függése viszont ellentmondani látszik annak, amit a valószínűségi amplitúdók normájának téridő-leíró jellegéről írtam. Ez az ellentmondás azonban feloldható, ha minden téridőre úgy tekintek, mint az általános relativitáselmélet, azaz a téridő dinamikusan változik az anyagától függően. A kvantumvilág anyagi eseményei során olyan beavatkozások – interferenciák – következnek be, melyek információ-törléssel, így entrópia-növekedéssel járnak. Ezért kell a komplex számokat használni az amplitúdóknál a mikrovilágban a részecskék/hullámok egymást zavaró téridejében.

[20] Az úgynevezett „valódi" téridő sem más, mint a világ rendezettségéről szerzett információink összessége, mely a saját mozgási lehetőségeinket is tartalmazza. Ebben az értelemben a valószínűségek által leírtak sem mások, és csak az információ megbízhatóságában van különbség közöttük.

Melléklet

1. A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{M1}$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \tag{M2}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j} sp\varphi) \quad \text{a parabolikus számoknál} \tag{M3}$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \boldsymbol{i}\sinh\varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \tag{M4}$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta\varphi} \tag{M5}$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{x - \boldsymbol{\delta} y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \tag{M6}$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ** = **i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta} y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta} y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényekre **cp [arg(z)] ≡ 1**, **sp [arg(z)] = y/x**, ahol **arg z = y/x**.

2. Geometriai elemek a kételemű számok síkjain

2.1 A szorzás képe

Mindhárom számsíkon a számok **szorzásánál** a normák szorzódnak, az argumentumok összeadódnak, és az egységvektorok szorzása egy-egy fizikai mozgást ír le:

1.1 körmozgást a komplex számoknál,

1.2 egyenes menti eltolást a parabolikus számoknál,

1.3 hiperbolikus forgatást – azaz Lorentz-forgatást – a hiperbolikus számoknál.

2.2 Az összeadás képe

E számok **összeadás**ának síkbeli képe vektorok összeadása, tehát a paralelogramma-szabályt követi. Az azonos előjelű, valós normájú kételemű számokra felírható háromszög-egyenlőtlenségeknek érdekes az eltérése:

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (M7)

   a **komplex** számoknál az egész számsíkon,

2. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (M8)

   a **parabolikus** számoknál a számsík azon felén, melyekre a szám valós része nem negatív,

3. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$ (M9)

   a **hiperbolikus** számoknál a számsík I. sík-negyedében, tehát azokra a számokra, melyek valós része pozitív, és nagyobb, mint az imaginárius egységelem valós szorzója.

3. A kételemű számok és a geometriai algebra

A kételemű számok a kvadratikus formával ellátott egydimenziós térből generált kétdimenziós **Clifford-**algebrát reprezentálják. Elmondhatjuk, hogy **a geometriai algebra legegyszerűbb, egydimenziós vektorok által generált fajtái egyáltalán nem szegényes szerkezetűek, hanem igen izgalmas alapstruktúrát mutatnak a komplex, a parabolikus és a hiperbolikus számok formájában**.

4. Geometriák modellezése

Ha egy gömb sugarát R, görbületét ρ-val jelölöm és az arányukra a következő igaz:

1. $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$
2. $\boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$
3. $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$

ahol $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$, akkor ezeken a gömbökön leírt síkgeometria a hiperbolikus, az euklideszi és a gömbi síkgeometria modellje.

Természetesen ez egyelőre csak formai érdekesség, hiszen például a 2. esetben az R sugár, mint kételemű szám nem értelmezhető, a többi esetben pedig a sugár és a görbület, mint képzetes szám értelmes, de mint geometriai fogalom csak a kételemű számok képzetes részének végtelen értelmezésével közelíthető meg.

Megjegyzem, hogy a **Bolyai-**geometriát formálisan egy komplex sugarú gömbön modellezték eddig, itt pedig komplex görbületű gömböt használtam az analógiára. Az elliptikus és a hiperbolikus esetben ez formálisan mindegy, de a parabolikus számoknál az R, mint sugár nem értelmezhető kételemű számként, amint utaltam rá, ezért indultam ki a görbületekből. Az extenzív és intenzív végtelenek dualitásából viszont az következik, hogy akár a sugárból, akár a görbületből való kiindulás ugyanarra az eredményre vezet.

5. Halmazelméletek modellezése, és a végtelen, mint új minőség megjelenítése

A kételemű számok, mint végtelen-modellek a kontinuum-hipotézist nem tagadják, hanem – a geometriabéli párhuzamossági axiómákhoz hasonlóan – három lehetséges változatát nyújtják a **Cantor** által megfogalmazott „nincsenek közbülső számosságok” féle állításnak. A klasszikus kontinuum hipotézis a komplex számsík által modellezhető. A három számsík, mint végtelen-modell egyikéhez sem tartozik hozzá aktuális létezőként a 10^{μ} formában felírható nagy szám modellbéli megfelelője, ahol μ a természetes számok számosságát jelöli. Aktuálisan létező, tehát a számsíkon konkrét számként megjelenő végtelen-modell, azaz minden n természetes számnál nagyobb számnak a megfelelője, mely ugyanakkor definíciója szerint 10^{μ}-nél kisebb végtelen: a ***parabolikus számsíkon egyetlen*** létezik, a ***hiperbolikus számsíkon viszont végtelen sok*** van belőle. A ***komplex számsíkon pedig nem létezik*** konkrét számként megjelenő, azaz aktuálisan létező végtelen nagy szám modellbéli megfelelője.

Ilyen módon a háromféle számsík, mint szám-modell megfeleltethető a kontinuummal kapcsolatos állítás egy-egy speciális megfogalmazásának.

Azért nem nyilvánvaló a kételemű számokban rejlő végtelen-modell, mert ezek a számrendszerek a végtelent nem mennyiségként, hanem minőségében újként mutatják meg. Általuk a végtelen legfontosabb tulajdonságát tudjuk ábrázolni; a végtelennek nem a mennyiségi, hanem a minőségi oldalát. **A végtelen, mint másféle minőség egy új dimenzióként jelenik meg matematikailag a fent említett számrendszerekben**.