A fizika matematikája és a matematika fizikája

Szubjektív vissza- és előretekintés

1. Bevezetés

A természettudományokban akarhatjuk ugyan az objektivitást, és kell is törekednünk rá minden erőnkkel, de a nézőpontunk valamelyest mindig szubjektív marad. Ez fokozottan igaz a kvantumfizikára, ahol a tapasztalatok értelmezéseinek – gyakran egymásnak ellentmondó – sokaságával találkozhatunk. **John Gribbin** „*HAT LEHETETLEN DOLOG – Meghökkentő elképzelések a szubatomi világ rejtelmeiről*” című könyve jó bemutatója ezeknek az eltérő magyarázatoknak. Erről a könyvről, és vele a legjellemzőbb értelmezésekről írtam már egy kis cikket[1]. Most a saját értelmezéseimre fogok fókuszálni, arra, hogy mi hiányozhat szerintem a matematikából és a kvantumfizikából, és ennek segítségével milyen új értelmezésekre van lehetőség, vagy mely régi értelmezések nyerhetnek új jelentést.

Azzal, hogy hiányzó részeket említek, már sejtetem a véleményem, hogy a kvantummechanikát (QM) nem tartom teljesnek. Sokak ellenkezését váltom ki ezzel a meglátással, de legalább jó társaságban vagyok a véleményemmel, hiszen ez megegyezik **Einstein** meggyőződésével. Az einsteini nézet kialakulása óta eltelt majd egy évszázad tudásgyarapodása új érvekkel gyarapította a QM-beli rejtett változók lehetőségeit.

Két fontos elemet tartok lényegesnek a szemléletünk átalakítására. Egyrészt átfogó – a matematika egészét érintő – paradigmaváltozást hoz a *végtelen* fogalmának újraértelmezése, másrészt a **fizikában** szintén **paradigmaváltást** jelent az információ *fizikai* jellegének felismerése, az energiafajták közé sorolása, amely szintén kihat a fizika egészére. E paradigmaváltásoknak egyelőre csak a kezdetei látszanak, mert részletes kifejtésük és elterjedésük még hátra van, de már most is ragyogó távlatokat rajzolnak elénk:

- Matematika: A *mennyiségi* végtelen fogalma leszűkíthető a potenciális végtelenre – amiért annak idején **Henri Poincaré** is küzdött – majd a cantori kontinuumhipotézis (CH) és alternatíváinak[2] kételemű számokkal való modellezésével új *aktuális* végtelen fogalmat lehet bevezetni, amelyet **minőségi végtelennek** nevezhetünk. A képzetes számként ábrázolt minőségi végtelenek nemcsak a matematikát, de a matematikai fizikát is átalakítják majd.
- Fizika: Az **információ** fogalmának *fizikai* megközelítése azt jelenti, hogy a dolgokban való „bennelévőségként”, az energia egy speciális fajtájának tekintjük az információt. Ezzel az információ betölti majd a QM *rejtett változójának* a szerepét, és lehetőséget biztosít a QM teljessé tételére.

---

[1] Lásd: ***John Gribbin*** *és az igazi science fiction*, https://www.infinitemath.hu/blog/400-john-gribbin-es-az-igazi-science-fiction

[2] A CH szerint a valós számok számossága – azaz a kontinuum számosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. Ennek egyik alternatívája az, hogy létezik egyetlen ilyen számosság, a másik alternatívája szerint pedig végtelen ilyen számosság létezik.

2. Matematikai szemléletváltás

A matematikai paradigmaváltás „lelke” a kételemű szám fogalma és annak értelmezése.

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y \tag{1}$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus (duális), vagy hiperbolikus számról van szó. E számok alaptulajdonságai a Mellékletben találhatóak.

Ezek közül a komplex számok jól ismertek és a függvénytanuk is kidolgozott területe a matematikának, amit a másik két számrendszerről nem lehet elmondani.

Korábbi cikkeimben[3] sokat írtam arról, hogy **egy-egy kételemű számmal modellezhetőek az alábbiak valamennyien:**

- **a CH-alternatívák és ezzel a minőségi végtelenek,**
- **a valószínűségszámítás fajtái,**
- **a háromféle téridő.**

Maguk ezek a kételemű számok nagyon elvarázsolt matematikai kitalációnak tűnnek, a CH pedig még idegenebb lehet egy, az axiomatizált halmazelméletben járatlan embernek. Az a felismerés azonban, amely segített a képzetes elemeket a CH-alternatívákhoz kötni, az a számítástechnikában *fizikailag* megvalósított számábrázolásból fakad.[4] Így mind a kételemű számok képzetes eleme, mind a CH-alternatívák mélyen a fizikai világban gyökereznek, és ha különösnek tűnnek is ezek a számok, de éppoly tapasztalatiak, mint a természetes számok, csak a tapasztalatnak egy sokkal mélyebb szintjéről származnak, ahová csak mostanában jutottunk el a számítógépek fizikai valóságában. A képzeteseknek, és velük a kételemű számoknak ez a tapasztalati háttere most már azt is érthetővé teszi, miért olyan jól használhatóak a kételeműek a matematikai fizikában.

Egy matematikai axiómarendszer elemei minél inkább a tapasztalat idealizációi, annál inkább használhatóak lesznek a gyakorlatban az axiómarendszerből bizonyítható állítások, tételek is. Erre tökéletes példa az euklideszi geometria.

Megjegyzés

Ennek kapcsán vegyük észre, hogy az axiómák pontosítása nem más, mint Gödel első nemteljességi tételének „működése”. A tétel szerint minden ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó formális-axiomatikus elméletben megfogalmazható olyan állítás, amely se nem bizonyítható, se nem cáfolható az adott rendszerben. Így minden elég bonyolult axiomatizált rendszer tovább bővíthető, pontosabban elágaztatható a rendszerben sem nem bizonyítható, sem nem cáfolható állítás verzióival. Érdekes, hogy miközben ez a tétel sok matematikusban ellenérzéseket váltott ki, és nem-matematikus körökben többnyire félreértették, ugyanakkor ez a tétel valójában a matematika fejlődésének egyik motorja.

Két igen érdekes dologra szeretném felhívni a figyelmet:

- A kételemű számok gyakorlati alkalmazása, azaz a paragrafus elején említett háromféle modell szorosan összefügg. Véleményem szerint mind a valószínűségszámítások, mind a téridők különbözőségei a CH alternatívák, azaz a minőségi végtelenek eltéréseiben rejlenek. A valószínűségszámítások és a téridők matematikái – és az általuk leírt jelenségek – között átjárást biztosíthatnak a mindkettejüket modellező CH-alternatívák.

---

[3] Lásd erről például a témát összefoglaló „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

[4] Részletesebben lásd a 3. lábjegyzetbeli cikket.

- A kvantumok világában felsejlő komplex téridő egy igen izgalmas folyománya a téridők kételemű számokkal való modellezésének. A komplexek téridőt modellező lehetőségére a másik kettő kételemű számfajta téridő-leírásban való használhatósága világított rá, hiszen a parabolikus egységvektorokkal való szorzás a **Galilei** transzformációt modellezi, a hiperbolikus egységvektorral való szorzás pedig a **Lorentz**-transzformációt, és velük speciális téridő-viszonyokat ábrázolnak.[5] Óhatatlanul eszébe jut az embernek, hogy akkor vajon modellez-e valamilyen téridőt a komplex számok egységvektorával való szorzás, azaz téridőbeli forgatás. Reményeim szerint erre a kérdésre a választ a QM-ben kell keresni. Szerintem a QM háttérfüggetlenné tehető a komplex téridővel, hasonlóan ahhoz, ahogy **Einstein** az általános relativitáselméletben a gravitációt görbült-téridő-jelenségként írta le. Ezzel pedig lehetővé válik a gravitáció, azaz az általános relativitáselmélet és a QM egyesítése, előbb az elméleteik matematikai „összegyúrása", majd az egységes fizika felépítése.

3. Paradigmaváltás a fizikában

Felnőtt életem több mint a felében informatikával foglalkoztam, annak is a legérdekesebb és legkomplexebb részével, az informatikai biztonsággal, adatvédelemmel. A hivatalos munkám természetesen elsősorban a gyakorlati oldalát jelentette a területnek, de az elméleti oldala éppúgy, ha nem még jobban érdekelt. Mi az információ? Mint az egyszerű kérdéseknél általában, nem könnyű a válasz. Sokat írtam már erről, például **Csányi Vilmos** egyik előadása kapcsán.[6] Nem szeretném az ott leírtakat megismételni, de néhány fontos elemét ki kell emelnem.

A gyakorlati és az elméleti munka alapján nem volt túlságosan nehéz arra jutni, hogy az információ fizikai létező, és működése több, mint amit a shannoni kommunikáció-elmélet feltárt belőle. Az információ fizikai létét mások is szorgalmazták, ezek közül számomra legmeggyőzőbb **Tom Stonier** látomása volt, aki az energia, mint munkavégző képesség definíciójának mintájára az információt rendezési képességnek tartotta[7]. Ezt és a saját tapasztalataimat újragondolva, az információt én is munkavégző képességnek, az energia egy újfajta megjelenésének tartom, de nem rendezési képességnek, hanem másolási – pontosabban másolódási, azaz önreprodukciós – képességnek gondolom. Mi másolódik ilyenkor? Pongyolán fogalmazva a dolgok szerkezeti tulajdonságai másolódnak át, a szerkezet alatt az objektumok elemeinek valamely kapcsolódási tulajdonságát értve. A matematikáról szokták azt mondani, hogy nem dolgokról szól, hanem a dolgok közötti viszonyokról. Mondhatjuk, hogy a matematika a legtisztább információ.

Az információ másolódási képessége ugyan sokat sejtet, de semmiképpen nem rendezési képesség, amint **Tom Stonier** definiálta. A másolódás nemcsak rendet, de rendetlenséget is teremthet, mint minden bonyolultságot növelő folyamat. A fizikai létezőként definiált információ tehát másolódási képességénél fogva elsősorban a rendszerek bonyolultságát növeli, és ezzel az entrópiájukat csökkenti.

Tapasztalataink szerint az információra nincs megmaradási törvény, mivel az információ általában[8] megmarad a forráshelyén és megjelenik a vevő rendszerében is. Az információ másolódási

---

[5] Lásd erről „*A Galilei-transzformáció és a parabolikus számok*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

[6] Lásd az „*Információról, tudásról és hitről Csányi Vilmos egyik előadásának kapcsán*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/egyeb/420-informaciorol-tudasrol-es-hitrol-csanyi-vilmos-egyik-eloadasanak-kapcsan

[7] **Tom Stonier**, *Információ és az univerzum belső szerkezete*, **Springer Hungarica Kiadó Kft.**, 1993, 33.oldal.

[8] Ennek az állításnak a pontosítása rendkívül lényeges, de messzire vezetne, és jelen mondandóm szempontjából

folyamatában nemcsak reprodukció zajlik, de valamiféle elemi evolúciós jelenségként folytonosan új információ is keletkezik, amikor az adó információja a vevő információi közé beépül. Ez a folyamat pedig nem más, mint egyfajta *információfeldolgozás*, amely az energiafajták közül jellemzően az információ sajátja. Az információfeldolgozás minden elég bonyolult rendszerben végbemegy, ami azt jelenti, hogy a kívülről kapott információt a belső rendszerén átszűri, belső, tartalmazott információihoz hozzáilleszti, és ezzel tárolja is a kapott információt, ugyanakkor a saját információtartalmához kapcsolva új információtartalmakat hoz létre.

Az információ, mint energia a dolgokban való „bennelevőség", azaz a dolgok „tartalmazzák" azt az információt, ami megszerezhető róluk. Az energiának ez a fajtája azért nem volt eddig felismerhető, mert mennyiségileg igen parányi, és a természetben csak olyan – a hétköznapi megközelítéssel – nehezen értelmezhető folyamatokban nyilvánul meg, mint az entrópiaváltozással járó folyamatok, amelyek tulajdonképpen nem szólnak másról az új szemlélet szerint, mint az információ terjedési, azaz másolódási képességéről. A fizikai entrópianövekedés klasszikus példája az, amikor két különböző hőmérsékletű gáztartály összenyitása után a kiegyenlítődő hőmérsékletre számított entrópia nagyobb a kezdetben szeparált tartályokra számított entrópiák összegénél. Ezt ugyan zárt rendszerben lezajló folyamatként interpretálják, de ez csúsztatás a jelenség leírásában, mert épp azt a lépést hagyja ki az ábrázolásból, ami magyarázza az entrópianövekedést, ugyanis kezdetben *nyíltságot* feltételező kölcsönhatások *után* lezajló folyamatról van szó. A kezdőlépést jelentő nyíltság – két gáztartály összenyitása – nem jelent mást, mint két rendszer egyfajta egyesülését, azaz a rendszerek együttese *bonyolultságának csökkenését,* és épp ez az okozója az entrópianövekedésnek. A fizikai információelmélet alapgondolata az, hogy az entrópianövekedésben meg kell látni a bonyolultságcsökkenést, és ezzel meg kell érteni, hogy a fizikai folyamatokban jól leírt entrópia nemcsak nevében és matematikájában egyezik meg az információelmélet entrópiájával, de ugyanazon jelenséget írja le ellenkező előjellel.

A *bonyolultságcsökkenés* azt jelenti, hogy kevesebb információ szükséges egy rendszer leírására, amiből jogosan feltételezem, hogy ez egyben a rendszer információtartalmának csökkenését is jelenti. Így a hőtani entrópiából – pontosabban annak növekményéből – következtethetünk az információra, mint energiára, az energia speciális fajtájára.

Megjegyzés

Miközben a két entrópiát már korábban is azonosnak, de ellenkező előjelűnek gondolták, ugyanakkor az információt általában az entrópiával – a negatív entrópiával – azonosították. Itt viszont nem erről van szó, ugyanis az információ nem entrópia, hanem egyfajta nagyon speciális energia, és a negatív entrópia ebből *számítható*. Még sok a tisztázandó ezzel kapcsolatban, több jól ismert fogalmat kell újraértelmezni, és néhány még ismeretlen fogalmat is be kell vezetni ahhoz, hogy az információ fizikai elmélete több legyen, mint puszta elképzelés. **Tom Stonier** információról szóló könyve sok jó gondolatot tartalmaz ehhez a munkához, de meg kell tisztítani gondolatait néhány következetlenségtől és több fogalom pontosítására is szükség van.[9]

Egy aprónak tűnő, de jelentőségében hatalmas következménye az információ energia-voltának, hogy a matematika, mint a legtisztább információ is energia, így nemcsak a fizikának van matematikája, de a matematikának is van fizikája. Mára elterjedt nézetté vált, hogy a matematika nem találmány, hanem felfedezése a természet jelenségeiben fellelhető összefüggéseknek. Most már nyugodtan kijelenthetjük azt is, hogy a matematika elemei fizikai léttel bíró entitások, hiszen mint információk az energia egy speciális fajtájához tartoznak.

irreleváns.

[9] Lásd a 7. lábjegyzetbeli könyvet.

4. A QM és a rejtett változók

A fentiek alapján az információ lehet az a *rejtett változó,* amit **Einstein** feltételezett, és amellyel a QM teljessé tehető.

A QM-beli összefonódás jelensége az, amit elsőként másképp kell magyarázni, mert ennél a fogalomnál érhető tetten leginkább az, amikor egy fizikai jelenséget összetévesztenek a jelenség *értelmezésével*. Az összefonódás jelenségének azt nevezik, amikor a korábban kapcsolatba került részecskék eltávolodva egymástól külön-külön mérésük során olyan „összehangolt választ" adnak, *mintha* a mérés pillanatában információt cseréltek volna. Ez utóbbi „minthát", azaz magyarázatot – mert ez nem tény, hanem egy ténynek az értelmezése – nevezik nemlokalitásnak[10], és a fizikusok nagy hányada sajnos tényként fogadja el a kvantumok világára vonatkozóan. Az információt fizikai létezőnek tekintve, és arra gondolva, hogy egy-egy „találkozásnál" a kvantumok nemcsak klasszikus energiát, de információ-energiát is cserélnek, ekkor máris érthetővé válik a későbbi szinkronizált viselkedésük anélkül, hogy bármiféle időtlen kapcsolatot feltételeznénk közöttük. Tehát az információcsere a kvantumok korábbi találkozása során jön létre, és nem akkor, amikor esetlegesen hatalmas távolságra kerülnek egymástól, és időt nem igénylő információcserét kellene feltételezni.

Megjegyzés

> Felmerülhet a kérdés, hogy miképp tárolódhat információ egy kvantumban. E kérdés megválaszolásához elegendő arra gondolnunk, hogy nem tudnánk beszélni összefonódásról –, azaz közös múlttal rendelkező kvantumok eltávolodása utáni egyfajta szinkron-viselkedésről –, ha nem lenne olyan egyedi tulajdonságuk a kvantumoknak (pl. spinjük), amely képes „tárolni" a korábbi találkozásuk „emlékét".

Az összefonódás mellett a **Bell**-egyenlőtlenségek és az utánuk elvégzett kísérletek azok, amelyek másképp értelmezhetőek az információs paradigmaváltás után. A rejtett változók létének ellentmondani látszanak a **J. S. Bell** egyenlőtlenségei nyomán elvégzett kísérletek, amelyek abból a célból születtek, hogy tapasztalati úton eldönthető legyen a rejtett változók létének kérdése. **Bell** abból a feltevésből indult ki, hogy vannak rejtett változók, ugyanakkor hallgatólagosan azt is magától értetődőnek gondolta, hogy ezekre is az addig ismert és használt matematikai összefüggések igazak. Ha azonban a rejtett változó egyfajta tárolt információ matematikai megfelelője, akkor figyelembe kell venni, hogy – a klasszikus energetikai folyamatokkal ellentétben – az információra nincs megmaradási törvény, az információ folyamatosan keletkezik, és ezt a rájuk alkalmazott matematikai összefüggéseknek is tükrözniük kell. Ekkor már sejtjük, mi lehet a probléma a **Bell**-egyenlőtlenségekből és az ellenőrző kísérletekből levont következtetésnél. Ugyanis magukban rejtették azt a hibát **Bell** egyenlőtlenségei, hogy levezetései nem alkalmazhatók olyan rejtett változókra, amelyekre nem az épp ismert valószínűségi összefüggések igazak. A tapasztalatoknak való ellentmondás tehát nemcsak, sőt egyáltalán nem azt jelenti ebben az esetben, hogy a kiinduló feltételek, azaz a rejtett változók feltételezése hamis, hanem a számítási módszer elégtelen voltát jelzik. Ma már tudjuk, hogy a valószínűségszámításokban megjelenik mind a három kételemű számfajta, a komplex számok a QM valószínűségszámításában, a parabolikus (duális) számokról csak most derült ki, hogy a klasszikus valószínűségszámítás alapelemei[11], és megjelent a hiperbolikus QM lehetősége is, elsősorban **Andrei Khrennikov**nak köszönhetően[12], amely épp az

[10] A nemlokalitás alatt objektumok „időtlen" kapcsolatára kell gondolni, azaz olyan kapcsolatra, amelynél az információcsere nem igényel időt.

[11] Lásd ehhez a „*Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanikajahoz

[12] Ehhez is lásd a 11. lábjegyzetbéli cikket.

információváltozások leírására lehet alkalmas. Korábbi írásaimban én is használtam a kételeműekre a háromszög-egyenlőtlenségeket, mivel érdekes volt az eltérésük a különböző számsíkokon:

- **Komplex számsíkon a**z egész számsíkra, ahol P, P_1, P_2 komplex számok:

  $|P| \leq |P_1| + |P_2|$

- **Parabolikus számsíkon a** számsíknak arra a felére, ahol P, P_1, P_2 parabolikus számok valós része nem negatív szám:

  $|P| = |P_1| + |P_2|$

- **Hiperbolikus számsíkon a** számsíknak arra a síknegyedére, melynél P, P_1, P_2 hiperbolikus számok valós része nem negatív szám, és a számvektorok meredekségének abszolút-értéke kisebb, mint egy:

  $|P| \geq |P_1| + |P_2|$

Ma már nem tartom helyesnek ezeknek a háromszög-egyenlőtlenségeknek a használatát, hanem helyettük a mindhárom számsíkon teljeskörűen igaz – és az adott számfogalomnak megfelelő – általánosított paralelogrammaszabály alkalmazását tartom megfelelőnek. Ez annál is indokoltabb, mivel ezt használjuk a független események valószínűségeinek összegzésénél is:

$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \cos \Theta$ a QM-beli komplex valószínűségekre,

$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \cosh \Theta$ a hiperbolikus valószínűségekre,

$|P|^2 = |P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2| \operatorname{cp} \Theta$ a klasszikus (parabolikus) valószínűségekre.

A legutóbbi egyenletben a parabolikus (duális) koszinusz függvényre $\operatorname{cp} \Theta \equiv 1$, ezért ez megegyezik a klasszikus valószínűségi összefüggésekkel.

Egyelőre csak feltételezés, de a tapasztalattal jól megtámogatott feltételezés, hogy az információs folyamatoknál a hiperbolikus valószínűségekre felírtak igazak, mivel a koszinusz hiperbolikusz (cosch) függvény mindenütt pozitív. Ezt **Bell** számításai nem vették figyelembe.

Megjegyzem, hogy a **Bell**-egyenlőtlenségek helyett csak akkor dolgozható ki helyes és tapasztalatilag ellenőrizhető matematikai modell, és ezzel a QM matematikája akkor tehető teljessé, ha a különböző valószínűségi modellek együtt-kezelhetőek lesznek, így például megismerjük azt a bővebb számkört, amelynek mindhárom kételemű számsík a részét képezi.

5. Konklúzió

Sok-sok ember és talán több emberöltő alatt megvalósítható teendőket fogalmaztam meg az itt vázolt paradigmaváltásokkal, amelyek feltétlenül szükségesek szerintem a továbblépéshez, a tudományok fejlődéséhez. Talán sokakat elbátortalanítana a feladat nagysága, de engem lelkesít az új szemlélet szépsége és legfőképpen a használhatósága a mai „epiciklusok” helyett megfelelőbb módszerek bevezetésére, és azoknak a problémáknak a megoldására, amelyek a jelenlegi matematika és fizika, de velük együtt az összes tudományunk fejlődését akadályozzák.

Melléklet

A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (M1)$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \qquad (M2)$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j}sp\varphi) \quad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (M3)$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta\varphi} \qquad (M5)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{x - \boldsymbol{\delta}y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \qquad (M6)$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta}y$ ha $z = x + \boldsymbol{\delta}y$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.