Út a természetes számoktól a valós számokon át a kételemű számokig

A kiszámíthatóság szerepe a fizikában

„A fázistér pontjának koordinátáit végtelen pontossággal – azaz minden tizedesjegyet ismerve! – kellene tudnunk, hogy értelme legyen az állításnak, miszerint a pont nem kiszámítható. (Véges tizedestörttel leírt szám mindig kiszámítható.) Egy szám tizedes kifejtésének véges része semmit nem mond a szám teljes kifejtésének kiszámíthatóságáról. Azonban minden fizikai mérés csak meghatározott korlátos pontossággal végezhető el, csak véges számú tizedesjegyről adhat információt. Értelmetlenné teszi-e ez a "kiszámítható szám" egész koncepcióját a fizikai mérésekre alkalmazva?”
*(**Roger Penrose**, A császár új elméje – Számítógépek, gondolkodás és a fizika törvényei, 5. fejezet; A klasszikus világ, Fázistér)*[1]

1. A természetes számok és a végtelen minőségi jellege

A végtelenek minőségi jellege egészen más megvilágításba helyezi a kiszámítható szám és általában a kiszámíthatóság fogalmát. Emlékeztetőül annyit a végtelenek minőségi megközelítéséről, hogy a valós számegyenesemet olyannak gondolom, mely potenciálisan minden természetes számot tartalmaz, de a helyiértékes számábrázolásban, a 10-es számrendszerben 10^{μ} formában felírható számosságot, az úgynevezett kontinuum-végtelent már nem tartalmazza, ahol μ a természetes számok számossága. Ez azt jelenti, hogy potenciálisan μ helyiérték áll a rendelkezésemre a pozitív egészek ábrázolására. Igaz egyúttal az is, hogy aktuálisan csak véges – bár tetszőlegesen nagy – számot vagyok képes megjeleníteni. Ez a gondolatsor ihlette a kételemű számok képzetes elemeinek végtelen-értelmezését. (A kételemű számok alapvető tulajdonságait lásd a **Melléklet**ben, amit egy korábbi cikkemből[2] emeltem át, a minőségi végtelen

[1] “It would require *infinite precision* for the coordinates of a phase-space point- i.e. *all* the decimal places!- in order for it to make sense to say that the point is non-computable. (A number described by a finite decimal is always computable.) A *finite* portion of .a decimal expansion of a number tells us nothing about the computability of the entire expansion of that number. But all physical measurements have a definite limitation on how accurately they can be performed, and can only give information about a finite number of decimal places. Does this nullify the whole concept of 'computable number' as applied to physical measurements?” (**Roger Penrose**, The Emperor’s New Mind – Concerning Computers, Minds, and The Laws of Physics, Chapter 5; The classical World, Phase space)

[2] http://www.infinitemath.hu/images/stories/kvant_val_160223_v1_1.pdf

modelljének megközelítéseit pedig lásd *„A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen”* című cikkben.[3])

Már korábban kitértem arra, hogy a kételemű számok képzetes elemei nemcsak a végtelen számosságok jellemzésére használhatóak, de alkalmazhatóak olyan igen nagy, de véges számok esetére is, amikor bizonyos mennyiségi változások minőségi változássá alakulnak, például a fizikai rendszerek *fázisátalakulásainál*. Mondhatom például azt, hogy „megfelelően nagy” N-re 10^N már nem eleme a szám-modellemnek, mert 10^N nagyobb annál a mennyiségnél, amelynél a minőségi változás bekövetkezik. Ekkor a (10^N-1) számot tekintjük úgy, mint aminek négyzete valamelyik kételemű számsík képzetes egysége, azaz $10^N-1=\delta$, ahol $\boldsymbol{\delta}$ **= i, j, k** ($\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$). Korábban egy hasonló eszmefuttatásomnál feltettem azt az akkor még megválaszolatlan kérdést, hogy vajon miben különböznek azok a változások, melyek a hiperbolikus számsíkon modellezhetők azoktól, melyek a parabolikus, vagy az elliptikus számsíkon.[4] Ma már sejtem a választ erre a kérdésre; **az átalakulás során az entrópia-változás jellege határozza meg, hogy a számmodellek közül melyiket válasszuk; komplex számsíkot, ha az entrópia növekszik a változás során, hiperbolikusat, ha az entrópia csökken, és parabolikusat ott, ahol az időbeli folyamatok megfordíthatóak**. Ennek részletes vizsgálatát későbbre tervezem.

2. A helyiértékes számábrázolás és a kételemű számok

Visszatérve az alaptémához, felmerül a kérdés, hogy miképp gondolható el a végtelen „aktualizálása” egy új minőségi elemként. Elvégre mennyiségi végtelent aktuálisan nem érzékelek, csak a – mégoly nagy – végesek sorát tapasztalom, majd egy tipikus *deus ex machina* következtében megjelenik a végtelent ábrázoló minőségi új elem. Ez a varázslat azonban átemelhető a mágiák világából a matematika világába, azaz szemléletesen ábrázolható például a projektív geometriában az ideális térelemekkel, vagy homogén koordinátákkal, és még ezeknél is érzékletesebben az algebrában; a kételemű számok imaginárius elemeként. A felsorolt esetekben adott a *potenciálisan végtelen* nyílt (szám)egyenes, és mellette az *aktuálisan végtelen* elem egyfajta új dimenzióként jelenik meg a homogén koordinátákban és a kételemű számok képzetes elemében. A projektív geometriában pedig a végtelen távoli, más néven ideális pont nem a végtelen távoliságával jellemezhető, hanem egy egyenes állásával szokták szemléltetni, amiben szintén ott a közönséges ponthoz képest plusz dimenzió.

Az egész számok fogalmát kiterjesztve; a törtszámok bevezetésével a valós számokhoz jutunk. A valós törteknél μ tört-helyiérték használható fel, ahol μ a természetes számok számossága. Itt is igaz az, hogy aktuálisan csak véges – bár tetszőlegesen kicsi – számot vagyok képes megjeleníteni. A valós számok klasszikus értelmezésében vannak véges, és vannak végtelen számú tört helyiértéken ábrázolhatóak. Mielőtt tovább mennék, itt meg kell állni egy pillanatra, mivel tulajdonképpen *nincsenek* véges tört-helyiértékeken ábrázolható számok. Ez meglepő állítás lehet, pedig csak arra kell gondolnunk, hogy a törteknél a 9-es végű törteket egyenlőnek definiáltuk eddig a 0 végű törtekkel, például 0,49999…=0,50000… . **Ez az állítás viszont csak akkor korrekt, ha a tört helyiértékeken lévő 0-kat értékes 0-knak tekintjük, azaz ezeket a tört számokat is**

[3] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/199-a-geometriai-algebr%C3%A1ban-rejt%C5%91zk%C3%B6d%C5%91-v%C3%A9gtelen.html
[4] Lásd „Az idő, a tér és a végtelen” című cikk 46. lábjegyzetét; http://www.infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/88-az-id%C5%91-a-t%C3%A9r-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html

végtelen tört-helyiértéken ábrázolható számoknak tekintjük. Ezzel arra akartam rávilágítani, hogy a helyiértékes számábrázolásban minden egynél kisebb valós szám *végtelen* tizedestört. Az ehhez hasonló gondolatsor a klasszikus értelemben véges pozitív egészekre, azaz a természetes számokra is igaz, ennek részleteit a 3. lábjegyzetbeli írás tartalmazza. **A kételemű számokhoz úgy jutunk, hogy a 0 végű és a 9-es végű törtek (illetve „elejű” egészek) közötti egyenlőség mellett feltételezünk olyan számrendszereket is, ahol az egyenlőség helyett egyenlőtlenség áll**. Így jutunk a kételemű számokhoz.[5] (Meg kell jegyezni, hogy az irracionális törteket is úgy képzeljük, hogy vannak közöttük olyanok, melyeknek a „végén” megszámlálható sok nulla van, és vannak olyanok, melyeknek a végén megszámlálható sok 9-es szerepel.)

Ezek után másképp kell tekintenünk a klasszikus értelemben aktuálisan véges és a potenciálisan végtelen helyiértéken ábrázolhatónak mondott számokra. Korábban úgy fogalmaztam, hogy *aktuálisan* csak véges helyiértékeken tudok számot ábrázolni. Ez az aktuálisan csak véges helyiértéken való ábrázolhatóság – pontosabban ezek számértékének ismerete – a fentiek alapján azt jelenti, hogy mindig eléjük, vagy mögéjük kell képzelnünk a 0-kat vagy a 9-eket.

A fenti potenciális/aktuális létről írottak éppúgy alkalmazhatóak a konvergencia definíciókban szereplő végtelenekre, mint a végtelen helyiértéken ábrázolható valós számokra. Ez azt jelenti, hogy például a $\Delta x/\Delta t$-t *aktuálisan* ábrázolhatónak tekintem Δx és Δt számértékeitől függően, a dx/dt határértékképzést pedig *potenciálisan* létezőnek gondolom Δx és Δt számértékeitől függetlenül. Így **Cauchy** és **Weierstrass**, valamint a XIX. század többi nagy matematikusának eredményeit tovább kamatoztatjuk, azaz nem dobjuk ki a mosdóvízzel együtt a gyereket is. **A parabolikus és a hiperbolikus számok esetén viszont a konvergencia definiálása nem lehet azonos a valós, és a komplex számok körében jól működővel**. Nem értek egyet azokkal, akik ezeken a számsíkokon is az euklideszi mértéket használva definiálnak határértéket, ugyanis **ezeknek a számsíkoknak nem euklideszi a topológiája**. Az euklideszi mérték használata azt jelenti, hogy a számvektorok koordinátáinak konvergenciáját ekvivalensnek gondolom a számvektor euklideszi vektor-hosszának konvergenciájával. Ez igaz is euklideszi vektorterekben és a komplex számsíkon, de a parabolikus és a hiperbolikus számsíkokra *nem* az euklideszi mérték a jellemző, és a klasszikus háromszög-egyenlőtlenség helyett is más állítás igazolható. Ezeken a számsíkokon a koordináták klasszikus konvergenciájából következik ugyan a norma konvergenciája, de ez fordítva nem igaz. **Így e két számsík esetén az euklideszi mérték használata a konvergencia definíciókban – ami ekvivalens a koordináták konvergenciájával – nem vezet hamis eredményekre, a probléma az, hogy nem kapok meg általuk minden lehetséges eredményt.**

3. A potenciálisan végtelen „aktualizálása” – fizikai példák

Felmerül a kérdés, hogy matematikailag miképp ábrázolható a minőségi ugrás, azaz milyen művelettel, vagy transzformációval lépek a „végesből a minőségi végtelenbe” és fordítva, miképp jelenik meg a végesben a végtelen. A kételemű számok értelmezése és műveletei ezt megmutatják; így a minőségi végtelent ábrázoló képzetes elem négyzetre emelése egyfajta projekciója a végtelennek a végesbe, a valós számokon végzett gyökvonás pedig lépést jelenthet a „végesből a végtelenbe”. Gondoljunk arra, hogy a kételemű számok bevezetésével, ha a valós 1-ből négyzetgyököt vonunk, annak az

[5] Lásd a 3. lábjegyzetben szereplő írást.

eredménye nemcsak ±1, hanem ±**k** is lehet, ahol $\mathbf{k}^2=1$ a hiperbolikus imaginárius egység, és 0-ból négyzetgyököt vonva az eredmény nemcsak 0 lehet, hanem ±**j** is, ahol $\mathbf{j}^2=0$ a parabolikus képzetes egység. Ezekkel kapcsolatban még sok minden megfontolásra vár, viszont azonnal szembetűnik a négyzetre emelés és a gyökvonás műveleteinek fontos, „minősítő" szerepe, amelyet a fizikai mérések során is tapasztalunk. A **kvantumfiziká**ban a **valószínűségi amplitúdók** komplex számok, és ezek normájának a *négyzete* emeli klasszikus szintre a valószínűségeket (pontosabban a valószínűségként klasszikusan nem értelmezhető valószínűségi amplitúdókat). A **speciális relativitáselmélet Lorentz transzformációjá**ban az invariáns norma az **i,** azaz a komplex imaginárius egység számszorosa is lehet. Ez a megtapasztalhatóság szintjén azt jelenti, hogy **egy távolság-négyzet negatív számként is megjelenhet**. Ezt az állítást nagyon kevesen fogadnák el, hiszen nincs negatív távolság-négyzetről tapasztalatunk. Véleményem szerint **negatív távolság-négyzetet az anyag-antianyag között fellépő gravitációs kölcsönhatás taszító jellegében tapasztalhatnánk meg, ha lenne erre alkalmas eszközrendszerünk**. Ugyanis két test gravitációs kölcsönhatása nemcsak akkor lehet negatív előjelű, azaz taszító erő, ha az egymásra ható egyik tömeg negatív előjelű – ekkor egyébként sérülne a súlyos és tehetetlen tömeg sokszorosan igazolt ekvivalenciája –, hanem akkor is, ha két pozitív előjelű tömeg mellett a távolság-négyzetük az, ami negatív. Legyen ugyanis F_{12} az m_1 és m_2 tömegek között fellépő gravitációs kölcsönhatás, ekkor: $F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Látható, hogy F_{12} pozitív előjelű m_1 és m_2 tömegek mellett is lehet negatív előjelű, azaz taszító erő akkor, ha r^2, azaz a tömegpontok távolság-négyzete negatív. Ez matematikailag abból következhet, hogy a távolságnégyzetet a téridő-intervallumra vonatkozóan kell kiszámítani a pusztán térbeli mérték helyett. **A Feynman gráfokban az antirészecskék úgy jelennek meg, mint az időben visszafelé haladó részecskék. Ha ezt a – sokak által pusztán szemléletesnek – tartott képet komolyabban vesszük, akkor ez a „visszafelé haladás az időben" matematikailag azt jelenti, hogy nem térszerű, hanem időszerű intervallum választja el az anyagot az antianyagtól, azaz az antianyag az anyag időkúpjában helyezkedik el, ekkor pedig a távolságnégyzetük negatív.**[6] Erről írtam már korábban a „*Gondolatok az érzékelhető Univerzumról*" című cikkben.[7] Az antianyagnak ez az idődimenzióbeli ellentétes mozgásiránya megmagyarázná azt is, hogy miért tapasztalunk jóformán kizárólag anyagot az érzékelhető Univerzumunkban, és antianyagot csak nagyon speciális esetekben.

---

[6] Az állítás legnagyobb előnye, hogy falszifikálhatóvá válik általa a matematikai koncepció. A mérés végrehajtása ma még megoldhatatlan, de szerintem sokkal előbb válik megvalósíthatóvá, mint a húrelmélet bármely következményének kísérleti igazolása. Az antianyagok közötti erőhatásokra már nagyon jó méréseredmények születtek az elmúlt években, közöttük éppúgy vonzó-erő a gravitációs erő, mint a normál anyagnál, lásd például a következő cikket:
http://www.nature.com/nature/journal/v527/n7578/full/nature15724.html
Az anyag és az antianyag összehasonlítására azonban csak olyan mérések születtek, melyek a különböző tulajdonságaik számszerű értékeit hasonlítják össze, például a töltés-tömeg arányt, és ezek tökéletesen egyeznek. Lásd a következő cikkeket:
https://www.sciencenews.org/article/antimatter-doesn%E2%80%99t-differ-charge-mass-expectations
http://www.nature.com/nature/journal/v524/n7564/full/nature14861.html
Ismereteim szerint az anyag és az antianyag közötti gravitációs kölcsönhatás mérésének nehézségei még leküzdhetetlenek maradtak elsősorban a következő két okból (legjobb tudomásom szerint):

- A töltéssel rendelkező részecskéknél az elektromos kölcsönhatás több, mint 40 nagyságrenddel múlja felül a gravitációs erőt, ez kvantum-szinten meghaladja a méréshatárokat,
- A semleges részecskék semlegességüknél fogva nehezen manipulálhatóak a részecske-kísérleteknél.

[7] Lásd: http://infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/141-gondolatok-az-%C3%A9rz%C3%A9kelhet%C5%91-univerzumr%C3%B3l.html

4. Zárszó

A végtelenek minőségi képének helyiértékes számokkal való érzékeltetése nagyon érdekes, de tudni kell, hogy például a hiperbolikus számsíkon a képzetes egység nem egyenlő sem a 0,9999… tört számmal, sem a …9999 végtelen nagy egész számmal. A másik két számsíkon sem szabad ilyen direkt megfeleltetésre gondolni. A kételemű számok a**z extenzív és az intenzív végtelen dualitásánál fogva mindkettőre vonatkozóan ábrázolnak olyan viszonyokat, tulajdonságokat, melyek a valós számok körében nem szemléltethetőek.** Így a valós számok helyiértékes ábrázolásában felmerült kérdésekre másik számrendszerekben kapunk választ[8]. A fent leírt szemléletes képek csak segítenek annak az állításnak az elfogadásában, hogy a kételemű számok a kontinuum hipotézist és annak két másik alternatíváját modellezik, azaz a **Cantor** nyomán a megszámlálható sok és a kontinuum sok közötti végtelenek létének/nem-létének eseteit ábrázolják.

Mindezek nem teszik értelmetlenné a kiszámíthatóság problematikáját a fizikai méréseknél, de a kérdés fontosságát háttérbe szorítják. Szerintem ez a válasz **Penrose** költői kérdésére a kiszámíthatósággal kapcsolatban, melyet a mottóban idéztem. **Sokkal fontosabb a minőségi ugrások „megjósolhatóságával" kapcsolatos ismeret a mérések finomítási problémájánál.** Természetesen gyakran szükséges a megfigyelések – és így a számábrázolások – finomítása, azaz a mérések olyan fejlesztése, melyek számszerűsítésénél több *nem-nulla* (*vagy nem-kilences*) helyiértékre van szükségünk. Viszont ezt a finomítást nem kell a végtelenségig folytatni, – annak reménye nélkül, hogy valaha is elérjük az abszolút pontosságot –, hiszen **a minőségi ugrás előbb-utóbb bekövetkezik[9]**. Vannak területek – elsősorban a fizikában – ahol már sokat tudunk a minőségi ugrásokról, például az egyes fázisátalakulások esetén, ezek közül csak egyet említve; tudjuk például a hőmennyiség igényét egy adott térfogatú jég felolvadásának. Ezzel szemben sokkal több olyan jelenség van, ahol keveset, vagy alig tudunk valamit a minőségi ugrások feltételeiről. **A kételemű számok képzetes eleme, mint a végtelenek minőségi jellemzője sokat segíthet a minőségi változások leírásában**. Még nagyobb segítség lehet, ha igaznak bizonyul, hogy a változás entrópia-modelljétől függ, hogy a kételemű számok közül melyik alkalmas a folyamat ábrázolásakor.

[8] Például a 0- és 9-es végű törtek kezelésének kérdésére, vagy az ezzel összefüggő kontinuum hipotézisben megfogalmazottakra.

[9] Legalábbis a méréseknél. De hát minden információszerzés egyfajta mérés, és tapasztalataink is azt erősítik meg, hogy a mennyiségi növekedést minőségi ugrás követi. (A minőségi ugrásba beleértem a megsemmisülést is.)

Melléklet

1. A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \delta y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (M1)$$

Ahol x és y valós számok, $\boldsymbol{\delta}$ = **i, j, k** ($\mathbf{i}^2$=−1, $\mathbf{j}^2$=0, $\mathbf{k}^2$=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \mathbf{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \qquad (M2)$$

$$z = x\left(1 + \mathbf{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(\mathrm{cp}\,\varphi - \mathbf{j}\mathrm{sp}\varphi) \quad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (M3)$$

$$z = x(1 + \mathbf{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \qquad (M5)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (M6)$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{x - \boldsymbol{\delta}y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \qquad (M7)$$

Ahol $\boldsymbol{\delta}$, mint fent, azaz $\boldsymbol{\delta}$ = **i, j, k** ($\mathbf{i}^2$=−1, $\mathbf{j}^2$=0, $\mathbf{k}^2$=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta}y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta}y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényekre **cp [arg(z)] ≡ 1**, **sp [arg(z)] = y/x**, ahol **arg z = y/x**.

2. Geometriai elemek a kételemű számok síkjain

2.1 A szorzás képe

Mindhárom számsíkon a számok **szorzásánál** a normák szorzódnak, az argumentumok összeadódnak, és az egységvektorok szorzása egy-egy fizikai mozgást ír le:

2.1. körmozgást a komplex számoknál,

2.2. egyenes menti eltolást a parabolikus számoknál,

2.3. hiperbolikus forgatást – azaz Lorentz-forgatást – a hiperbolikus számoknál.

2.2 Az összeadás képe

E számok **összeadás**ának síkbeli képe vektorok összeadása, tehát a paralelogramma-szabályt követi. Az azonos előjelű, valós normájú kételemű számokra felírható háromszög-egyenlőtlenségeknek érdekes az eltérése:

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (M7)

   a **komplex** számoknál az egész számsíkon,

2. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (M8)

   a **parabolikus** számoknál a számsík azon felén, melyekre a szám valós része nem negatív,

3. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2|$ (M9)

   a **hiperbolikus** számoknál a számsík I. sík-negyedében, tehát azokra a számokra, melyek valós része pozitív, és nagyobb, mint az imaginárius egységelem valós szorzója.

3. A kételemű számok és a geometriai algebra

A kételemű számok a kvadratikus formával ellátott egydimenziós térből generált kétdimenziós **Clifford**-algebrát reprezentálják. Elmondhatjuk, hogy **a geometriai algebra legegyszerűbb, egydimenziós vektorok által generált fajtái egyáltalán nem szegényes szerkezetűek, hanem igen izgalmas alapstruktúrát mutatnak a komplex, a parabolikus és a hiperbolikus számok formájában**.

4. Geometriák modellezése

Ha egy gömb sugarát R, görbületét ρ-val jelölöm és az arányukra a következő igaz:

1. $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$
2. $\boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$
3. $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$

ahol $\mathbf{i}^2$=-1, $\mathbf{j}^2$=0, $\mathbf{k}^2$=1, akkor ezeken a gömbökön leírt síkgeometria a hiperbolikus, az euklideszi és a gömbi síkgeometria modellje.

Természetesen ez egyelőre csak formai érdekesség, hiszen például a 2. esetben az R sugár, mint kételemű szám nem értelmezhető, a többi esetben pedig a sugár és a görbület, mint képzetes szám értelmes, de mint geometriai fogalom csak a kételemű számok képzetes részének végtelen értelmezésével közelíthető meg.

Megjegyzem, hogy a **Bolyai**-geometriát formálisan egy komplex sugarú gömbön modellezték eddig, itt pedig komplex görbületű gömböt használtam az analógiára. Az elliptikus és a hiperbolikus esetben ez formálisan mindegy, de a parabolikus számoknál az R, mint sugár nem értelmezhető kételemű számként, amint utaltam rá, ezért indultam ki a görbületekből. Az extenzív és intenzív végtelenek dualitásából viszont az következik, hogy akár a sugárból, akár a görbületből való kiindulás ugyanarra az eredményre vezet.

5. Halmazelméletek modellezése, és a végtelen, mint új minőség megjelenítése

A kételemű számok, mint végtelen-modellek a kontinuum-hipotézist nem tagadják, hanem – a geometriabeli párhuzamossági axiómákhoz hasonlóan – három lehetséges változatát nyújtják a **Cantor** által megfogalmazott „nincsenek közbülső számosságok” féle állításnak. A klasszikus kontinuum hipotézis a komplex számsík által modellezhető. A három számsík, mint végtelen-modell egyikéhez sem tartozik hozzá aktuális létezőként a 10^{μ} formában felírható nagy szám modellbeli megfelelője, ahol μ a természetes számok számosságát jelöli. Aktuálisan létező, tehát a számsíkon konkrét számként megjelenő végtelen-modell, azaz minden n természetes számnál nagyobb számnak a megfelelője, mely ugyanakkor definíciója szerint 10^{μ}-nél kisebb végtelen: a ***parabolikus számsíkon egyetlen*** létezik, a ***hiperbolikus számsíkon viszont végtelen sok*** van belőle. A ***komplex számsíkon pedig nem létezik*** konkrét számként megjelenő, azaz aktuálisan létező végtelen nagy szám modellbeli megfelelője.

Ilyen módon a háromféle számsík, mint szám-modell megfeleltethető a kontinuummal kapcsolatos állítás egy-egy speciális megfogalmazásának.

Azért nem nyilvánvaló a kételemű számokban rejlő végtelen-modell, mert ezek a számrendszerek a végtelent nem mennyiségként, hanem minőségében újként mutatják meg. Általuk a végtelen legfontosabb tulajdonságát tudjuk ábrázolni; a végtelennek nem a mennyiségi, hanem a minőségi oldalát. **A végtelen, mint másféle minőség egy új dimenzióként jelenik meg matematikailag a fent említett számrendszerekben**.