Az MTA Filozófiai Kutatóintézetének

AKADÉMIAI-FILOZÓFIAI SZABADEGYETEME

Henri Poincaré, *Tudomány és föltevés.* Budapest: Kir. Magyar Természettudományi Társulat, 1908.

Poincaré Henri filozófiájának alapeszméi.

Összefoglalta *Szilárd Béla.*

A természetbúvárok egy része abban leli örömét, ha tudományának határait minél magasabb fallal vonhatja meg. Azt hiszi, hogy az így elhatárolt terület alkalmasabb a munkálkodásra, mert avatatlan kezek nem férnek hozzá; mert õ sem kíván e falon túl látni, úgy véli, ez meg fogja õt minden olyan botlástól óvni, a mely idegen eszmék káros hatásából ered.

Az a természetbúvár, a ki így gondolkodik, eltévesztette a czélját. Elfelejtette, hogy az õ mûködési köre tulajdonképpen csak a nagy egésznek egy lánczszeme: lánczszem, mely mire sem jó, ha az elõtte és utána következõbe bele nem kapcsolódik.

Mi is a természetbúvár föladata? Az, a mi minden emberé, olyas valamit végezni, a mi neki czélszerû, olyan módon, a hogyan neki kényelmes. Bármilyenek is a nyiltan bevallott szempontok, magát a cselekvést semmi más végsõ tényezõ nem irányíthatja. S a természetbúvárra ez még fokozottabb mértékben érvényes, mint bárki másra, mert az, a ki a természet tanulmányozásával tölti el életét, ezen a téren jobban be tudja látni, hogy miképpen cselekedjék, hogy valamely czélt a lehetõ legkényelmesebben közelítsen meg?

Ám valamely czélhoz mindig sokféle út vezet, közöttük egy, a mely valamennyinél símább, egyenesebb. Az ember lehetõleg ezt az utat fogja kiválasztani. Hogy milyen sikerrel, az az õ tényleges ismereteitõl fog függeni. Ha azután azt látja, hogy az egyszer áttört út járható, ezt csak egy még annál is kényelmesebbért lesz hajlandó elcserélni. Az egyszerût, a még ennél is egyszerûbbért. Ez az a jelenség, a melynek bélyegét minden emberi cselekedet magán viseli.

Így az aránylag nagy belátással megszerzett természeti törvények is: minél nagyobb szabásúak, minél általánosabbak, annál egyszerübbeknek látszanak. Azt mondjuk e szerint, hogy a természet egyszerû, hogy jelenségei nem összetettek. Vajjon csakugyan így van-e ez? Minekünk embereknek, bizony mindegy, ha nem így van is. A fõ az, hogy mi így látjuk, hogy a felfogásnak ez a módja kielégít bennünket oly értelemben, hogy benne nem csalatkozhatunk, és hogy az így megszerzett úton mindaddig járhatunk, a meddig tetszik, illetve a míg egy még ennél is kényelmesebb nem akad.

A természettudományok nem szeszélybõl, vagy véletlenül születtek. Nem az emberek vannak hivatva õket szolgálni, hanem megfordítva. Ám a természet annyira megközelíthetetlen: legkisebb és legnagyobb részei egyaránt felfoghatatlanok elõttünk. S az ismereteinknek mégis messze bele kell nyúlnia ebbe az óriási Nagyba, ha valóban alkalmas, hasznos ismeretekre akarunk szert tenni. A tudományok nem is lehetnek másként hasznosak, csak ha, miként a hidra karjai, egy fõbe futnak össze. Akkor szolgálhatnak minket: mert csak ez a czéljuk, nem pedig az, hogy az ember büszkén állíthassa, hogy „tudományt csinált".

A természet egyes részeinek nincsenek megvont határai: a természettudományoknak sem szabad e szerint egymástól elszigetelten állani. A természetbúvár fûzze belé a maga csiszolta lánczszemet a mellette levõkbe: csak akkor cselekszik helyesen.

De vajjon tudjuk-e, hogy mit tesz az, helyesen cselekedni; s ha igen, vajjon miféle czél szolgálatában állunk? Csakis ennek a biztos ismeretnek a birtokában tudjuk irányítani a cselekedeteinket; csak akkor alkothatunk igazán tudományt, ha a czélt tisztán látjuk. Pillantsunk végig a mi czéljainkon meg azok eredetén: *a Poincaré* szemüvegén át.

***

Az ember a természet szülötte, de nem elsõszülött. Még bölcsõjében volt s már minden jó készen várta: igaz ugyan, hogy csak a kezét kellett kinyujtania, hogy azt, a mi neki kedves, elérje. De mire a kezével annyira elnyúlt, az elõbbszülöttek leharapták elõle az édes falatot. Mert azoknak a keze hosszabb volt és gyorsabban mozgott. De az ember volt annyira értelmes, hogy *belássa,* hogy ez a bolygó nem az õ gyönyörüségére termett, hanem a mindenség egyszerûen ezt jelölte ki neki küzdõtérül. Mindene megvan, amire csak szüksége lehet, de õ itten a legutolsó gyermek, mostoha egy kissé, mert fegyvertelen, de dédelgetett, mert az agya *öntudatra* képes.

Hanem ez azután jóformán az egyetlen eszköze. Ezt kell tehát a küzdelemben felhasználni.

Sokat *fáradni, küzdeni nem akart:* érezte, hogy ez az õ életének czélja nem lehet: De mindent, a mit látott, a magáénak óhajtotta. Gyönge erejével hogyan érje ezt el?

Megtanulta lassacskán, hogy a gondolkodó agy nagyobb hatalom, mint az óriási, nyers, külsõ erõ: a veremre rakott hajlékony nádszálak tõrbe viszik a rettenetes oroszlánt.

Úgy találta, hogy túlsokan vannak, a kik egyet-mást birtokolnak abból, a mit õ magáénak akar. Ezeket mindenáron le akarta gyûrni, de nem kínlódással, nem kart karnak vetve, mikor gyõzelemre amúgy sem lehet kilátása; hanem kényelmesen, vígan, *az adott körülmények között a lehetõ legjobban élve.*

Megkisérlette azért a környezõ természet elleni harczot is. Elõbb makacsúl, követelve, fenyegetve, majd, a mikor a természet hullámai porba dobták, kérve, könyörögve. De a gyötrelmes imák nem használtak többet a hiú káromlásnál. Az ég felé lõtt nyilvesszõ éppen úgy nem sebesítette meg azt, a kinek szánva volt, mint a hogy az áldozati bárány vére nem hatotta meg a szomjas földet.

A nagy sikertelenség gondolkodóba ejtette; *belátta,* hogy módszerei, melyekkel képzelt czélját elérni akarja, semmire sem jók.

Tanácsot kért az anyjától, a természettõl, hogy mit tegyen? Ám az hallgatással felelt. S talán százezer évek multak el, míg az ember reájött, hogy e hallgatás a legtökéletesebb felelet. Megismerte nagysokára, hogy az a kincs, a mit e hallgatás rejt magában: az a *következetesség.* Tudatára ébredt lassankint annak, hogy ez az egyetlen felismert sajátság kezébe ad mindent, de mindent, a mirõl csak valaha álmodott, *hogy az õ öntudata, meg ez a következetesség együttesen* elébe helyezik õt minden más lénynek:

S ez a következetességbe vetett bizalma rendkívül termékenynek bizonyult, mert nemcsak a dolgok megszerzését, hanem a megszerzés legkönnyebb módját is lehetõvé tette… S az ember mindent, mindent akart s egyre olcsóbban akarta…

A következetesség felismerése a természet jelenségeinek megfigyelésére késztették, mért tisztán látta, hogy ama tünemény, mely ma bizonyos törvényszerûséggel folyik le, holnap, meg ezután is csak így folyik le, tehát a mai napon megismerésükre fordított munka holnap, meg holnapután már ugyancsak *„hasznosítható".* Ha megismertem egyszer a szél szokásos irányát, tudom, hogy a fáradságom nem vész kárba, ha olyan gépet építek, a mely a szelet ugyanabból az irányból várja. Ha sikerült egyszer kiderítenem, hogy melyik kõ az, a mely a legkevesebb dörzsölésre ad tüzet, holnap már kényelmesebben élek, mert nem kell minden utamba esõ követ megdörzsölnöm, míg végre egy olyanra akadok, a mely tüzet ad! *Minden olyan ismeret hasznos tehát, a mely valamely megismétlõdõ tényrõl felvilágosítást ad; mert munkát takarít meg.*

Az idõk egyre ujabb ismereteket adtak. Akadtak közöttük olyanok is, a melyek közvetlenül nem voltak felhasználhatók: az ember észrevette, hogy ezek a már-már feledésbe ment észrevételek késõbb nagyon jól felhasználhatók. Majd nagysokára világos lett elõtte, hogy tulajdonképpen az egész természetben nincs egyetlen olyan tény, a melybõl az idõk folyamán valami hasznot ne lehetne húzni, akár úgy, hogy újabb dolgok uraivá leszünk, akár, hogy ugyanazon dolgokhoz, a melyek megszerzése azelõtt igen nagy fáradságba került, könnyebben jutunk hozzá.

Ezek a szempontok és ismeretek együttesen szülték meg a természettudományokat, emberi czéloknak emberi eszközökkel megszerzett hatalmi tényezõit.

A természettudományok, a maguk teremtette mûveltség világításában, különféle irányokba terelõdtek, de módszereik, eszközeik, keletkezésük bélyegét feltûnõen magukon viselik. Az ember a kisebbik czél megvalósítására sem használ más módszereket, mint a mely a végczélhoz közelít. Legyen az, a mit meg akar szerezni valamely tárgy, vagy akár az ezen tárgy birtoklásába segítõ ismeret: az ember erejével takarékos marad. A legkevesebb fáradsággal a leggyorsabban, vagy mondjuk a *legegyszerûbben* igyekszik a *czélját meg közelíteni.* S ettõl nem tér el, bármilyenek legyenek is a körülmények.

Hogyan van hát mégis, hogy ma másként jutunk el némely czélhoz, mint száz évvel ezelõtt? Hogyan van, hogy az egyik ember másként cselekszik, mint a másik? És hogy ugyanazt a czélt az egyik esetben másként közelítjük meg, mint a másikban? Vajjon nincs-e mindez ellenmondásban azzal, a mit az elõbb kifejtettünk? Bizonyára nem. Ha módszereink változnak, rendszerint javulnak, *s így jobban uraivá tudnak lenni olyan jelenségnek, a mely a maga lényegében ma is csak úgy folyik le, mint talán tízezer év elött, mikor az ember esetleg elõször vett róluk tudomást.*

Az egyik ember ismeretei szûkebbek, mint a másiké, tehát másként, de még mindig a legjobb belátása szerint fog cselekedni. Másrészt a czél közvetlen elérésének sokszor akadályai vannak, melyek a legegyszerûbb egyenes utat, bonyolódott görbe vonallá változtatják. De azért *az adott körülmények között* mégis csak ez a legegyszerûbb út.

Ime ilyenek az opportunizmus, az „alkalmazkodás" kifejlõdésének körülményei az embernél. Hogy mi magának a jelenségnek az oka, azt könnyû szerrel, vagy talán mondhatnók, ma egyáltalában semmiféle módon nem deríthetjük ki. Hogy azonban ez minden cselekedetünknek jellemzõ vonása, azt tisztán látjuk: Maga a tudomány is opportunus eredetû, annál inkább ilyenek azok a módszerek, a melyeket bennük alkalmazunk.

Ez az opportunizmus képezi *Poincaré* filozófiájának egyik legsarkalatosabb tételét s egyszersmind, hogy*Spencer* nyelvével éljünk, egyik végsõ alapelvét.

***

Az emberi küzdelmek közepette az emberi agy sajátságosan fejõdött ki.

Fel kell tennünk, hogy az emberben már akkor, mikor - hogy úgy mondjuk - elõször ment „emberszámba", a tulajdonképpeni ösztönszerûség maradékai ugyancsak megvoltak. Ám lassankint tudatára ébredt annak, hogy a mennydörgés hatalmas hangja nem az õ megrémítésére szolgál, s hogy a földrengések nem a bûnösök megfélemlítésére valók. A „csodáktól" való félelem lassanként eltünt, vele együtt az ösztön is háttérbe szorult. Helyébe azután a belátással kapcsolatosan igen különös képességek léptek: az agy, a természet megfigyelése közben bizonyos gyakorlatra tett szert, a mely késõbben olyan kifejezetté vált, hogy némely esetben mintegy eleve kijelölte az utat, a mely a legegyenesebben czélhoz vezet, míg máskor valamilyen más út ellen a legerélyesebben tiltakozik, mintegy elõre érezve, hogy az haszontalan és csak csalfa útvesztõ.

Akármilyen ösztönszerûnek lássék is az elsõ pillanatra ez az újabb képesség, mégsem tekinthetõ egyszerûen az egykori ösztön maradékának. Ha így lenne, sokkal kevésbé lenne tökéletes, és napról-napra gyengülnie kellene, holott éppen az ellenkezõjét tapasztaljuk. Ez a különös, mindenesetre az ösztönnel sok rokonságot eláruló képesség nem maga az ösztön, hanem egy annál sokkal magasabb rendû és hatalmasabb sajátság, mely amahhoz csak kifejlõdésének módjában és megnyilvánulásában hasonlít.

Maga az ösztön is valamelyes tapasztalatsorozaton keresztûl fejlõdik ki. Ám ezt a tapasztalatsorozatot meg kellett elõznie valamilyen más megnyilvánulásnak, a mely a késõbbi ösztönnek eleme maradt. A régi ösztön ugyanilyen eleme maradt annak a mai képességnek, a melyrõl fennebb beszélve azt mondottuk, hogy a helyes út megválasztásában támogat bennünket. Az a tapasztalatsorozat teszi reá képessé, a melyen mintegy iskola módjára már keresztülment. S mivel ez az iskola nagyon régi s mivel az ember mindig is súlyt helyezett reá, hogy jó tanítvány legyen, maga a képesség is erõsen kifejlett és sokszor a túlságig elõtérbe jut.

Mikor azt mondjuk, hogy ha ezt, vagy amazt az utat választjuk, akkor a szellemünk követelményeinek eleget tettünk; mikor azt mondjuk, hogy az ilyen vagy amolyan keresztülvitel ellen az emberi elme tiltakozik, mindannyiszor tulajdonképpen ez az Ariadnefonal vezet bennünket, cselekvésre késztet valamilyen irányban, vagy ennek az ellenkezõjére ad útmutatást a nélkül, hogy elhatározásunk okát, legalább azonnal meg tudnók indokolni.

De azért a czélszerûség elve nem szenved csorbát: hiszen ez a képesség is csak emennek a szolgálatában fejlõdött ki. A természet állandóságának tudatából, a mi alkalmazkodó törekvéseinkbõl elõáll egy magasabb rendû következtetés. Valamely jelenség lefolyását számos esetben tapasztaltam; egy más jelenség hasonlóságokat árul el: *hogy az agyam ki légyen elégítve,* feltételezem, *hogy e másik jelenség amazzal nemcsak külsõleg, hanem belsõleg is hasonló bár még csak kilátásom sincs reá, hogy ezt a hasonlóságot a közel jövõben igazolhassam.* De az reám nézve nem is fontos, nem is érdekes. Csak az az egyetlen körülmény jelentékeny, hogy az által, hogy ezt ahhoz hasonlónak veszem fel, olyan következtetéseket tehetek, melyek reám nézve újabb czélszerûségeket képeznek. *Ez a feltevés legegyszerûbb formája,* mely ama tökéletesített *ösztön* nélkül sohasem születhetett volna meg.

Ime ezen ösztön létezésének feltételezése a *Poincaré* második alapelve.

***

Az emberek a természettudományokat nem valami földöntúli lényeknek, hanem saját maguknak a használatára eszelték ki. S a mint ezen a határon túlmentek - mert talán pillanatokra ez megesett - eltévesztették a czéljukat.

Dicséretükre legyen mondva, a czélról ritkán feledkeztek meg, sokkal kevesebbszer, mint a hogyan talán az elsõ pillanatra hinnõk. Akadtak idõnkint olyanok, a kik hirdették, hogy minden mellékes, csak az igazságnak kell eleget tenni. Csak hosszú idõ elteltével látták be, hogy igaz az, a mi czélszerû, tehát az, a mi hasznos, *az ennek következtében reánk nézve* igaz.

Talán kellemetlen ezt az önzetlennek, ideális czélokért rajongónak ismert természetbúvár szájából hallani. Talán túlemberi a dolgoknak ilyen elbírálása, talán túlmerész a ki ezt így kinyilvánítani bátorkodik.

Valóban *csak* kinyilvánítani merészség lenne. De ime: elõáll valaki s óriási szellemi aranytömegre mutatva így szól: ezekkel az elvekkel az agyamban, a miket most fennen hirdetek, mindezt én teremtettem. Szép és jó, nem tagadhatjátok, mert magatok is elismertétek, mielõtt a gondolataim hátterét ismertétek volna. Most megmutatom, hogy ezek a gondolatok e munkákban hallgatagon benn vannak, mint a hogy minden *ember* munkájában benn kell, hogy legyenek, tekintet nélkül arra, hogy maga a munka viszonylagosan értékes-e vagy sem.

S egyszerre elõttünk állanak a természettudományok meztelenebbre vetkõztetve, mint a hogy eddig embernek sikerült, éles, finom bonczkéssel feltárva az erek, melyek lüktetve hirdetik, hogy ezek az óriási épületek nem egyebek bálványoknál, mit az ember a saját képére teremtett abból, a mi rendelkezésére állott, de *a saját maga számára,* a saját szolgálatára.

S ez nem is lehet másként. A legtöbb tudás alapja csak a tapasztalat marad. Azt, hogy a szerzett tapasztalat mennyire áll távol a valóságtól, azt mi soha, soha meg nem tudhatjuk: azaz, hogy úgy mondjuk, a mi igazságaink csak a mi tapasztalatainkkal összefüggésben születhetnek meg. De ezen túl azután nincs is az ember számára megismerhetõ valóság. Ez az örök határ, a legeslegvégsõ alapelv.

***

Nézzük most még fõbb vonásaiban azt a filozófiát, a melyet ezekre az ugyancsak emberi alapelvekre olyan mesteri kezekkel felépíteni lehetett.

Valósággal úgy vagyunk a filozófiával, mint az egyes államok polgárai az állami épületekkel. Ha az állam szabad, polgárai egyenjogúak, bizalommal tekintenek középületeik felé, mintegy jogot éreznek hozzá, sajátjuknak, mindenkiének tekintik, belõlük várják mûveltségük elõbbrevitelét. Az elnyomott állam polgárai másképpen tekintenek a maguk megfelelõ intézményeire. Az elsõ érzésük mindjárt az, hogy ez a haszontalan kõhalmaz tulajdonképpen senkié, csak útban áll, s a fejlõdés elnyomására jó.

A természetbúvár talán nem is képzeli milyen nagy hatalomra tesz szert, ha ilyen értelemben felszabadítja magát; urrá lesz saját maga fölött, falakat rombol le, melyeket azelõtt talán maga emelt, s az eddig csalhatatlan szabályok kezdenek összezsugorodni. Kezdi észrevenni, hogy akármilyen keveset puhatolt is ki a nagy mindenségbõl, bizonyos értelemben az talán mégis több, mint a mi oda be van írva. Vagy talán maga a természet ismeri-e a számokat? Vagy ismeri-e a geometriát? Bizony aligha. Ha meg a természettõl független dolgok ezek, miért alkotta meg õket az ember éppen így, s miért nem másként?

A végsõ alapelvek minderre határozott választ adnak. A tudományok czélszerûségek, s a módszerek megválasztásában is csak ugyanez az alapelv vezet bennünket. S minden lépésben, minden úton ez és csakis ez kormányoz bennünket. Ez a kis czél, a módszer, a nagy és végsõ czél egyaránt. Érdekesnek találjuk annak fölemlítését, *hogy Poincaré* szerint, mindez csak a *tudomány határain belül van így:* a tudomány módszerei fölött a czélszerûség uralkodik ugyan, de a tudomány mint olyan, nem eszköz, hanem végczél. A tudomány maga tetszõ, szép s ezért mûveljük.

Van-e valósággal tér, idõ? Nekünk az teljesen mindegy; de ha úgy cselekszünk mintha lenne, czéljainkhoz közelebb jutunk, tehát ki vagyunk elégítve. Annak a bizonyítását megkisérelni, hogy abszolut valóságok-e ezek, czéltalan vállalkozás lenne.

S vajjon a tudományokban tényleg czélszerûek-e az ilyen feltevések? Bizonyára. Sõt föltétlenül szükségesek, mert. a tudomány legfõbb érdeme hogy általánosít, s ez az általánosítás mindig bizonyos föltevésekkel jár. Ám akármily élesen figyelhetõk meg a kísérleti tények, mindig módosulásnak vannak alávetve, olyan mértékben, a hogyan a megfigyelõ eszközeink javúlnak. A tudomány szigorúan vett alapköveinek ennél szilárdabbaknak kell lenniök. S ilyenné teszik *a részben* bevitt megállapodások. Azok igazak fognak maradni mindaddig, a míg nekünk *tetszenek.* Egyik geométria nem is *igazabb,* mint a másik, mint a hogy a méter alkalmazása nem teszi biztosabbá a térrõl alkotott fogalmainkat annál, mintha ma is csak öllel mérnõk a hosszuságot.

Akármennyire behatoltak is a feltevések a tudományokba, azért a tudomány mégsem csupa alapelvbõl áll. Azok, a kik ilyennek akarják feltüntetni, ismét elfelejtik, hogy mi is a czél? A feltevés csak addig jogosult, ameddig szükséges, mert ha a természetet ismerni akarjuk, kell, hogy annak a tényei, nem pedig az agyunk játékai kormányozzák a vizsgálódásainkat.

Vannak-e az anyagnak atómjai, vagy nincsenek? Majd az egyik, majd a másik nézet jut az idõk folyamán elõtérbe. Vajjon annyit jelent-e ez, hogy a tudomány bizonytalan, tehát hasznavehetetlen? Korántsem: éppen ez a hullámzás bizonyítja, hogy a tudomány fejlõdik; ha az egyik, vagy a másik nézet kerül idõnkint túlsúlyra, az nem jelenti azt, hogy a másik nem igaz. Akár van atóm, akár nincs, mindegy. Ezt a föltevést, vagy az ellenkezõjét csak arra használjuk, hogy vele a jelenségeket általánosítsuk s hogy így a tudomány hatásfokát minél jobban növelve, azt lehetõ gyorsan vigyük elõre. Vajjon nem mindegy-e most már, hogy ezt abban a tudatban teszem, hogy valóban van atóm, vagy ha az ellenkezõjérõl vagyok meggyõzõdve? Minden eszköz egyaránt hasznos, igaz, ha a nagy czélt szolgálja.

S a mikor az ember ezt a filozófiát tanulmányozva ezt átérti, azt látja, hogy mindezt hinni valóban kényelmes, *tehát nekünk igaz!*

Párizs, 1908 junius 23.

Szilárd Béla.

Henri Poincaré, *Tudomány és föltevés.* Budapest: Kir. Magyar Természettudományi Társulat, 1908.

ELSÕ RÉSZ.

A szám és a mennyiség.

ELSÕ FEJEZET.

A mathematikai következtetési módok természetérõl.

Már az maga, hogy a mathematika tudománya létezhetik, megoldhatatlan ellenmondásnak látszik. Ha e tudomány csak látszólag deduktiv, honnan veszi azt a tökéletes szigorúságot, melyet senki sem mer kétségbe vonni? Ha pedig ellenkezõleg összes tételei, melyeket kifejez, a logika szabályai szerint egymásból levezethetõk, miért nem zsugorodik: össze a mathematika egyetlen azonossági állítássá? Alogikai következtetés semmiféle, lényegében új dolgokra nem taníthat bennünket és ha minden az azonosság elvébõl indul ki, minden vissza is vezethetõ oda. Föltehetjük-e, hogy az oly sok kötetet megtöltõ tantételek nem egyebek, mint a kerülõ utakon való kifejezései annak, hogy *a* egyenlõ az *a*-val? Kétségkívül megtaláljuk azokat az alapelveket, melyek az összes meggondolások forrásai. Ha azonban megállapítjuk, hogy nem lehet õket elvi ellenmondásokra visszavezetni s ha nem akarunk bennük oly kisérleti tényeket látni, melyeket nem köt a mathematikai szükségszerûség. még mindig módunkban van õket a szinthétikus "*a priori*"ítéletek közé sorozni. Ez azonban nem jelenti a nehézség leküzdését, csak elkeresztelését; sõt még ha a szinthétikus itéletek természete nem is volna már titok elõttünk, az ellenmondás mégsem tünnék el, legfeljebb csak messzebbre távoznék tõlünk.

A következtetés képtelen arra, hogy azokhoz az adatokhoz, melyeket kiinduló pontul felveszünk, valami újat adjon; a kiindulásúl választott feltevések néhány alapelvre zsugorodnak össze s a következtetések eredményeiben sem lelhetnénk fel egyebet ezeknél.

Egyetlen tétel sem lehetne új, ha levezetésénél valamely új alapföltevés nem szerepelne; maga a logikai okoskodás sohasem nyujthatna semmi mást, mint a közvetlen szemléletbõl merített igazságokat és nem lenne egyéb, mint valami élõsdi közvetítõ; nem lenne-e ez esetben igazán helyénvaló az a kérdés, hogy az egész szillogisztikus módszer nem egyes-egyedül csak arra jó-e, hogy eltakarja azt, mennyiben vettünk már kölcsön valamit a valóságból?

Még szembeötlõbb lesz az ellenmondás, ha belepillantunk valamely mathematikai munkába: minden oldalon azzal találkozunk, hogy a szerzõ valamely már ismert tétel általánosítását kisérli meg. Következik-e ebbõl, hogy a mathematika módszere a részlegesbõl halad az általános felé? És ha igen, miért nevezzük hát mégis dedukciónak?

Ha végül, a számok tudománya tisztán analitikai természetû volna a mely kevés számú szinthétikus itéletbõl analitikai eljárásokkal állhatna elõ, akkor azt gondolhatnók, hogy valamely hatalmasabb szellem egy pillantásra megláthatná összes igazságait, sõt még azt is remélhetnõk, hogy valaha ki fogják találni azt az egyszerû nyelvet is, melylyel kifejezve, ezen igazságok önként érthetõkké lesznek még a közepes mûveltségû egyének elõtt is.

Ha nem fogadjuk el ezeket a következtetéseket, akkor el kell ismernünk azt, hogy a mathematikai okoskodás már önmagában teremtõ természetû, tehát a logikai következtetés természetétõl különbözik.

Ez a különbség nagyon is mély: pl. nem fogjuk megtalálni e rejtélyek kulcsát annak a szabálynak gyakori használatában, mely szerint két egyenlõ számra ugyanazon módon alkalmazott ugyanoly mûvelet egyenlõ eredményeket ad.

Mindezek a következtetési módok, akár visszavezethetõk a tulajdonképeni szillogizmusra, akár nem, megõrzik analitikai jellegüket és éppen ennek következtében magukban véve tehetetlenek.

II.

A vita már régi keletû. *Már Leibnitz* megkisérelte annak a bebizonyítását, hogy 2 meg 2 az 4. Vizsgáljuk meg kissé e bizonyítást.

Tegyük fel, hogy az 1-es szám fogalmát meghatároztuk valamilyen úton, és hogy az x+1 mûvelet annyit jelent, mint az egységet valamely adott x számhoz hozzáadni.

Ezek a meghatározások, akármilyenek legyenek is, a további fejtegetésnél nem fognak szerepelni.

Már most a következõ egyenletekkel határozzuk meg a 2, 3 és 4 mennyiségeket:

$$1 + 1 = 2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$2 + 1 = 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

$$3 + 1 = 4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Ugyanily módon határozzuk meg az x + 2 mûveletet a kõvetkezõ egyenlettel:

$$x + 2 = (x + 1) + 1 \; . \; . \; . \; . \; .(4)$$

Ezt most a továbbiakban alkalmazva, azt kapjuk, hogy:

2 + 2 = (2 + 1) + 1 . (elsõ meghatározás)

(2 + 1) + l = 3 + 1 . (második meghatározás)

3 + 1 = 4 . . . . . (harmadik meghatározás)

a honnan

2 + 2 = 4 . . . . . a mi bebizonyitandó volt.

Nem állíthatjuk, hogy ez az okoskodás nem tisztán analitikai természetû. De kérdezzük csak meg a mathematikust, azt fogja felelni: "Ez nem tulajdonképpeni bizonyítás, hanem ez igazolás" .

Azt tettük mindössze, hogy két megállapodásszerû meghatározást közelebb hoztunk egymáshoz és megállapítottuk azonosságukat: az egész mûvelet nem tanított bennünket semmi újra.

Valamely állítás *igazolása* éppen abban különbözik ugyanezen igazság valóságos *bebizonyításától*, hogy tisztán analitikai természetû és hogy meddõ. Meddõ pedig azért, mert a leszûrt állítás nem egyéb mint *az eleve feltételezetteknek* kimondása más nyelven. Ezzel szemben a valóságos bizonyító levezetés nagyon termékeny, mert az ily módon nyert végeredmény sokkal általánosabb, mint az eleve feltett igazságok.

A 2 + 2 = 4 egyenlõség különben csak igazolásra alkalmas, mert egészen részleges állítás. Már pedig a mathematikában minden részleges állítás igazolható ily módon. Ha azonban a mathematika csak a hasonló igazolások sorozata volna, akkor nem lenne tudomány. A sakkjátékos például egyáltalában nem teremt tudományt azzal, hogy egy-egy játszmát megnyer. Csak az tudomány, a mi az *általánossal* foglalkozik.

Sõt, még azt is mondhatjuk, hogy éppen a mennyiségi tudományok czélja az, hogy megkiméljenek bennünket a közvetetlen igazolásoktól.

III.

Lássuk tehát munkájában a mathematikust és lessük meg mûveleteit.

Feladatunk nem lesz éppen könnyû; nem elégséges valamely munkát bárhol kinyitni és megvizsgálni bármelyik levezetését.

Vizsgálati anyagunkból mindenekelõtt ki kell zárnunk a geométriát, hol feladatunk a . követelmények. szerepének, a térfogalom természete és eredetének kényes kérdései miatt, sokkal bonyolódottabb. Hasonló okokból nem fordulhatunk a végtelen kicsinyekkel való számoláshoz sem. Ott kell keresnünk a mathematikai eszméket, a hol tiszta állapotban lelhetõk fel, tehát a *szám*tanban.

De még ott is válogatnunk kell; a *szám*elmélet legmagasabb részeiben az elemi mathematikai elvek már oly mély átalakításon mentek át, hogy megvizsgálásuk tulságosan nehéz.

Az elemi számtan kiinduló pontjaiban reméljük tehát a magyarázatokat megtalálni, a melyekre szükségünk van; sajátos azonban, hogy éppen ezeknek a legelemibb elveknek bizonyításában fejtettek ki a klasszikus érte e szerzõi a legkevesebb szabatosságot és szigort. Ezért azonban nem szabad õket váddal illetnünk, kénytelenségbõl jártak így el. Akezdõ rendszerint nincs hozzászokva a mennyiségtan valódi szigorához, inkább csak hiábavaló és kellemetlen szõrszálhasogatást lát benne: az, a ki nagyon korán, mindjárt kezdetben mélyebben látókká akarná õket tenni, csak hiába pazarolná el az idejét. Szükséges eszerint, hogy gyorsan, megállás nélkül végigmenjenek az egész úton, melyet a tudomány megalapítói lassanként haladva követtek.

Vajjon mire jó az ilyen hosszadalmas nekikészülõdés ahhoz, hogy a teljes szigort megszokjuk, mikor arra - legalább úgy látszik - minden józan gondolkodó önként is reá jön? Ez bizonyára oly logikai és lélektani kérdés; mely érdemes lenne a megvizsgálásra.

De mi nem állunk meg mellette, mert a mi vizsgálódásaink tárgyától messze esik. Csak azt tartsuk meg mindebbõl, hogy, hacsak czélunkat eltéveszteni nem akarjuk, újból kell megalkotnunk a legelemibb tételek bebizonyítását és nem szabad meghagynunk õket ama nyers, határozatlan alakban, melyet azért szokás alkalmazni, hogy a kezdõket ne terheljük, hanem oly fogalmazást kell adnunk, mely a gyakorlott mathematikust is kielégíti.

Az összeadás fogalmának meghatározása.

Tegyük fel, hogy az $x + 1$ mûvelet fogalmát, mely abból áll, hogy az 1-es számot az x mennyiséghez hozzáadjuk, elõzõleg meghatároztuk.

Ez a meghatározás, akármilyen legyen is, az alanti fejtegetésben semmi szerepet nem fog játszani.

Most arról lenne szó, hogy meghatározzuk az $x + a$ mûveletet, mely abból áll, hogy az a mennyiséget valamely x mennyiséghez hozzáadjuk.

Tegyük fel, hogy az

$$x + (a - 1)$$

mûveletet már meghatároztuk, akkor az $x + a$ a következõ képpen lesz meghatározva:

$$x + a = [x + (a - 1)] + 1 \; . \; . \; . \; . \; .(1)$$

Megtudjuk, hogy $x + a$ mennyi, ha tudjuk, hogy $x + (a - 1)$ mennyi és minthogy kezdetben felvettük, hogy tudjuk, mi az $x + 1$, fokról-fokra visszamenõen meghatározhatjuk az $x + 2$, $x + 3$ stb. mûveleteket.

Ez a meghatározás már megérdemel egy pillanatnyi figyelmet, mert sajátságos természetû, mely a tisztán logikai meghatározástól sokban különbõzik; az (1) egyenlet a meghatározásoknak már egész sorát foglalja magában, melyek mindegyikének csak akkor van határozott értelme, ha ismerjük a megelõzõ meghatározást.

Az összeadás sajátságai.

Az asszocziátiv sajátság.

Azt állítjuk, hogy :

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Ezen egyenlõség valóban helyes, ha $c = 1$; ez esetben ugyanis:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1;$$

ez ugyanis nem egyéb, a jelölésektõl eltekintve, mint az (1) egyenlõség, a melylyel az imént az összeadást meghatároztuk. Tegyük fel, hogy a fenti tétel a $c = \gamma$ esetre érvényes, akkor azt állítom, hogy érvényes a$c = \gamma + 1$ esetre is. Ha ugyanis

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma);$$

ebbõl következik, hogy:

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma) + 1;$$

vagyis az (1) meghatározás értelmében :

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)],$$

a mi az analitikai levezetések egész sora kapcsán azt mutatja, hogy tételünk valóban a $\gamma +1$ esetben is érvényes. Minthogy a $c = 1$ esetben érvényes, így kimutathatjuk, hogy a c = 2, c = 3 stb. esetekben mindig érvényben marad.

A kommutátiv sajátság.

1. Azt állítjuk, hogy:

$$a + 1 = 1 + a.$$

A tétel nyilván helyes az a = 1 esetben. Analitikai okoskodással azonban azt is *bebizonyíthatjuk*, hogy ha igaz az $a = \gamma$ esetén, akkor az $a = \gamma + 1$ esetén is helyes marad. Már pedig helyes a = 1 esetén, helyes lesz tehát a = 2, a = 3 stb. esetén is; ez az az eljárás, melyrõl azt mondjuk, hogy a tétel helyessége visszamenõleg (rekurrens eljárással) lett bebizonyítva.

2. Azt állitjuk, hogy:

$$a + b = b + a$$

A tétel helyességét a $b = 1$ esetben már fennebb bebizonyítottuk; analitikai módon *igazolhatjuk*, hogy ha; a b = β esetben helyes, akkor igaz lesz a b = β + 1 esetben is.

A tételt tehát visszamenõ bizonyítással helyesnek találtuk.

A szorzás fogalmának meghatározása.

A szorzást a következõ egyenlõségekkel határozzuk meg:

$$a \times 1 = a;$$

$$a \times b = [a \times (b - 1)] + a \ldots (2)$$

A (2) egyenlõség, mint akár az (1) egyenlõség a 12. lapon, egész sor meghatározást foglal magában; ha egyszer a 1-et meghatároztuk, a nyert meghatározással fokról-fokra meghatározhatjuk a 2-õt, a 3-at stb.

A szorzás sajátságai.

Disztributiv sajátság.

1.Azt állítjuk:

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Analitikailag bebizonyíthatjuk, hogy az egyenlõség a $c = 1$ esetben érvényben marad; azután azt, hogy ha a tétel a $c = \gamma$ esetre is érvényes, igaz lesz a $c = \gamma + 1$ esetben is. Igy a tételt itt is *visszamenõ* módon bizonyítottuk.

Kommutátiv sajátság.

l. Azt állítjuk, hogy:

$$a \times 1 = 1 \times a.$$

Hogy a tétel az $a = 1$ esetben helyes, az világos. Analitikailag bebizonyíthatjuk, hogy ha az $a = \alpha$ esetben helyes, igaz marad *az* $a = \alpha + 1$ esetén is.

2. Azt állítjuk, hogy:

$$a \times b = b \times a .$$

Azt már kimutattuk, hogy a tétel $b = 1$ esetben helyes. Analitikailag kimutatható; hogy, ha a $b = \gamma$ esetben helyes, akkor helyes marad a $b = \beta + 1$ esetben is.

IV.

De hagyjuk félbe az okoskodásoknak ezt az ugyancsak egyhangú sorozatát. Ez az egyhangúság mégis legjobb feltüntetõje annak az eljárásnak, mely mindig ugyanaz, melylyel lépten-nyomon találkozunk.

Ez az eljárás a visszamenõ úton való (rekurrens) bizonyítás: Megállapítjuk elõbb a tételt az $n = 1$ esetre; azután kimutatjuk, hogy ha érvényben van az $n = 1$ esetén, igaz marad az n esetére is, a mibõl azután következtetjük, hogy az *összes* többi egész számok esetén is igaz.

Láttuk, hogyan lehet levezetni segítségével az összeadás és szorzás szabályait, azaz általában az algebrai számolás törvényeit; ez a számolás oly átalakítási segédeszköz, mely sokkal több különbözõ csoportosításra alkalmas, mint az egyszerû logikai következtetés, de még mindig csak tisztán analitikai természetû és egyáltalában nem alkalmas arra, hogy bennünket bármi új dologra is megtanítson. Ha a mathematikai tudományoknak nem lenne ezen kívül semmi eszköze, fejlõdésük azonnal megakadna; de idõnként visszatérnek azon eljáráshoz, melylyel a számolás törvényeit levezették, a visszamenõ okoskodáshoz, és ennek segítségével tudják folytatni útjukat elõre.

Ha jól megfigyeljük, ilyenféle okoskodással lépten-nyomon találkozunk, még pedig vagy ama legegyszerûbb alakban, a milyent itt adtunk neki, vagy valamely más, többé-kevésbbé átalakított formában.

Mindenesetre ez a tulajdonképpeni mathematikai okoskodás; szükséges tehát, hogy még kissé közelebbrõl vizsgáljuk meg.

V.

A visszamenõ következtetésre nézve legjellemzõbb az, hogy mintegy egyetlen képletbe sûrítve végtelen sok szillogizmust foglal magában.

Hogy ezt jobban megfigyelhessük, fel fogom sorolni végig e szillogizmusokat, melyek, legyen szabad e képet használnom, sorozatos vízesések módjára vannak elrendezve.

Megjegyzendõ, hogy mindezek feltételes szillogizmusok.

A tétel érvényes az 1 esetén.

De, ha érvényes az 1 esetén, érvényes a 2 esetén is.

Tehát a 2 esetén érvényes.

Ha azonban a 2 esetén érvényes, érvényes a 3 esetén is.

A 3 esetén tehát érvényes.

S így tovább.

Látjuk, hogy minden egyes szillogizmusból vont végeredmény az utána következõnek alapjául szolgál.

Továbbá az összes szillogizmusok végeredményei egyetlen képletben fejezhetõk ki:

Ha tétel érvényes az n - l esetben, érvényben lesz az n esetében is.

Látjuk tehát, hogy a visszamenõ eljárásnál arra szorítkozunk, hogy az elsõ szillogizmus kiindulását mondjuk ki és azt az általános képletet, mely az összes végeredményeket mint különös esetekét tartalmazza. Ilyen módon a szillogizmusok hosszú; soha nem végzõdõ sorozatát néhány sorból álló tételre tömöríthetjük össze.

Mindezek alapján könnyen megérthetjük, hogy valamely tételnek bármely részleges következménye - a mint azt már fennebb is jeleztük - tisztán analitikai eljárással mindig igazolható.

Ha pl. a helyett, hogy tételünk helyességét valamennyi számra nézve akarnók bebizonyítani, csak azt akarjuk látni, hogy a 6 esetén helyes-e, elegendõ lesz . vízesésünknek. elsõ 5 szillogizmusát felállítani; ha azonban tételünk helyességét a l0 szám esetében kutatjuk, már az elsõ 9 szillogizmust kell felállítanunk, s még jobban megnõ e sorozat, ha a szám, melyre a bizonyítás végzendõ, még nagyobb.

Azonban, akármekkora is a szám, végül mégis czélhoz jutunk, s az analitikai igazolás minden esetben keresztülvihetõ lesz.

És mégis, akármilyen messzire menjünk is ezen az úton, soha sem emelkedhetünk az általános tételhez, mely valamennyi mennyiségre érvényes; pedig a tudomány tárgyát csakis az ilyen tételek képezhetik. Hogy ide eljussunk, a szillogizmusok végtelen sorára lenne szükség, egy oly szaka dékon kellene keresztüljutnunk, melyet a kizárólag formális logikai eszközökkel felszerelt analitikus türelme sohasem tudna betölteni.

Elõbb már kérdeztük: miért nem képzelhetünk oly hatalmas szellemet, a ki az összes mathematikai igazságokat egyetlen szempillantásra áttekinti ?

A felelet ugyancsak idõszerû most. A sakkjátékos kiszámíthat elõre 4 húzást, akár 5-öt is, de akármilyen rendkívüli játékosnak képzeljük, az elõre kigondolt húzások száma mindig véges lesz; ha képességeit azután az arithmetikában kísérli meg, bizonyára nem fogja az általános igazságokat egy pillanat alatt átlátni; hogy eljusson a legkisebb tételhez, nem fogja nélkülözhetni a visszamenõ okoskodási módszert, mert ez az eszköz a végestõl a végtelenre vezet át bennünket.

Azért hasznos ez az eszköz, mert arra képesít bennünket, hogy egyetlen tétel segélyével annyi közbeesõ pontot ugorjunk át, a hányat csak jónak látunk; megkimél bennünket hosszadalmas, egyhangú és fárasztó igazolásoktól, a melyek elõbb-utóbb amúgyis kivihetetlenek.

A rendszer azonban nemcsak hasznos, hanem egyenesen szükséges legott, mihelyt az általános tételt tartjuk szem elõtt; melyhez az analitikai módszerekkel egyre közelebb és közelebb jutunk a nélkül, hogy valósággal eljutnánk hozzá.

Az arithmetika e részében azt gondolhatjuk, hogy a végtelenekkel való számolástól ugyancsak messze vagyunk és íme a mathematikai végtelen eszméje máris fontos szerepet játszik és nélküle, bizony tudomány nem lenne, mert semmi általánosat nem nyujtana.

VI.

Az az itélet, melyen a visszamenõ eljárással való okoskodás alapszik, más alakba is öltöztethetõ: azt mondhatjuk pl., hogy az egész számok végtelen sorozatában mindig van egy, mely az összes többinél kisebb.

Az egyik itéletrõl így könnyû szerrel átmehetünk a másikra s végül saját magunkat abban a hitben ringatnók, hogy a visszamenõ eljárás jogosultságát bebizonyítottuk. Csakhogy egy nehézség mindig jelentkezni fog, egy bebizonyíthatatlan alapelvhez mindig el fogunk jutni, mely alapjában nem egyéb, mint maga a bebizonyítandó tétel, csak másképpen kifejezve.

Az alól a végsõ következtetés alól tehát nem térhetünk ki, hogy a visszamenõ eljárás törvénye nem vezethetõ vissza az ellenmondások elvére.

E törvényhez tapasztalat útján nem juthatunk el. A tapasztalat megtaníthat bennünket pl. arra, hogy a törvény az elsõ tíz, az elsõ száz számra érvényes. E tapasztalat azonban a számok végtelen sorára ki nem terjedhet, hanem a számsornak mindig csak kisebb vagy nagyobb, de föltétlenül határolt, véges részére.

Ha azonban csak errõl van szó, úgy az ellenmondások elve elegendõ lenne; annyi szillogizmust tudnánk segítségével felállítani, a mennyit akarunk; csak, ha arról van szó, hogy végtelen sok szillogizmust egyetlen formulába szorítsunk, akkor a "végtelen" elõtt cserben hagy bennünket az elv és éppen ez a pont az, hol a tapasztalat is tehetetlenné válik. Ez a törvény, mely az analitikai bizonyítás és a tapasztalat számára egyaránt oly hozzáférhetetlen, az *"a priori"* szinthétikus itélet tulajdonképpeni mintaképe. Másrészrõl azonban nem lehet benne csupán megállapodást látni, mint egyes geométriai követelményekben.

Miért tör hát elõ mégis ez az itélet oly ellenállhatatlan meggyõzõ erõvel? Mert nem egyéb, mint az ész hatalma tudatának a megnyilvánulása, a mely érzi, hogy el tudja képzelni valamely lépésnek végtelenszer való ismétlését, mihelyt e lépés egy ízben lehetséges.

Az ész ezen képességét közvetlen szemlélettel látja és a tapasztalás csak alkalmat ad neki, hogy azt érvényesítse és hogy ezáltal e képesség tudatossá legyen.

Másrészrõl mondhatnók, hogy ha a nyers kisérlet a visszamenõ okoskodásnak nem tudja létjogosultságát bebizonyítani, mit tehet a kisérlet, ha. az indukczióval szövetkezik?

Fokozatosan látjuk, hogy valamely tétel érvényes az l. számra, a 2-re, 3-ra stb. a *törvény tehát nyilván helyes,* mondjuk és ugyanoly joggal, mint bármely fizikai törvény, mely oly megfigyeléseken alapszik, a mely észlelések száma bár igen nagy, de mindig véges.

Félre nem ismerhetõ, hogy szembeötlõ a hasonlatosság a szokásos indukczió eljárással, de azért a kettõ között lényeges a különbség. A fizikai tudományokra alkalmazott indukczió mindig bizonytalan, mert a nagy mindenség általános törvényszerûségébe vetett hiten alapszik, maga a törvényszerûség pedig rajtunk teljesen kívül áll.

Ezzel szemben e mathematikai indukczió, azaz, a visszamenõ eljárással való bizonyítás szükségképpen helyes, mert nem egyéb, mint szellemünk egyik tulajdonságának megerõsítõ hangoztatásása.

VII.

Mint már fennebb is mondottuk, a mathematikus mindig a problémák *általánosítására* törekszik; hogy más példát ne keressünk, az imént bizonyítottuk be az

$$a + 1 = 1 + a$$

egyenletet; ezen egyenletet felhasználtuk azután az

$$a + b = b + a$$

egyenletnek bebizonyítására, mely az elõbbinél általánosabb.

A mathematika tehát, akár a többi tudornányok, a különöstõl az általános felé haladhat.

Ez pedig oly tény, mely nekünk kezdetben teljesen érthetetlennek látszhatott, de a mi most már semmiképpen sem titokzatos, mivel hogy láttuk, hogy a visszamenõ okoskodásnak az egyszerû indukczióval sok közös vonása van. Kétségkívül, a visszamenõ mathematikai okoskodás, meg az induktiv fizikai okoskodás különbözõ alapokon nyugszanak, de menetük azért mégis közös irányban halad, a különöstõl az általános felé.

Vizsgáljuk a dolgot kissé közelebbrõl.

Az alanti

$a + 2 = 2 + a$ ....(1)

egyenlet bebizonyítására elegendõ kétszer alkalmazni az

$$a + 1 = 1 + a$$

szabályt a következõ alakban :

$$a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a \text{ ...(2)}$$

Az így levezetett (2) egyenlõség, melyhez tisztán analitikai úton jutottunk az (1)-bõl, mégsem annak az (1)-nek különös esete: hanem egészen más.

Még azt sem mondhatjuk tehát, hogy a mathematikai okoskodások tisztán analitikai és deduktiv részében - a szó szoros értelmében - éppen az általánostól a különös felé haladnánk.

A (2) egyenlet két oldala egyszerûen csak bonyolódottabb természetû, mint az (1) egyenlet tagjai s az analizis csak arra jó, hogy elválaszsza egymástól azokat az elemeket, melyek e csoportosításban szerepelnek, hogy tanulmányozhassuk egymáshoz való vonatkozásukat.

A mathematikusok mintegy "szerkesztés" segélyével haladnak, bonyolódottabb csoportosításokat "szerkesztenek". Az analizis segélyével visszatérve azután az így nyert összetett fogalmakról, hogy úgy mondjuk halmazokról az alkotó elemekhez, megállapítja ez elemeknek egymáshoz valóvonatkozásait, valamint maguknak a halmazoknak egymáshoz váló vonatkozását is.

Ez az út tisztán analitikai ugyan, de mégsem halad az általánostól a részletes felé, mert hiszen a halmazokat mégsem tekinthetjük részletesebbeknek, mint alkotó elemeiket.

E "szerkesztõ eljárásnak" igen nagy fontosságot tulajdonítottak, sõt éppen az ilyen eljárásban látták a mennyiségi tudományok fejlõdésének szükséges, sõt elegendõ feltételét.

Hogy ez "szükséges" , annyi bizonyos, de nem "elegendõ" .

Ahhoz, hogy valamely eljárás hasznos legyen, ne a szellem hiábavaló fárasztása, hanem a magasba vágyóknak hasznavehetõ útja legyen, ahhoz szükséges, hogy bizonyos egységességgel rendelkezzék, melynek segítségével egyebet is láthassunk benne, mint a saját elemeinek az egymás mellé állítását.

Vagy, hogy szabatosabban szóljunk, szükséges, hogy több elõnyt lássunk abban, ha a szerkesztést vizsgáljuk, mint ha magukat az elemeket tekintjük.

Milyen elõnyök lehetnek ezek?

Egy példával felelünk: miért tegyük vizsgálataink tárgyává a sokszöget, mely mindig felbontható háromszögekre, mikor közvetlenül az elemi háromszöget is vizsgálhatjuk?

Azért, mert vannak oly sajátságok, melyeket az akárhány oldalú sokszögekre nézve bebizonyíthatunk s a melyeket közvetlenül alkalmazhatunk egy bármely különös sokszögre.

Ellenben legtöbbször csak hosszabb fáradozás útján lelhetjük meg az uralkodó szabályt oly módon, hogy az elemi háromszögek vonatkozásait közvetlenül tanulmányozzuk. Az általános elv ismerete azonban megkimél bennünket az efféle munkától.

A szerkesztés tehát csak akkor lesz érdekes, ha hasonló más szerkesztések mellé sorozhatjuk be, melyek egy és ugyanazon nem alá tartozó fajok.

Ha a négyszög más valami, mint két háromszög egymásmellé helyezése, az annyit jelent, hogy a négyszög a "sokszög" nemhez tartozik.

Még az is szükséges, hogy a nem sajátságait be lehessen bizonyítani, a nélkül, hogy kénytelenek lennénk a bebizonyítást fokozatosan elvégezni az egyes fajokra nézve.

Hogy ezt megtehessük, szükségképpen fokról-fokra menve a különöstõl az általános felé kell haladnunk.

A "szerkesztõ" analitikai eljárás nem kívánja a lefelé haladást, hanem ugyanabban a magasságban hagy bennünket.

Magasabbra csak mathematikai indukczióval juthatunk, mely egyedül képes bennünket valami újra megtanítani.

Enélkül az indukczió nélkül - mely bizonyos értelemben eltér a fizikában alkalmazásban lévõ indukcziótól, anélkül, hogy kevésbbé termékeny lenne - a szerkesztõ eljárás maga képtelen lenne megalkotni a tudományt. Végezetül tegyük még hozzá, hogy ez az indukczió csak akkor lehetséges, ha valamely mûvelet végtelen sokszor megismételhetõ. Ez egyszersmind az oka annak, hogy a sakkjátékból soha sem lesz tudomány; mert hiszen ugyanazon játszmának különbözõ huzásai nem hasonlítanak egymáshoz.

MÁSODIK FEJEZET.

A mathematikai mennyiség és a tapasztalat.

Ha azt óhajtjuk megtudni, hogy mit ért a mathematikus a folytonosság alatt, akkor e kérdéssel ne a geométriához forduljunk. Ez mindig arra törekszik, hogy a tanulmányozott alakzatokat többé-kevésbbé elképzelje magának, de azért e képzetek nem egyebek az õ számára, egyszerû eszközöknél; tanulmányozza a geométriát a tér segélyével, melyet azonban nem használ mélyebb czélokra, mint akár a krétát, melylyel rajzol; vigyáznunk kell tehát, hogy némely mellékjelenségnek ne tulajdonítsunk túlnagy fontosságot, éppen úgy, a hogy nem kell tulajdonítanunk fontosságot annak, hogy a használt kréta éppen fehér.

A tiszta mathézissel foglalkozónak nem kell félnie az efféléktõl; õ a mathematika tudományát megfosztotta minden idegen elemtõl s megfelelhet a kérdésünkre: Mi az igazi értelme anak a folytonosságnak, a melyet a mathematikusok vizsgálnak? Sok mathematikus, a ki tud gondolkodni a tárgyán, már megadta a feleletet. Így többek között például *Tannery a „Bevezetés az egyváltozós függvények elméletébe*c”[*] zímû munkájában.[2]

Induljunk ki az egész számok sorozatából; helyezzünk most két tag közé egy vagy több új tagot, majd ugyanezen új tagok közé megint újabbakat. Azután ismételjük meg, illetve folytassuk tovább ugyane mûveletet végtelen sokszor. Ilyen módon végtelen sok újabb tagot kapunk, az ú. n. tört vagy összemérhetõ számokat. De ez még nem elég. Ezek közé a máris végtelen sok mennyiség közé még újabbakat kell iktatnunk, az ú. n. irraczionális vagy összemérhetetlen számokat.

Mielõtt tovább mennénk; tegyük meg az elsõ észrevételünket. Az ily értelemben felvett folytonosság nem egyéb oly tagok gyüjteményénél, melyeket bizonyos rendbe soroztunk; számuk végtelen ugyan, de mindegyik különáll a többitõl. De ez nem a rendes felfogás, a melynél a folytonosság elemei között valamely bensõbb kapcsolat létezik, a mely által egy egészszé olvadnak össze, a melyben nem a pont létezett elõbb mint a vonal, hanem a vonal elõzte meg a pontot. Abból a híres mondásból; hogy a folytonosság az egység az összetettségben, egyedül az összetettség marad meg, az egység eltünt. A mathematikusoknak éppen úgy igazuk van akkor, mikor az õ folytonosságukat úgy határozzák meg, mint a hogy említettük, mert okoskodásaik mindig ugyanerre a fogalomra vonatkoznak, a mióta a szigorú okoskodásra súlyt helyeznek. Ez azonban elegendõ annak felismerésére, hogy az igazi mathematikai folytonosság egészen más valami, mint a fizikus vagy a metafizikus folytonossága.

Talán azt is mondhatjuk, hogy a mathematikusok, kik ezzel a meghatározással beérik, szavakkal ámítják önmagukat, és hogy szabatosan meg kellene mondani, hogy tulajdonképpen mik e közbeesõ tagok; meg kellene magyarázni, hogyan kell ezeket egész számok közé beiktatni, és be kellene bizonyítani, hogy a beiktatás valóban lehetséges is. Ezen ellenvetés nem helyes, mert e tagoknak egyedüli sajátsága, a mely az okoskodásokban szerepel, az, hogy valamely más ilyen tag elõtt, vagy után fordulnak elõ: csakis ezen sajátságnak szabad tehát elõfordulni a fogalmi meghatározásban.[*]

Így tehát nincs okunk a miatt nyugtalankodni, hogy a közbeesõ mennyiségeket hogyan kell beiktatnunk; másrészt senki sem fogja kétségbe vonni e mûvelet lehetõségét, de legalább is nem fogja elfelejteni, hogy a „lehetõség” a mathematikus szótárában nem jelent semmi egyebet, mint ellenmondásoktól való mentességet.

Meghatározásunk azonban mégsem tökéletes; reátérünk most e hosszas kitérés után.

Az irraczionális számok fogalmának meghatározása.

A berlini mathematikus iskola, nevezetesen *Kronecker*[3] foglalkozott a tört és az irraczionális számok ezen folytonos sorozatának oly megszerkesztésével, melyben más mint egész szám nem jut alkalmazásra. Ilyen felfogás szerint a mathematikai folytonosság tisztán az ész alkotása lenne, melyben a tapasztalatnak semmi szerepe sincs.

Minthogy úgy látták, hogy a raczionális szám fogalma nem okoz nehézséget, az irraczionális számok ily módon való meghatározására törekedtek. Mielõtt azonban e helyen ismételnõk az õ meghatározásukat, egy észrevételt kell közbeszúrnunk, hogy megelõzzük azt a csodálkozást, melyet eljárásuk a mathematikusok szokásaival kevésbbé ismerõs olvasóban keltene.

A mathematikus nem a tárgyakat tanulmányozza, hanem a tárgyaknak egymáshoz való vonatkozásait. Az õ szempontjából teljesen közömbös tehát, ha e tárgyakat más tárgyak helyettesítik, hacsak a vonatkozások ezáltal változatlanok maradnak. Az anyag reájuk nézve éppen nem fontos, csak az alak érdekli õket.

Ha ezt nem vennõk tekintetbe, nem érthetnõk meg, hogy *Dedekind* az *„irraczionális szám”* névvel egy egyszerû jelet illet, azaz olyas valamit, a mi igen különbözik attól a fogalomtól, melyet valamely mennyiségrõl magunknak alkotni szoktunk, a melyen ugyanis valami mérhetõt, jóformán kézzelfoghatót szoktunk érteni.

Ime, ezek után *Dedekind* meghatározása: A raczionális számokat végtelen sokféleképpen lehet oly két osztályba soroznunk, hogy az elsõ osztály bármely száma „nagyobb legyen, mint a második csoport bármely száma:

Megeshetik, hogy az elsõ osztály számai között akadni fog egy, mely kisebb ugyanazon osztály bármely másik számánál, így például ha az elsõ osztályba sorozzuk mindazokat a számokat; melyek 2-nél nagyobbak, meg a 2-t magát is, a második osztályba meg a 2-nél kisebb összes számokat; világos, hogy 2 lesz az elsõ osztály összes számainak legkisebbike. Tehát a 2-es szám e felosztási mód jelképeül választható.

Azonban az is lehetséges, hogy a második osztály tagjai között létezik oly tag, a mely a második osztály összes többi számánál nagyobb; ez fordul elõ például akkor, ha az elsõ osztály az összes 2-nél nagyobb számokat tartalmazza, míg a második osztály az összes 2-nél kisebbeket és 2- õt magát. Itt tehát a 2 még mindig szerepelhet, mint ezen felosztási mód jelképe.

De végre az is megeshetik, hogy sem az elsõ osztályban nem lehet oly számot találni, mely ugyanazon osztály összes többi számánál kisebb, sem a másodikban olyat, mely a második osztály összes többi számánál nagyobb. Tegyük fel például, hogy az elsõ osztályba sorozzuk mindama raczionális számokat, melyek négyzete 2-nél nagyobb és a második osztályba azokat, melyek négyzete 2-nél kisebb. Így az elsõ osztályban valóban nem fog akadni egyetlen egy szám sem, mely az összes többinél kisebb lenne, mert akármily közel legyen is valamely szám négyzete a 2 értékéhez, még mindig léteznek oly számok, melyeknek négyzete a 2 értékét felülrõl még jobban megközelítik. *Dedekind* ezen felfogása szerint a

$$\sqrt{2}$$

irraczionális szám nem egyéb, mint a valós számok ezen különös felosztási módjának jelképe; eszerint minden felosztási módnak megfelel valamely raczionális vagy irraczionális szám, a mely a felosztás jelképéül szolgál.

De ezzel beérni annyit jelentene, mint nagyon is elfelejteni e jelképek eredetét; hátra van még annak a megmagyarázása, hogyan jutottunk oda, hogy e jelképeknek mintegy valódi létezést tulajdonítsunk és másrészrõl kérdés, vajjon a nehézségek nem kezdõdnek-e mindjárt a törtszámoknál? Vajjon megvolna-e eme számok fogalma, ha elõbb már nem ismertünk volna olyan anyagot, melyet egészen a végtelenségig oszthatónak, azaz, melyet *folytonosnak* tételezünk fel?

A fizikai folytonosság.

Ahhoz a kérdéshez jutunk tehát, vajjon a mathematikaifolytonosság fogalmához nem egyszerûen tapasztalati úton jutottunk-e el? Ha ez így lenne, az érzékeink szolgáltatta nyers adatok – a mi érzeteink – közvetetlenül mérhetõk lennének. Nagy a kísértés, hogy ezt valóban elhigyjük, mert éppen az utóbbi idõben mérések végzésére törekedtek, a melyek eredményét törvényben is megfogalmazták s a mely *a Fechner*-féle törvény néven ismeretes. Eszerint az érzetek erõssége a gerjesztõ jelenség erõsségének logarithmusával arányos.

Ha azonban azokat a kísérleteket, melyek alapján e törvényt megállapitani vélték, kissé közelebbrõl vizsgáljuk, éppen ellenkezõ eredményhez jutunk. Megfigyelték például, hogy valamely 10 gramm súlyú *A* test és valamely 11 gramm súlyú *B* test egészen azonos érzeteket kelt. Hasonlóképpen nem lehetett megkülönböztetni a *B* testet a 12 gramm súlyú *C* testtõl, de az *A* és a *C* súlyának egymástól való megkülönböztetése már sikerült.

E kísérlet nyers adatai tehát a következõ vonatkozásokkal tûntethetõk fel:

$$A = B;$$

$$B = C;$$

$$A < C.$$

Ezek a vonatkozások a fizikai folytonosság képleteinek tekinthetõk.

Az ellenmondás elvével ez homlokegyenest ütközik és hogy ezen összeütközést megszüntessük, kénytelenek voltunk a mathematikai folytonosságot feltalálni.

Ezek alapján kénytelenek vagyunk arra következtetni, hogy ez a fogalom minden ízében az agy szüleménye, de hogy a tapasztalat adott alkalmat megszületésére.

Nem tudjuk megérteni azt, hogy két mennyiség, melyek mindegyike egyenlõ egy harmadikkal, egymás között nem egyenlõ; e szerint kénytelenek vagyunk azt feltételezni, hogy *A* valóban különbözik *B*-tõl és *B* is *C*-tõl; és csakis érzékeink tökéletlenségén múlik, hogy mi nem tudjuk õket egymástól megkülönböztetni.

A mathematikai folytonosság megalkotása.

A fejlõdés elsõ szakasza.

A tények leírása közben bizonyos ideig elegendõ lehet *A* és *B* közé néhány különálló tagot közbeiktatni. Mi történik már most, ha valamely eszközt veszünk segítségül, hogy érzékszerveink fogyatékosságán segítsünk, ha például mikroszkóppal dolgozunk?

Azok a tagok, melyeket egymástól nem tudnánk megkülönböztetni, mint az imént az *A* és a *B*, most egymástól elválasztva fognak feltûnni. De a most már különbözõ *A* és *B* tagok közé az új *D* is oda kerül, melyet sem az A-tól, sem a *B*-tõl többé megkülönböztetni nem tudunk. S alkalmazzuk bár a legtökéletesebb módszereket; kisérleteink nyers eredményei mindig a fizikai folytonosság jellemzõ bélyegét fogják magukon viselni, azzal az ellenmondással, a mely mindig benne rejlik.

Ezen ellenmondástól csak úgy szabadulhatunk, hogy a már ismert tagok közé ismét újabb és újabb tagokat iktatunk be; ezt a mûveletet azután végtelen sokszor kell ismételnünk. Nem tudjuk elképzelni, hogy azt hol kell félbehagynunk, ha csak valamely olyan hatásos mûszert nem készítünk, mely a fizikai folytonosságot elszigetelt elemeire képes bontani, mint a hogy a messzelátó csöveink csillagokra bontják a tejutat. De ilyesmit el sem tudunk képzelni; a valóságban mégis mindig csak az érzékszerveink közvetítésével használjuk a mûszereket. A mikroszkópban nagyított képet csak szemeinkkel vizsgáljuk meg, tehát ez a kép mindig megõrzi a látóérzés jellegét, s ennek következtében a „fizikai folytonosság” jellegét is.

Valamely közvetetlenül észlelt hosszúságot semmi sem különböztet meg ugyanazon hosszúság felének mikroszkóppal megkétszerezett képétõl. Az egész hasonló egy részéhez. Ime egy újabb ellenmondás, vagy legalább is ellenmondás volna, ha a tagok száma meg volna állapítva; mert világos, hogy az a rész, mely az egésznél kevesebb tagot tartalmaz, az egészhez nem lehet hasonló.

Az ellenmondás azonban rögtön megszünik, mihelyt a tagok számát végtelennek tekintjük; mi sem gátol bennünket például abban, hogy az egész számok nagy összességét a páros számok összességéhez hasonlónak nézzük, bár az utóbbi csoport az elõbbinek csak egy része. És valóban minden egész számnak megfelel egy páros szám, éppen az adott szám kétszerese.

De az agy nemcsak azért teremtette meg a végtelen sok tagból álló folytonosság fogalmát,hogy a tapasztalati adatok ezen ellenmondásait megszüntesse. Minden úgy folyik le mint az egész számok sorozatában.

El tudjuk képzelni, hogy valamely egység az egységek valamely csoportjához hozzáadható; a tapasztalatnak köszönhetjük, hogy ezzel a képességünkkel élhetünk s hogy ennek tudatában vagyunk; ám ettõl a pillanattól fogva érezzük, hogy képességünk nem határolt s hogy a végtelenig számolhatunk, bár mindig csak véges számú tárgyat kellett megolvasnunk.

Egészen hasonlóan attól a pillanattól kezdve, hogy szükségesnek láttuk azt, hogy valamely sor két egymásra következõ tagja közé egy új tagot iktassunk, érezzük, hogy ez a mûvelet akárhányszor ismételhetõ és hogy tulajdonképpen semmi belsõ ok nincs arra, hogy valamikor megakadjon, hogy úgy mondjuk, semmi okoskodás meg nem állít bennünket a mûvelet folytatásában. Legyen szabad a rövidség kedvéért elsõrendû mathematikai folytonosságnak neveznem a tagok oly halmazát, öszszességét, mely ugyanazon törvények szerint alakul, mint a raczionális számok sorozata. Ha most ide új tagokat iktatunk be az összemérhetetlen számok képezésének törvényei szerint, az így nyert sokaságot a továbbiakban másodrendû folytonosságnak fogjuk nevezni.

A fejlõdés második szaka.

Még mindig csak az elsõ lépést tettük meg, csak az elsõrendû folytonosság eredetét magyaráztuk meg. Most azonban azzal kell még tisztába jönnünk, hogy miért nem érhetjük be ezzel s hogy miért volt szükséges még az irraczionális számokat is kitalálni.

Ha el akarunk képzelni valamilyen vonalat, azt csakis fizikai értelemben tehetjük; azaz olyan vonalat, melynek bizonyos szélessége ne lenne, nem tudunk elgondolni. Két vonal, két keskeny sávként fog hát megjelenni és ha ezzel a meglehetõs durva képpel megelégszünk, világos, hogy két egymást keresztezõ vonalnak lesz közös része.

Az igazi mathematikus ennél egy lépéssel tovább megy anélkül, hogy teljesen lemondana az érzékeink nyujtotta segítségrõl, igyekszik a szélesség nélküli vonal, a terjedelem nélküli pont fogalmához eljutni. Csak úgy érhet czélt, ha a vonalat ama határnak tekinti, a melyhez a mindinkább vékonyodó sáv közeledik, a pontot pedig ama határnak, melyhez valamely mindinkább összehúzódó terület közeledik. Következésképpen a két sávunknak, akármilyen keskeny is, közös területe mindig lesz, mely állandóan kisebbedik, a mint a sávok szélessége fogy: ennek a közös területnek a végsõ határa azután az, a mit az igazi mathematikus pontnak nevez.

Ez az oka annak, hogy azt mondjuk, hogy két egymást keresztezõ vonalnak egy közös pontja van, s ez olyan igazság, a mely önként helyesnek látszik.

Ez azonban legott ellenmondásokat rejtene magában, ha e vonalakat elsõrendû folytonosságoknak tekintenõk, azaz, ha a mathematikus megrajzolta vonalakon nem lennének csak oly pontok, melyek meghatározói raczionális számok. Az ellentmondásténynyé lenne legott, a mint az egyenes és a körök létezését állítanók. Világos; hogy ha csak a raczionális számok meghatározta pontok léteznének, akkor a négyzetbe irott kör és ezen négyzet átlója nem metszenék egymást, mert hiszen a metszési pont meghatározói irraczionális számok.[4]

Ez még mindig nem lenne elég, mert ily úton nem jutnánk el valamennyi, hanem csak néhány irraczionális számhoz.

Képzeljünk el azonban egy oly egyenest, mely két félegyenesre oszlik. A félegyenesek mindegyike úgy fog képzeletünkben feltûnni, mint bizonyos vastagságú sáv; másrészt e sávok mintegy egymásba nyúlnak, mert nem szabad közöttük ürnek lenni. A közös részük úgy fog feltûnni, mint valamely folt, a melyik mindig megvan, ha még oly keskenynek képzeljük is a sávot, úgy hogy szemléletbeli igazságnak veszszük fel azt, hogy a két félre bontott egyenesen a két fél közös határa egy pont. *Dedekind* felfogására ismerünk itt reá, a ki az irraczionális számot a raczionális számok két osztálya közös határának veszi fel.

Ez a másodrendû folytonosság eredete, a mely a tulajdonképpeni mathematikai folytonosság.

Összefoglalás.

Valójában az észnek megvan az a képessége, hogy jelképeket alkosson s így alkotta meg a mathematikai folytonosság fogalmát is, a mely végeredményben nem egyéb, mint a jelképeknek különös rendszere. Hatáskörét csupán ama feltétel korlátozza, hogy az alkotásban ne legyen ellenmondás, de az ész e hatalmát csak akkor gyakorolja, illetve cselekszik ilyet, ha a tapasztalat erre elõbb alkalmat szolgáltat.

A mi esetünkben ez az alkalom az érzékek nyers adataiból leszûrt fizikai folytonosság volt. Ám ez a fogalom egész sor ellenmondásra vezet, melyektõl fokról-fokra szabadulnunk kell. Ez kényszerít minket egyre bonyolódottabb jelképek rendszerének megalkotására. Az, a melynél megállapodunk, nemcsak minden belsõ ellenmondástól mentes, a milyen volt fejlõdése minden fokán is, hanem nincs ellenmondásban azokkal a szemléletszerûeknek mondott tételekkel sem, a melyek többé-kevésbbé kidolgozott tapasztalati fogalmainkból szûrõdtek le.

A mérhetõ mennyiségekrõl.

Azok a mennyiségek, a melyeket eddig tanulmányoztunk, nem voltak mérhetõk; azt ugyan meghatározhattuk, hogy egy ilyen mennyiség egy másiknál nagyobb, de azt már nem, hogy kétszer vagy háromszor nagyobb-e a másiknál?

Nem foglalkoztunk ez ideig valósággal mással, mint azzal a sorrenddel, melybe e mennyiségek be vannak sorozva. De ez a legtöbb alkalmazásnál elégtelen. Meg kell tanulnunk összehasonlítani azt a közt, a mely egymásra következõ két tagot egymástól elválaszt, más két ily tag közével. Csakis ezen föltétel mellett válik mérhetõvé a folytonosság és csak akkor alkalmazhatjuk reá az arithmetika mûveleteit.

Ez azonban csakis egy újabb, különös *megállapodás* alapján történhetik meg. *Meg fogunk* ugyanis *állapodni* abban, hogy ilyen esetekben az a köz, mely *A*-t *B*-tõl elválasztja, akkora, mint a *C*és *D* köze. Munkánk kezdetén például az egész számok sorozatából indultunk ki és föltettük, hogy egymásután következõ két tag közé n közbeesõ tagot iktatunk; nos, ezen új tagokra nézve abban fogunk megállapodni, hogy azok egymástól egyenlõ távolságra fekszenek.

Ez egy módja két mennyiség összeadása meghatározásának, mert ha az *A B* köz meghatározás szerint a *C D* közzel egyenlõ, akkor az *A D* az *A B* és az *A C* összegével lesz egyenlõ, ugyancsak e meghatározás értelmében.[5]

Ez a meghatározás nagy mértékben, de nem minden tekintetben önkényes. Bizonyos föltételekhez van kötve, pl. az összeadás kommutátiv és asszocziátiv törvényeihez. De ha a választott meghatározás valóban eleget tesz e törvényeknek, a választás egyébként közömbös, és felesleges ezt részletesebben megfogalmazni.

Különféle megjegyzések.

Az elõbbiek kapcsán néhány fontos kérdés merült fel:

1. Vajjon végképpen kimerült-e az ész teremtõ ereje a mathematikai folytonosság megalkotásában?

Hogy nincs így, azt *Du Bois Reymond* munkái ugyancsak meggyõzõen bizonyítják.[6]

Tudjuk, hogy a mathematikusok különbözõ rendû végtelen kicsinyeket különböztetnek meg, s hogy például az ilyen u. n. másodrendû végtelen kicsiny nemcsak abszolut méreteiben, hanem még az elsõrendû végtelen kicsinyhez viszonyítva is végtelen kicsiny. Nem nehéz elképzelni valamely tört rendû végtelen kicsinyt, s a végtelen kicsiny rendszáma akár irraczionális szám is lehet és itt ismét felleljük a mathematikai folytonosságnak ama sorozatát, mely éppen az elõbbi fejtegetések tárgyát képezte.

De még ennél is többet mondhatunk; létezik olyan végtelen kicsiny, mely az elsõrendû kicsinyhez viszonyítva még végtelen kicsiny, de már végtelen nagy az $1 + \varepsilon$ rendûhöz képest, akármilyen kicsiny legyen is az ε. Ime ezek volnának hát az új, sorozatunkba iktatott tagok és ha visszatérhetünk ama körülíráshoz, melyet az imént használtunk s a mely eléggé kényelmesnek látszik, (de a melyet ugyan a gyakorlatban nem igen használnak), azt mondhatnók, hogy ilyen módon megteremtettük a harmadrendû folytonosság fogalmát.

Könnyû volna még tovább is menni, de ez már az ész hiábavaló játéka maradna; nem volna egyéb alkalmazás nélküli jelképek kigondolásánál és bizonyos, hogy senki sem törõdnék velük. A harmadrendû folytonosság, a melyhez a különbözõ rendû végtelen kicsinyek feltételezése által eljuthatunk, még maga is sokkal kevésbbé hasznos, hogy sem rendszerünkben polgárjogot nyert volna s a mathematikusok is csupán érdekességnek tekintik. Az ész csak akkor gyakorolja teremtõ erejét, ha a tapasztalat szükségbõl reá kényszeríti.

2. Ha egyszer már a mathematikai folytonosság fogalmának birtokában vagyunk, vajjon meg vagyunk-e védve azoktól az ellenmondásoktól, a melyeknek e fogalom tulajdonképpen létét köszöni?

Hogy nincs úgy, azt mindjárt példával bizonyítjuk.

Ugyancsak nagyon képzettnek kell lennünk a mathematikában, hogy ne találjuk természetesnek azt, hogy minden görbének van érintõje: s valóban, ha keskeny sáv alakjában felrajzolunk egy ilyen görbét, meg egy egyenest, mindig elrendezhetjük õket úgy, hogy legyen egy közös részük, anélkül, hogy a két vonal egymáson áthatolna. Ha most e sávokat végtelen keskenyeknek gondoljuk, ez a közös rész még mindig megmarad és végül, hogy úgy mondjuk, a határon a két *vonalnak* valóban lesz közös pontjuk, emellett a két vonal nem fogja egymást átmetszeni, csak érinteni.

Az a mathematikus, ki úgy okoskodik, akár tudatosan, akár sem; nem tesz mást, mint a mit mi tettünk fennebb, mikor azt bizonyítottuk be, hogy egymást keresztezõ egyenesnek van közös pontja és okoskodása, éppen úgy mint a mi elõbbi okoskodásunk, elõtte egészen jogosultnak fog látszani.

Valamiben azonban mégis tévedni fog. Be lehet bizonyítani, hogy léteznek görbék, melyeknek nincs érintõjük, ha e görbét másodrendû mathematikai folytonosságként határozzuk meg.

Kétségtelen, hogy valamely a fentihez hasonló mesterfogás lehetõvé tenné ezen ellentmondás elhárítását is; mivel azonban ezzel csak nagyon kivételes esetekben találkozunk, nem foglalkoztak többé vele.

Ahelyett, hogy megkisérelnõk a szemléletet az analizissel összhangba hozni, inkább megelégszünk azzal, hogy a kettõ közül az egyiket feláldozzuk és mivel az analizisnek csalhatatlannak kell maradnia, a szemléleti meggondolásnak nem adtunk igazat.

A többméretû fizikai folytonosság.

$$A = B$$

$$A < C$$

$$B = C$$

Nézzük most, hogyan általánosítható ez a fogalom és hogyan fejlõdött ki belõle a többméretû folytonosság fogalma.

Vizsgáljuk az érzeteknek bármilyen két halmazát. Vagy meg tudjuk õket egymástól különböztetni, vagy nem, akár csak *a Fechner*-féle kísérletnél, melyben meg tudtuk különböztetni a 10 gr.-os súlydarabot a 12-estõl, de a 11-estõl nem. Egyébre nincs szükségünk, hogy a többméretû folytonosságot felépítsük.

Az érzethalmazok egyikét nevezzük általában *elemnek.* Ez némiképpen hasonló lesz a mathematikus *pontjához,* de mégsem lesz ugyanaz. Nem mondhatjuk, hogy elemünk terjedelem nélküli, mert hiszen a szomszédos elemektõl már nem tudjuk megkülönböztetni s így mintegy ködbeburkoltnak fog látszani. Ha szabad a csillagászatból vett egy hasonlattal élnünk, olyanok lesznek ezek az elemek, mint a ködfoltok, míg a mathematikai pontok csillagokhoz hasonlítanak.

Ezt elfogadva, az elemek rendszere akkor fog folytonosságot alkotni, ha annak keretein belül egy elemtõl az egymásra következõ oly elemeken át egy másik elemig eljuthatunk, melyeknek egyike sem különböztethetõ meg a megelõzõtõl. Ez a *vonalszerû sor* a mathematikus vonalához képest ugyanaz, a mi az *elszigetelt elem* a *ponthoz* képest.

Mielõtt tovább mennénk, meg kell magyaráznunk, hogy mi az a *metszet.* Vegyünk fel valamely *C* folytonosságot, vegyük el belõle elemeinek egy részét és tekintsük õket egy pillanatra úgy, mint ha nem tartoznának többé e folytonossághoz. Az így elszakított elemek együttes csoportját nevezzük metszetnek. Megtörténhetik, hogy e metszet következtében *C* feloszlik több különálló folytonosságra, mert a megmaradt elemek összessége már nem fog továbbra is *egységes* folytonosságot alkotni.

Ekkor *C*-ben mindenesetre lesz két oly elem: *A* meg *B*, melyek két különbözõ folytonossághoz tartoznak, a mi arról ismerhetõ fel, hogy *C*-ben nem található az egymásra következõ elemeknek oly vonalszerû sorozata, melynek elemei közül egyik sem mutatna különbséget az elõzõtõl s a mely sorozatban az egyik elem az ***A*,** a másik meg a ***B*.** *Ily sorozat csak úgy alkotható, hogy legalább egy eleme nem különböztethetõ meg a metszet egy elemétõl.*

Ellenkezõ esetben megtörténhetik, hogy a metszet elégtelen arra, hogy a *C* folytonosságot feldarabolja. Hogy a fizikai folytonosságokat osztályozhassuk, éppen azt fogjuk megmegvizsgálni, hogy melyek azok a metszetek, melyeket alkalmaznunk kell, hogy a szétdarabolást elvégezhessük.

Ha a *C* fizikai folytonosságot feldarabolhatjuk olyan metszettel, mely véges számú, egymástól jól megkülönböztethetõ elembõl áll és a mely tehát sem *egy*, sem *több* folytonosságot nem alkothat, akkor azt mondjuk, hogy *C egyméretû folytonosságot alkot.*

Ha ellenben *C* csak oly metszetekkel darabolható fel, a melyek magukban véve is folytonosságok, azt mondjuk, hogy *C többméretû.* Ha elegendõ az olyan metszet, mely maga egyméretü folytonosság, azt fogjuk mondani, hogy *C kétméretû;* ha kétméretû metszet szükséges, akkor a *C-thárommméretûnek* fogjuk nevezni és így tovább. Meghatároztuk tehát a többméretû fizikai folytonosság fogalmát, abból az igen egyszerû ténybõl indulva ki, hogy két érzethalmaz vagy megkülönböztethetõ egymástól, vagy pedig nem.

A többméretû mathematikai folytonosság.

Az n méretû mathematikai folytonosság fogalma természetesen ugyanazokon a folyamatokon épült fel, a melyeket e fejezet elején tanulmányoztunk. Valamely hasonló folytonosság egy pontját n számú határozott mennyiség rendszere határozza meg; ezeket a meghatározókat nevezzük koordinátáknak.

Nem mindig szükséges az, hogy e koordináták mérhetõ mennyiségek legyenek; így például van a geométriának egy ága, hol e mennyiségek mérésétõl eltekintünk, a hol például csak annak a megállapításával foglalkoznak, hogy valamely *A B C* görbén a *B* pont az *A* és *C* között fekszik-e s nem pedig azzal, hogy az *A B* ív egyenlõ-e a *B C*-vel, vagy annál kétszer nagyobb-e? Ez az, a mit az *elhelyezés mértanának* (analysis situs) nevezünk.

Ez a tan a tudományos vizsgálatok egész tömegét öleli fel, mely felhívta a legnagyobb mathematikusok figyelmét, és a melyben az egymásból eredõ fontosnál fontosabb tételek egész sorát találjuk. Ezek a tételek fõképpen abban különböznek a közönséges geométriai tételektõl, hogy tisztán minõségi jellegûek és hogy még akkor is igazak maradnak, ha azokat a mértani ábrákat, melyekre vonatkoznak, valamely ügyetlen rajzoló másolja le, a ki az arányokat durván eltorzítja, vagy az egyeneseket szabálytalan görbe vonalakkal helyettesíti.

Mikor erre a most meghatározott folytonosságba be akarták vezetni a mérést, akkor lett ebbõl a folytonosságból a tér s akkor született meg a geométria. De az erre vonatkozó meggondolásokat a második fejezetre tartom fenn.

*Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.
*Elõfordulnak azonkívül a meghatározásban ama különös meg állapodások, a melyek az összeadás fogalmi meghatározására szolgálnak és a melyekrõl késõbb lesz szó.

MÁSODIK RÉSZ.

A tér.

HARMADIK FEJEZET.

A nem Euklides-féle geométriák.

Minden következtetés feltevésekbõl indul ki; maguk ezek a feltevések vagy már maguktól önként bebizonyításra nem szorulnak, vagy pedig csak úgy fogadhatók el, ha más tételekre vezethetõk vissza; mivel azonban így a végtelenségig vissza nem mehetünk, minden deduktiv tudomány és nevezetesen a geométria is szükségképpen bizonyos számú bebizonyíthatatlan alapelven épül fel. Minden geométriai tankönyv tehát ezeknek az alapelveknek a kimondásával kezdõdik. Azonban bizonyos megkülönböztetést mégis kell ezen alapelvek közt tenni. Némelyik, mint például a következõ elv: *"ha két mennyiség egy harmadikkal egyenlõ, akkor egymás között is egyenlõ"*, egyáltalában nem geométriai tétel, hanem az analizis alapelve. Úgy tekintjük az ilyeneket, mint *a priori* analitikai ítéleteket s nem foglalkoznak velük a továbbiakban.

Annál inkább kell idõznünk más alapelveknél, melyek kizárólag geométriai eredetûek. A legtöbb tankönyv három tételt mond ki határozottan:

1. két pont között csak egy egyenes vonható;

2. az egyenes vonal a legrövidebb út egyik ponttól a másikig;

3. egyetlen ponton át csak egy oly vonal húzható, mely egy másik adott vonallal párvonalas.

Ez alapelvek másodikának bebizonyítását sokszor nem tartják ugyan szükségesnek; le lehetne ezen alapelvet vezetni a másik kettõbõl és ama többi számos alapelvbõl, melyeket hallgatagon, külön kimondás nélkül fogadunk el, a mint ez majd a késõbbi fejtegetésekbõl ki fog tünni.

Sokáig hiába keresték a harmadik alapelv bizonyítását is; ez az alapelv különben *az Euklides követelménye* nevén ismeretes. Valóban elképzelhetetlen az, mennyi erõt pazaroltak e hiú reményekre. Végre a század kezdetén két tudós, az egyik *orosz*, a másik *magyar*, *Lovacsevszki* és *Bolyai* körülbelül ugyanazon idõben megczáfolhatatlanul mutatta ki, hogy e bebizonyítás lehetetlen[7]; ezek majdnem teljesen megszabadítottak bennünket a követelmény nélküli geométriák feltalálóitól. Azóta az "Académie des Sciences"-hoz alig egy-két újabb bizonyítási kísérletet nyujtanak be évente.

A kérdés azonban nem volt kimerítve; igen nagy lépéssel haladt elõre *Riemann* híres értekezésének megjelenésével: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Ez a munka ihlette meg az újabb vizsgálódások nagy részét; ez újabb munkákról késõbb beszélünk, egyelõre csak megemlítjük köztük *Helmholtz és Beltrami* kutatásait.

Lovacsevszki geométriája.

Ha lehetséges volna *Euklides* követelményét a többi alapelvbõl levezetni, magát a követelményt el nem fogadva, de a többi alapelvet megtartva, nyilván ellenmondó következtetésekbe ütköznénk. Ilyen föltevések mellet tehát teljesen lehetetlen lenne egy összefüggõ geométriát felépíteni. *Lovacsevszki* pedig éppen egy ily összefüggõ geométriát épített fel. Kezdetben felteszi, hogy:

Valamely adott egyeneshez egy ponton át több párvonalas egyenes vonható.

Ezenkívül azonban megtartja *Euklides* összes többi alapelveit. Ezekbõl a föltevésekbõl azután egész sor tételt vezet le, a melyek között lehetetlen ellenmondást találni és megszerkeszti geométriáját, melynek feltétlenül kifogástalan *logikája* miben sem áll az *Euklides*-féle mögött.

Maguk a tételek nagyban különböznek azoktól, melyekhez általában hozzá vagyunk szokva és eleinte bizony kissé meglepõk. Így például:

"A háromszög szögeinek összege mindig kevesebb, mint két derékszög; továbbá a különbség e két mennyiség között a háromszög területével egyenesen arányos."

"Lehetetlen oly ábrát szerkeszteni, mely egy másikhoz hasonló, de méretei mások."

"Ha valamely kör kerületét *n* egyenlõ részre osztjuk és az osztási helyeken az érintõket megvonjuk, ez az *n* érintõ sokszöget fog képezni, ha a kör sugara eléggé kicsiny; ha azonban a sugár eléggé nagy, többé nem fogják egymást metszeni."

Több példát felhoznunk sem szükséges; *Lovacsevszki* tételei semmiféle vonatkozásban nincsenek *Euklides* tételeivel, de a köztük fennálló logikai kapcsolat semmivel sem lazább, mint *Euklides*nél.

Riemann geométriája.

Képzeljünk magunknak oly világot, mely magasság nélküli egyénekkel volna benépesítve. Tegyük fel, hogy mindeme "végtelenûl lapos" lények mind ugyanazon síkban élnek, a melybõl kimozdulni nem képesek. Tegyük fel továbbá, hogy ez a világ eléggé távol van a többi világtól, hogysem ez utóbbi bármikép is hatást gyakorolhatna reá. Ha már benne vagyunk a föltevés-gyártásban, már mindjárt arra is képesnek hihetjük eme lényeket, hogy gondolkodni tudnak és õk is egy geométriát alkothatnak. E lények a teret bizonyára csak kétméretûnek fogják képzelni.

Tegyük fel most, hogy e képzelt lények amellett, hogy minden magasság nélkül valók, még gömbfelületi alakúak s nem síkalakúan laposak és hogy valamennyien ugyanazon gömbfelület mentén élnek és hogy e gömbfelülettõl el nem távozhatnak, bár ennek mentén mozoghatnak. Vajjon mily geométriát szerkesztettek volna akkor? Az már eleve világos, hogy a teret ez esetben is csak kétméretûnek tekintették volna; az, a mi reájuk nézve az egyenes vonal szerepét játszaná, az a legrövidebb út lenne, mely a gömb felszínén egyik ponttól a másikhoz elvezet, tehát a legnagyobb kör egyik íve; az õ geométriájuk egyszóval agömbfelületi mértan lenne.

Térnek fogják nevezni azt a gömbfelszínt, melyet elhagyniok lehetetlen s a melyben lejátszódnak az összes jelenségek, melyrõl tudomásuk van. Az õ terük tulajdonképpen *határ nélküli* tenne, mert valamely gömbfelületen mindig elõrehaladhatunk anélkül, hogy meg kellene állanunk s amellett mégis *véges* lenne; sohse lelnék meg a végét, de akárhányszor körüljárhatják.

Nos, *Riemann* geometriája a gömbi geométria, de három méretre kiterjesztve.

A német mathematikusnak, hogy ezt megszerkeszthesse, nemcsak *Euklides* követelményét kellett felforgatnia, hanem még az elsõ alapelvet is, mely így szól: *Két pont között csak egyetlen egyenes vonható.*

Valamely gömbfelület adott két pontján át általában véve egyetlen legnagyobb kört vonhatunk, a mely - mint éppen láttuk - a mi képzelt lényeink elõtt az egyenes szerepét játszaná; egy kivétel azonban van: Ha a két adott pont az átmérõ mentén egymással szemben fekszik, akkor e két ponton át végtelen sok legnagyobb kör vonható.

Hasonlóképpen *Riemann*-nak a geométriájában (legalább egyik lehetséges változatában) két ponton át rendszerint csak egy egyenes vonúlhat; vannak kivételes esetek, a mikor két ponton át végtelen sok egyenes vonható.

A Riemann-féle és *Lovacsevszki*-félegeométria között bizonyos ellentét vehetõ észre.

Így a háromszög szögeinek összege:

egyenlõ az egyenes-szöggel *Euklides* geométriájában,

kisebb, mint két derékszög *Lovacsevszki* geométriájában,

nagyobb, mint két derékszög *Riemann* geométriájában.

A párvonalas egyenesek száma, a melyet egy ponton keresztül valamely egyeneshez vonhatunk:

egy Euklides geométriájában,

zérus Riemann geométriájában és

*végtelen sok Lovacsevszki*nél.

Tegyük még hozzá, hogy a *Riemann*-féletér bár határnélküli, mégis véges, olyan értelemben, a hogy fennebb már megmagyaráztuk.

Az állandó görbületi mértékû felületek.

Egy ellenvetés mégis lehetséges. *Lovacsevszki* tételei egymás között, *és Riemann* tételei egymás között nincsenek ellenmondásban, de akármilyen számosak is azok a következtetések, a melyeket eme tudósok feltevéseikbõl vontak, mégis meg kellett állaniok, mielõtt valamennyi következményüket kimerítették volna, mert hiszen e következmények száma végtelen és ki biztosít már most bennünket arról, hogy ha következtetéseiket tovább vitték volna, kísérletük nem végzõdött-e volna ellenmondással?

A Riemann-féle geométriára nézve nem létezik ez a nehézség, ha csak két méretre szorítkozik.

Riemann kétméretû geométriája ugyanis, a mint láttuk, nem különbözik a gömbi geométriától, a mely pedig nem egyéb, mint a közönséges geométria egy ága, tehát minden vitán felül áll

Beltrami, a ki a kétméretû *Lovacsevszki*-félegeométriát szintén visszavezette a közönséges geométria egy ágára, ezáltal ugyancsak megczáfolta az említett ellenvetést.

Bemutatjuk, hogyan sikerült ez neki. Képzeljünk el valamely felületen tetszés szerinti idomot. Gondoljuk, hogy ezt az idomot valamely hajlékony és nyujthatatlan szövetre rajzoltuk, mely eme felületen ki van feszítve és a felülethez hozzásímul, oly módon, hogy ha a szövet elhagyja a helyét és alakját megváltoztatja, az idom egyes vonalai ugyancsak megváltoztathatják az alakjukat, de hosszúságukat nem. Általában ez a hajlítható, de nyujthatatlan idom nem mozdulhat el anélkül, hogy a felületrõl el ne távoznék; de léteznek bizonyos, különös tulajdonságú felületek, a melyeken az ily mozgás lehetséges. Ezek az állandó görbületi mértékû felületek.

Ha visszatérünk ahhoz a hasonlathoz, a melyet elõbb használtunk és elképzeljük ama magasság nélküli lényeket, melyek eme felületek valamelyikén élnek, akkor e lények csak az oly alakzatok mozgását fogják lehetõnek tartani melyeknél a vonalak megtartják állandó hosszúságukat.

Ellenkezõleg, az oly magasság nélküli lények, melyek változó görbületi mértékû felületen élnek, az efféle természetû mozgást lehetetlennek fogják tekinteni.

Ezek az állandó görbületi felületek kétfélék:

Az egyik fajta *a pozitiv görbületû,* a mely oly módon változtathatja az alakját, hogy a leírt módon gömbre lefejthetõ. E felületek geometriája tehát a gömbi geométriára vezet vissza, a mely nem egyéb, mint *Riemann* geométriája.

A másik fajta *negatív görbületû. Beltrami* megmutatta, hogy ezeknek a felületeknek a geométriája tulajdonképpen *a Lovacsevszki* tanával azonos. *Riemann* és *Lovacsevszki* kétméretû geométriája eszerint be van sorozva az *Euklides*-féle tanok közé.

A nem Euklides-féle geométriák értelmezése.

Igy czáfolták meg ezt az ellenvetést a kétméretû geométriákra vonatkozólag.

Könnyû volna *Beltrami* okoskodását a háromméretû geométriákra kiterjeszteni.

Azok, a kiknek felfogása a négyméretû tértõl sem riad vissza, nem fognak ebben semmi nehézséget találni, de õk nincsenek valami számosan. Mi inkább másképpen fogunk eljárni.

Vegyünk fel egy bizonyos síkot s nevezzük alapsíknak; szerkeszszük azután meg, hogy úgy mondjuk szótárunkat a fogalmakat két oszlopba írjuk fel, a hol az egy sorban lévõ fogalmak felelnek meg egymásnak, éppen úgy, ahogy a szótárban egyenlõ jelentésû, de más-más nyelvû szavak vannak egymás mellé felírva:

Tér --- --- A térnek az alapsík fölött elterülõ része.

Sík --- --- Gömb, mely az alapsíkot derékszög alatt metszi.

Egyenes --- --- Kör, mely az alapsíkot derékszög alatt metszi.

Gömb --- --- Gömb.

Kör --- --- Kör.

Szög --- --- Szög.

Két pont közötti távolság --- --- Logarithmusa annak az anharmonikus viszonynak, melyet e két pont másik két ponttal képez, ha az utóbbiak az alapsíknak metszéspontjai oly körrel, mely e két ponton áthalad és az alapsíkot derékszög alatt metszi.

Stb. stb......

Vegyük ezután *Lovacsevszki* tantételeit és készítsük el "fordításukat" a magunk szerkesztette szótárral, mint ahogy lefordítunk valamely franczia szöveget franczia-magyar szótárunk segítségével. *Ezen az úton a közönséges geométria tanaihoz jutunk.*

Igy például *Lovacsevszki*nek ez a tétele: ***"A háromszög szögeinek összege kisebb, mint két derékszög",*** "lefordítva" így hangzik: "Ha valamely görbeoldalú háromszög oldalai olyan körívek, melyek meghosszabbítva derékszög alatt metszik az alapsíkot, e görbeoldalú háromszög szögeinek összege kisebb, mint két derékszög."

Igy azután akármilyen messzire menjenek is *a Lovacsevszki* föltevésébõl vont következtetések, sohasem jutunk ellenmondásokhoz. Valóban, ha *Lovacsevszki* két tétele ellenmondásban lenne egymással, ellenmondásban lenne ugyanezek "fordítása", melyet szótárunk segítségével készítettünk; láttuk azonban, hogy e fordítás révén a közönséges geométria tételeihez jutunk, abban meg senki sem kétkedik, hogy a közönséges geométria minden ellenmondástól ment.

De honnan ez a biztosság s vajjon jogos-e? Oly kérdés ez, melylyel itt nem foglalkozhatunk, mert bizonyos fejtegetésekre lenne szükségünk. Tehát, a fenn megkoczkáztatott ellenvetésbõl semmi sem marad meg.

Ez azonban még nem minden. *Lovacsevszki* geométriája így a valósággal kapcsolatos értelmezésre talált és már nem puszta logikai gyakorlat, sõt még hasznos alkalmazása is lehet. Nincs idõnk e helyen azokról az alkalmazásokról beszélni, sem arról, mennyiben használtuk ki e geométriát *Klein* és én a lineáris differencziális egyenletek integrálásánál.

Az itt közölt értelmezés egyébként nem az egyedüli, számos hasonló "szótárt" szerkeszthetnénk meg, melyek mindegyike lehetõvé tenné, hogy egyszerû "fordítás" révén eljussunk *Lovacsevszki* tanaitól a közönséges geométria tantételeihez.

A hallgatagon elfogadott alapelvekrõl.

Vajjon a tankönyvekben határozottan kimondott alapelvek képezik-e a geométria egyedüli alapját?

Hamarosan meggyõzõdhetünk az ellenkezõjérõl, látva, hogy fokozatos elejtésûk után még mindig fenmarad *Euklides, Lovacsevszki* és *Riemann* tanainak néhány közös állítása. Ezen állításoknak eszerint olyan elõfeltevéseken kell nyugodniok, melyeket a mathematikusok elfogadnak, anélkül, hogy beszélnének róla. Érdekes lesz, ha megkíséreljük e hallgatag feltevéseket a klasszikus bizonyításokból kihámozni.

Stuart Mill azt állította, hogy minden fogalmi meghatározás magában foglal egy alapelvet, mert meghatározva valamely tárgyat, máris hallgatagon feltételezzük a tárgy létezését. Ez azonban már több, mint kellene; a mathematikai tudományokban ritkán szokás valamely meghatározást közölni, anélkül, hogy azután magának a tárgynak létezését be ne bizonyítanák; ha pedig nem, akkor rendesen az olvasó a hiányzó bizonyítást maga is könnyû szerrel pótolhatja.

Emellett ne feledjük el, hogy a "létezés" szó egészen más értelmû akkor, ha valamely mathematikai lényrõl, mint a mikor anyagi természetû tárgyról van szó. A mathematikai lény valóban létezik, feltéve, hogy nem tartalmaz ellenmondást, sem saját magával, sem az elõbb elfogadott tételekkel.

De ha *Stuart Mill* észrevétele nem is alkalmazható minden meghatározásra, sokra nézve azért feltétlenül jogosult. A síkot például néha a következõképpen határozzuk meg:

A sík olyan felület, hogy minden egyenes, mely e sík bármely két pontját összeköti, egészében e felületen fekszik.

Ez a meghatározás szemmelláthatólag magában rejt egy új alapelvet; igaz, hogy ezen a meghatározáson lehetne változtatni s ez jobb is lenne, de akkor az alapelvet nyiltan ki kellene mondani.

Más meghatározások ismét más, nem kevésbbé fontos meggondolásokra adnak alkalmat.

Ilyen például két ábra egyenlõsége: két ábra akkor egyenlõ egymással, ha egymásra helyezve fedik egymást; hogy azonban ezt megtehessük, az egyiket el kell vennünk elõbbi helyérõl s úgy kell a másikra tolni, hogy azt valóban fedje; de vajjon hogyan mozdíthatjuk el? Ha megkérdenõk, kétségkívül az lenne a válasz: úgy, hogy alakváltozás ne álljon be, úgy mintha merev testet mozgatnánk tova.

Az álkövetkeztetések kerülõ útja eszerint nyilvánvalóvá lett.

Mert valóban ez a meghatározás nem határoz meg semmit; nincs semmi értelme olyan lény elõtt, a ki olyan világban lakik, a hol csak folyékony testek léteznek. Ha mi mégis helyesnek látjuk, annak oka az, hogy megszoktuk a természetben a szilárd testeket, melyek alig különböznek a képzelt merev testektõl, melyeknek minden mérete változatlan.

De bár e meghatározás nagyon tökéletlen, mégis elhallgatott alapelvet foglal magában.

Valamely változatlan alak mozgatásának lehetõsége nem valami önként szembeötlõ igazság; vagy legalább is csak *Euklides* követelménye révén szembeötlõ s nem úgy mint valamely analitikai *a priori* ítélet.

Egyébként a geométria meghatározásait és bebizonyításait tanulmányozva, látjuk, hogy fel kell tennünk minden bizonyítás nélkül nemcsak az elmozdítás lehetõségét, hanem a mozgásnak még egynémely sajátosságát is.

Ez az egyenes vonal meghatározásából világlik ki. Sok mindenféle hiányos meghatározást adtak, de az igazi mégis csak az, a mely hallgatagon benne van minden oly bizonyításban, hol az egyenes szerepel.

"Megtörténhetik, hogy valamely változhatatlan alakú idom mozgása olyan, hogy valamely ezen idomhoz tartozó vonalnak minden pontja mozdulatlan marad, eközben azonban az összes, e vonalon kívül fekvõ pontok elmozognak. Az ilyen vonal az, melyet egyenesnek nevezünk." Szándékosan választottuk el e fogalmazásban a meghatározást a benne foglalt alapelvtõl.

Sok példát idézhetnénk a háromszögek egyenlõségének vagy valamely pontból egyenesre bocsátott merõleges lehetõségének bebizonyítására, melyek mind oly tételeket foglalnak hallgatagon magukban, melyek kimondását nem tartjuk szükségesnek, mert mindezek arra a föltevésre kényszerítenek bennünket, hogy az idomokat a térben bizonyos módon át lehet vinni egy helyrõl a másikra.

A negyedik geométria.

A hallgatagon elfogadott alapelvek között mégis csak létezik egy, a mely különösebb figyelmet érdemel, mert ha ezt kihagyjuk, egy negyedik geométriát is alkothatunk, mely éppen oly egységes lesz, mint *Euklides, Lovacsevszki* vagy *Riemann* geometriája.

Annak a bebizonyítására, hogy valamely *A* pontból mindig emelhetünk egy merõlegest az *AB* vonalra, fel kell tennünk, hogy valamely *AC* egyenest, mely az A pont körül mozgatható s a melyet eredetileg *az AB* mozdulatlan egyenessel egybeesõnek vettünk fel, az *A* pont körül addig forgattunk, míg végül az *AB* meghosszabbításába esik.

Így egyszerre két elvet veszünk fel hallgatagon: az egyik az, hogy ilyen elforgás általában lehetséges, a másik az, hogy e forgás egészen addig folytatható, míg végre a két egyenes egymás meghosszabbításába esik.

Ha az elõbbi elvet elfogadjuk, a másodikat nem, egész sor oly tantételhez jutunk, melyek még *Lovacsevszki és Riemann* tanainál is idegenszerübbek, de ugyancsak nem tartalmaznak ellenmondásokat.

Megelégszünk ezek közül csak egyetlen egynek a felemlítésével, jelezvén, hogy nem is a legkülönösebbet választottuk: *"Valós egyenes saját magára is lehet merõleges."*

Lie alaptétele.

A klasszikus bizonyításokba hallgatagon bevitt alapelvek száma sokkal nagyobb, mint ahányra szükség van s így érdekes volna megkísérelni számukat lehetõleg csökkenteni. Mindenekelõtt azt kérdezhetjük, hogy vajjon egyáltalában lehetséges-e ez a csökkentés, hogy tehát az elképzelhetõ geométriák és a szükséges alapelvek száma nem végtelen-e? *Sophus Lie* következõ alaptétele irányadó e kérdésben:

Ha a következõ feltevésekbõl indulunk ki:

1. a tér *n* méretü;

2. valamely idomnak változatlan alakban való elmozdulása lehetséges;

3. arra, hogy ez idom helyzete a térben meg legyen határozva, *p* feltétel szükséges,

akkor az eme feltételeknek megfelelõ geométriák száma véges.

Sõt még azt is hozzátehetjük, hogyha *n*adva van, akkor p-nek megszabhatjuk a felsõ határát.

Ha e szerint a mozgás lehetõségét elfogadjuk, csak véges (sõt meglehetõsen korlátolt) számú hárommméretû geométria lenne alkotható.

Riemann geométriái.

Mégis úgy látszik, mintha a most kimondott eredményt *Riemann* megczáfolta volna, mert végtelen sok különféle geométriát szerkesztett meg s az, a melynek a kapcsán a nevét említeni szokták, e geométriáknak csak különös esete.

Minden attól függ, - mondja - hogy valamely görbe hosszát hogyan határozzuk meg. E hossz meghatározásának végtelen sok módja van s mindezek egy-egy új geométria kiinduló pontját képezhetik.

Ez ugyan tökéletesen így van, de e meghatározások legnagyobb része nem fér össze a változatlan alakú idomok elmozdításával, a mit pedig a *Lie*-féle alaptétel szerint lehetõnek tartunk. *Riemann*-nak e különbözõ okokból nagyon érdekes geométriái csak analitikai természetûek lehetnének és nem volnának alkalmasak oly bizonyításokra, a milyeneket *Euklides* geométriájában végezni szoktunk.

Az alapelvek természetérõl.

A mathematikusok legnagyobb része *Lovacsevszki* geométriáját csak logikai különösségnek tartja, némelyikük mégis kissé tovább is megy. Minthogy többféle geométria lehetséges, vajjon bizonyos-e az, hogy éppen az az igazi, a melyet mi fogadtunk el? A tapasztalat kétségkívül bizonyítja, hogy a háromszög szögeinek összege egyenlõ két derékszög összegével; de ez csak azért van így, mert csak nagyon kicsiny háromszögekkel dolgozunk; a különbség *Lovacsevszki* szerint arányos a háromszög területével: vajjon nem lenne-e észrevehetõ, ha nagyobb háromszögekkel dolgoznánk vagy ha méréseink tökéletesebbek lennének? Ha az így van, *Euklides* geométriája csak átmeneti jellegû.

Hogy ezt a véleményt tárgyalhassuk, azzal kell elõbb tisztába jönnünk, hogy milyen is tulajdonképpen a geométriai alapelvek természete?

Vajjon *a priori* szinthétikus természetû ítéletek-e valóban, mint ahogy *Kant* állította?

Ha így lenne, oly hatalommal erõszakolnák magukat reánk, hogy nem lennénk képesek ellenkezõjüket felfogni, sem elméleti építményt nem emelhetnénk más alapon. Akkor nem léteznék nem *Euklides*-félegeométria.

Hogy errõl meggyõzõdjünk, vegyünk egy valóságos *a priori* szinthétikus ítéletet, például azt, a melynek nagy fontosságát már elsõ fejezetünkben láttuk:

Ha valamely tétel az 1. ***.*** *számra nézve érvényes, s bebizonyítottuk, hogy ha n-re érvényes, az n + 1 esetre is érvényben marad, akkor a tétel igaz az összes pozitiv egész számokra nézve.*

Ha megkísérelnénk kivonni magunkat e tétel alól és tagadva helyességét, egy hamis számtant akarnánk megalkotni a nem *Euklides*-féle geométria mintájára, ez nem fog sikerülni; sõt az elsõ pillanatban azt gondolnánk, hogy ezen ítéletek analitikaiak.

Egyébként térjünk csak vissza a mi magasság nélküli képzelt lényeinkhez; nem tehetõ fel, hogy ezek a lények - ha olyan észbeli képességeik lennének, mint a mieink - elfogadnák *Euklides* geométriáját, a melyet minden tapasztalatuk megczáfolna!

Az következik ebbõl, hogy a geométriai alapelvek kísérleti igazságok. Csakhogy nem lehet eszményi egyeneseken és körkerületeken kísérletezni; effélét csak anyagi testeken lehet végezni. Min alapulhatnak eszerint azok a tapasztalatok, a melyek a geométria alapjául szolgálnak? Könnyû a válasz.

Fennebb már láttuk, hogy állandóan úgy okoskodunk, mintha a geométriai idomok merev testek módjára viselkednének. E testek sajátságait kölcsönözné tehát a geométria a tapasztalatból.

A fény sajátságai és egyenesvonalú terjedése, ugyancsak alkalmat adtak a geométria némely tételének keletkezésére, különösen a projektiv geométria körében, oly értelemben, hogy e szempontból azért ugyancsak hajlandók volnánk azt mondani, hogy a métrikus geométria a merev testek tudománya és hogy a projektiv geométria a fény sajátságainak tudománya.

De van egy nehézség és ez legyõzhetetlen. Ha a geométria kísérleti tudomány lenne, nem lehetne mennyiségi tudomány, folytonosan új meg új javító megvizsgálásoknak volna alávetve. De többet mondunk: ma már meg lennénk gyõzõdve, hogy hibás volna, mert tudjuk, hogy olyan szilárd test nem létezik, mely tökéletesen merev.

"E szerint a geométriai alaptételek nem a priori szinthétikus ítéletek, de nem is kísérleti tények."

Közmegegyezésen alapuló *megállapodások* ezek; az összes lehetõ megállapodások közüli *választásunkat a kísérleti tények vezették;* de azért *szabad választás* ez, melyet csak az ellenmondások szükségképpeni kerülésének feltétele korlátoz. Érthetõ ezek alapján, hogy a követelmények tulajdonképpen *szigorúan* igazak maradhatnak, még akkor is, mikor azok a kísérleti törvények, melyek elfogadásukra nézve döntöttek, csak megközelítõleg helyesek.

Más szavakkal, a geométria alapelvei (a számtaniakról nem beszélünk) tulajdonképpen burkolt *fogalmi meghatározások.*

Végre is mily véleményt alkossunk e kérdésrõl:Helyes-e az *Euklides*-féle geométria?

A kérdésnek nincs értelme.

Ugyanolyan, mintha azt kérdeznõk, helyes-e a mai mértékrendszer, a régi meg helytelen? Vagy hogy a *Descartes*-félekoordináták helyesek-e és a polár-koordináták helytelenek. Egyik geometria nem lehet igazabb, mint a másik, de lehet *kényelmesebb.*

Ám az *Euklides*-féle geométria a legkényelmesebb s az is lesz mindig:

1. Mert a legegyszerübb és pedig nemcsak szellemünk szokásainak következtében, vagy az euklidesi tér nem tudom milyen közvetetlen szemléleti megismerése révén; a legegyszerûbb már önmagában véve; mint a hogy valamely elsõfokú több tagú kifejezés egyszerûbb a másodfokúnál; a gömbháromszögtanban a képletek bonyolódottabbak, mint a síkháromszögtanban és ugyanilyennek mondaná õket az a mathematikus is, a ki geométriai jelentésüket nem ismerné.

2. Mert elég jó összhangban van a természet szilárd testeinek tulajdonságaival, melyeket tagjainkkal és szemünkkel megközelíthetünk és a melyekbõl mérõ mûszereinket készítjük.

NEGYEDIK FEJEZET.

A tér és a geométria.

Kezdjük egy kis paradoxonnal.

Az olyan élõ lények, melyeknek észbeli képessége olyan mint a mienk s a melyeknek ugyanolyan érzékeik is lennének, de a mely lények semmi elõzetes kiképzésben nem részesültek, képesek volnának, valamely alkalmasan választott külvilágból oly benyomásokat befogadni, melyek õket az *Euklides*-félétõl különbözõ geométriának megszerkesztésére vezetnék; e lények e külvilág jelenségeinek valamely nem *Euklides*-féle térben tulajdonítanának helyzetet, vagy akár valamely négyméretû térben.

Mi, mint a kiket a mi világunk nevelt, ha hirtelen átjutnánk emez új világba, semmi nehézséget sem találnánk abban, hogy a jelenségeket a mi *Euklides*-féle terünkre vonatkoztassuk. És megfordítva, ha ezek a lények jutnának el hozzánk, õk is reá lennének utalva, hogy jelenségeinket a nem *Euklides*-féle térre vonatkoztassák.

De többet mondok. Némi erõlködéssel ugyanezt mi magunk is megtehetjük. Valakinek, ki ennek szentelné az életét, talán sikerülne a negyedik dimenziót elképzelni.

A geométriai tér és a képzeti tér.

Sokszor mondják, hogy a külvilág tárgyainak a képei térbeli helyzethez vannak fûzve, sõt hogy a képek csak ezen feltétel mellett keletkezhetnek. Azt is mondják, hogy ez a tér, mely mintegy az érzeteink és képzeteink számára alkotott *keret* gyanánt szerepel, teljesen azonos a mathematikusok terével s annak minden sajátságát magáénak vallja.

Az említett paradoxon pedig ugyancsak különösnek kell hogy lássék minden jámbor lélek elõtt, a ki így gondolkozik. De azért helyénvaló megvizsgálni, vajjon ez nem csalódás-e, melyet a mélyebb meggondolás szétoszlat?

Elõször is, melyek a tulajdonképpeni tér sajátságai? Arról a térrõl akarok szólani, mely a geométria tárgyát képezi és a mely teret *geométriai térnek* fogok nevezni. Ime ennek néhány legfontosabb sajátsága:

1. A tér folytonos.

2. A tér végtelen.

3. A tér háromméretû.

4. A tér egynemû (homogén), azaz valamennyi pontja azonos egymás között.

5. A tér egyöntetû (izotróp), azaz valamennyi egyenes, mely ugyanazon ponton halad át, egymással azonos.

Hasonlítsuk most össze ezt az ily tulajdonságokkal felruházott teret a mi érzeteink és képzeteink keretével, a melyet *képzeti térnek* nevezhetünk.

A látási tér.

Vegyünk fel elõbb valamely tisztán látási benyomást, melyet valamely a reczehártyán létrejött kép okoz.

Általános vizsgálat után e kép folytonosnak látszik és kétméretûnek; ebben már különbözik a geométriai tértõl az ú. n. *tisztán látási tér.*

Ezenkívül még ennek a képnek határai ugyancsak határoltak.

Sõt még egy, nem kevésbbé fontos különbség létezik: ugyanis ez a *tisztán látási tér nem egynemû.* Eltekintve a reczehártyán keletkezhetõ képektõl, e hártya valamennyi pontja nem szerepel egyformán.

A sárga folt semmi esetre sem tekinthetõ azonosnak a reczehártya szélének valamely pontjával. Nemcsak azért, mert ugyanaz a tárgy erõsebb benyomást okoz itt, hanem mert minden határolt keretben az a pont, mely e keret középpontja helyét foglalja el, nem lehet azonos szerepû valamely más oly ponttal, mely a szélek felé fekszik.

Pontosabb vizsgálódások kétségkívül arra tanítanak, hogy a látási tér eme folytonossága, meg a két méret csak csalódás és ezáltal az még jobban eltér a geométriai tértõl. De ne idõzzünk most e megjegyzésnél.

Ugyanis e mellett a látás segélyével megkülönböztethetjük a távolságokat s következésképpen tudomást szerezhetünk a harmadik méretrõl is. De mindenki tudja, hogy a harmadik méretnek ez a felismerése visszavezetendõ azon megerõltetés érzetére, mely egyrészt szemünk alkalmazkodásához és másrészt két szemünk tekintetének helyes összehajlításához szükséges, hogy valamely tárgyat tisztán lássunk.

Ezek pedig tisztára izomérzetek, melyek a látás érzetétõ, melyek az elsõ két méret képzetét szolgáltatták, nagyban különböznek. A harmadik méret eszerint nem fog úgy feltûnni; mintha ugyanoly szereplõ volna, mint a másik kettõ. Tehát az a tér, melyet *teljes látási térnek* nevezhetünk, nem egyöntetû tér.

Igaz, hogy e tér valójában háromméretû; ezzel azt akarjuk mondani, hogy a mi látóérzeteink elemei (legalább is azok, melyek együtt mûködve, a kiterjedésrõl adnak fogalmat) teljesen meg vannak határozva, ha hármat ismerünk közülük; hogy mathematikai szólásmódot használjunk, ezek három független változó függvényei lesznek.

Vizsgáljuk azonban a dolgot kissé közelebbrõl. A harmadik méretrõl két különbözõ módon veszünk tudomást: a szem alkalmazkodó képességénél fogva, meg a két szem tekintetének összehajlása révén.

Nincs kétség a felõl, hogy e két érzetbeli jelzés mindig megegyezik egymás közt, létezik közöttük bizonyos állandó viszony, vagy hogy mathematikus módra fejezzük ki magunkat, az a két változó, a mely a két izomérzetet méri, nem látszik egymástól függetlennek, vagy hogy elkerüljük a már túlságosan kényes mathematikai fogalmakra való hivatkozást, visszatérhetünk arra a nyelvre, melyet már az elõzõ fejezetben is használtunk s ugyanazt a tényt ilyen alakban fejezhetjük ki:

Ha a két összehajlási érzetet, *A*-t *és B*-t egymástól megkülönböztetni nem lehet, akkor a két alkalmazkodási érzet, *A'* és *B'*, mely amazokat kiséri, szintén nem lesz egymástól megkülönböztethetõ.

De ez itt, úgyszólván kisérleti tény; *a priori* mi sem akadályoz meg bennünket abban, hogy az ellenkezõt feltételezzük és ha az ellenkezõ következik be, ha tehát az a két izomérzet egymástól függetlenül változik, akkor egygyel több független változót kell számon tartanunk és a *"tejes látási tér"* négyméretû fizikai folytonosságként fog jelentkezni. Ebben is, hozzáteszszük, *külsõ* kisérleti tény rejlik. Mi sem gátol meg bennünket ama föltevésünkban, hogy valamely hozzánk hasonló észbeli képességû lény, ugyanolyan érzékszervekkel, mint a mieink, valamely olyan világban lehet elhelyezve, hol a fény csak úgy jut el hozzá, ha elõbb valamely, a fényt nagyon bonyolódott módon törõ közegen áthatolt. Az a két érzeti jelzés, mely a távolság értékelését teszi lehetõvé, e képzelt világban már nem maradna meg egymás közt állandó viszonyban. Az olyan lény, mely az ilyen világban mivelné ki az érzékeit, kétségen kívül a teljes látási térnek négy méretet tulajdonítana.

A tapintási tér és mozgási tér.

A *"tapintási tér"* még sokkal bonyolódottabb, mint a látási tér, a miáltal az még jobban eltávolodik a geométriai tértõl. Szükségtelen mindazt elismételni, a mit fennebb már a látásról mondottunk.

De vannak a látás és tapintás nyujtotta adatokon kívül más érzetek, a melyek ugyanannyival, vagy még nagyobb mértékben járulnak hozzá a tér fogalmának létrejöttéhez. Ezek a mindenki elõtt ismeretes érzetek, melyek a mi *összes* mozgásainkat kisérik és a melyeket rendesen izomérzeteknek nevezünk.

Az a keret, mely ezen izomérzeteknek megfelel, az ú. n. *mozgási tér*.

Alkalomadtán minden izom sajátságos érzet keltésére alkalmas, mely érzet képes nagyobbodni vagy kisebbedni, oly módon, hogy izomzataink összessége annyi változótól fog függeni, a hány izommal rendelkezünk.

Ebbõl a szempontból *a mozgási tér annyi méretû, mint a hányféle izmunk van.*

Tudom, hogy erre azt lehetne mondani, hogy ha az izomérzetek hozzájárulnak a térrõl alkotott fogalmaink kialakulásához, ennek oka, hogy minden mozgás *irányáról* külön érzetünk van s mert az magának az érzéknek mintegy kiegészítõ részét képezi. Ha az így lenne, ha az izomérzet csak mint új iránynak e geométriai érzésétõl kisérve jöhetne létre, akkor a geométriai tér bizonyára észrevevõ-képességünkre ráerõszakolt alak lenne.

De éppen ez az, mit egyáltalán nem tapasztalunk érzeteink vizsgálása közben.

Az egyetlen dolog, a mit észrevehetünk, az, hogy az ugyanazon irányú mozgásoknak megfelelõ érzetek az agyban csak egyszerû *eszmetársulás* révén vannak egybekapcsolva. Erre az eszmetársulásra vezethetõ vissza *"az irány érzése"*.

Egyetlen érzetben ezt az érzést fellelni nem lehet.

Ám ez az eszmetársulás rendkívül bonyolódott természetû, mert ugyanazon izom összehúzódása a tagok helyzete szerint a legkülönbözõbb irányú mozgásoknak felelhet meg.

Emellett önként világos, hogy e társulás szerzett képesség s mint az összes eszmetársulások, megszokás eredménye; s ez a szokás nagyon sok *tapasztalatnak* az eredménye. Kétséget nem szenved, hogy ha érzékeink egy más közegben nevelõdtek volna, hol más benyomásoknak lettünk volna alávetve, esetleg ellenkezõ szokások jöttek volna létre és a mi izomérzeteink más törvények szerint társultak volna.

A képzeti tér tulajdonságai.

E fejtegetéseink szerint a képzeti tér, hármas alakjában, mint látás, tapintás és mozgási tér, lényegesen különbözik a geométriai tértõl.

Nem egynemû, nem is egyöntetû. Még azt sem mondhatjuk, hogy háromméretû.

Gyakran úgy fejezik ezt ki, hogy mi mintegy vetítjük a geométriai térbe külsõ érzéki észrevételeink tárgyait, hogy ilyenformán mintegy meghatározott elhelyezést adunk nekik e térben.

Van-e ennek valamilyen értelme s ha van, melyik a helyes értelme ?

Azt akarjuk-e ezzel mondani, hogy mi a külvilág tárgyait a geométriai térben képzeljük el?

A mi képzeteink tulajdonképpen érzeteink visszaidézései, tehát nem is juthatnak más keretbe, mint az érzetek, azaz a képzeti térbe.

A külvilág tárgyait nem tudjuk geométriai térbe beleképzelni, csakúgy, mint a hogyan a festõ képtelen arra, hogy a sík vászonra a tárgyakat három méretükkel együtt fesse.

A képzeti tér nem egyéb, mint a geométriai tér képe, mely kép a vetítés bizonyos faja szerint el van torzulva; s mi nem képzelhetjük el másként a tárgyakat, mint eme vetítés szabályai szerint elváltozva.

Tehát mi a külvilág tárgyait a geométriai térbe nem képzeljük bele, hanem inkább úgy *végezzük meggondolásainkat e* tárgyak felett, mintha a geométriai térben volnának elhelyezve.

Másrészt, ha azt mondjuk, hogy valamely tárgynak a tér bizonyos pontjában helyzetet tulajdonítunk, mit akar ez jelenteni?

Ez egyszerûen csak annyit jelent, hogy elképzeljük azokat a mozgásokat, melyeket a czélból kell végeznünk, hogy a tárgyhoz eljussunk.

A mikor azt mondom, hogy elképzeljük e mozgásokat, azzal csak azt akarom mondani, hogy elképzeljük magunknak azokat az izomérzeteket, melyek e mozgásokat kísérik, a mely érzeteknek bizony semmiféle geométriai jellegük sincs, tehát egyáltalában nem foglalják magukban a tér fogalmának már elõbbi létezését.

Az állapotváltozás és a helyzetváltozás.

Azt az ellenvetést hozhatnák most fel, hogy ha a geométriai tér eszméje nem erõszakolja magát a mi gondolatvilágunkra s ha másrészrõl egyik érzetünk sem képes arra, hogy eszméjét létrehozza, hogyan keletkezhetett mégis ez a fogalom?

Ezt kell most megvizsgálnunk, a mi ugyan kissé hosszadalmas lesz, de azért összefoglalhatom néhány szóban azon magyarázatot, melyet meg akarok kísérelni.

Egyetlen egy elszigetelt érzetünk sem lenne képes bennünket a tér fogalmához eljuttatni; csak úgy juthatunk el oda, hogy tanulmányozzuk azokat a törvényeket, a melyek szerint ezek az érzetek egymásra következnek.

Mindenekelõtt látjuk, hogy benyomásaink változásoknak vannak alávetve; de azok között a változások között, melyeket mi észreveszünk, csakhamar kénytelenek vagyunk különbséget tenni.

Néha azt mondjuk, hogy a benyomásokat okozó tárgyak megváltoztatták állapotukat, máskor pedig azt, hogy helyzetüket változtatták meg, hogy tehát csupán elmozdultak.

Ha valamely tárgy az állapotát vagy csak a helyzetét változtatja meg, annak a mi számunkra csak ugyanaz az eredménye: *változás valamely benyomás-halmazban.*

Hogyan tudjuk mégis megkülönböztetni az állapotváltozást a helyzetváltozástól? Ezzel könnyen számot vethetünk. Ha csak helyzetváltozásról van szó, akkor a benyomások elõbbi összezségét visszaállíthatjuk oly módon, hogy oly mozdulatokat teszünk a mozgó tárgygyal szemben, mely bennünket e tárgyhoz képest ugyanabba a viszonylagos helyzetbe juttat vissza. Ilyen módon helyrehozzuk azt a változást, mely közben beállott s visszaállítjuk az eredeti helyzetet, fordított értelmû módosítással.

Ha például a látásról van szó s ha valamely tárgy szemünk elõtt mozog el, "szemünkkel követhetjük" azt s felfoghatjuk a képét a reczehártya ugyanazon pontján, a szemgolyó megfelelõ mozgása segélyével.

Ezeket a mozdulatokat öntudatosan végezzük, mert azok a mozgások szándékosak s mert izomérzetekkel vannak egybekötve; ez azonban egyáltalán nem jelent annyit, hogy mi e mozgásokat a geométriai térbe beleképzeljük.

Ily értelemben a helyzetváltoztatást jellemzi és az állapotváltozástól megkülönbözteti az, hogy a helyzetváltozás a jelzett segédeszközzel mindig *kijavítható.*

Ámde ezek szerint az *A* benyomások összegébõl a *B* benyomások összegéhez esetleg két különbözõ módon is eljuthatunk:

1. Önkéntelenül és anélkül, hogy izomérzeteket tapasztalnánk; ez abban az esetben következik be, mikor a tárgy mozog tova.

2. Szándékosan és izomérzetekkel, ha a tárgy mozdulatlan, de mi magunk mozgunk el, oly módon, hogy a tárgy hozzánk képest viszonylagos mozgást mutat.

Ezen esetekben az *A* összérzettõl a *B* összérzetig való átmenetel nem egyéb helyzetváltoztatásnál.

Mindezekbõl pedig következik, hogy a látás és a tapintás egyedül soha sem adhatta volna nekünk a tér fogalmát az "izomérzékek" segítsége nélkül.

Ez a fogalom nemcsak hogy nem származhatott egyetlen érzetbõl, hanem *az érzetek egymásra következõ sorozatából;* de még valamely mozdulatlan lény sem szerezhette volna meg e fogalmat, mert mozgásaival nem tudta volna *kiegyenlíteni a* külvilági tárgyak helyzetváltozásának érzeti hatását és semmi módon nem tudta volna azt megkülönböztetni az állapotváltozástól. Nem juthatott volna el e fogalmakhoz akkor sem, ha ezek mozgásai nem lennének szándékos mozgások vagy ha mozgásait nem kísérnék valamelyes érzetek.

A helyreállítás feltételei.

Vajjon hogyan lehetséges a hasonló helyrehozás oly módon, hogy két, egyébként egymástól független változás egymást kölcsönösen kiegyenlítse?

Az olyan ész, a mely már a *geométria birtokában van,* így okoskodnék:

Hogy a helyreigazítás létrejöhessen, okvetlenül szükséges, hogy egyrészt ama külvilági tárgy különbözõ részei, másrészt a mi érzékeink különbözõ szervei a jelzett kettõs változás után egymáshoz képest ugyanabba a viszonylagos helyzetbe kerüljenek vissza. E czélból szükséges, hogy ama külvilági tárgy különbözõ részeinek egymáshoz való viszonylagos helyzete eközben ugyanaz maradjon. Ugyanez mondható a mi testünk különbözõ részeinek egymáshoz való viszonylagos helyzetérõl is.

Vagy más szóval a külvilági tárgynak az elsõ változásnál úgy kell elmozognia, mint valamely szilárd, változatlan testnek; ugyanez érvényes a mi testünk egészére nézve, a második, az elõbbit kiegyenlítõ mozgásra vonatkozólag.

Ily körülmények között a helyreigazítás lehetséges.

De mi, kik még nem ismerjük a geométriát, mert a mi fejünkben a tér fogalma még nem alakult ki, mi nem tudunk ily módon okoskodni, mi nem vagyunk képesek elõre megítélni, hogy a helyreigazítás lehetséges-e? A tapasztalat azonban megtanít bennünket reá, hogy ez néha lehetséges s ebbõl a kísérleti ténybõl indulunk ki, hogy megkülönböztessük az állapotváltozást a helyzetváltozástól.

A szilárd testek és a geométria.

A bennünket körülvevõ tárgyak között vannak olyanok, melyek gyakran oly helyváltozásoknak vannak alávetve, a melyeket a mi testünk megfelelõ viszonylagos mozgásával kiegyenlíthetünk: ezek a szilárd testek.

Az egyéb tárgyak, melyek alakja változó, csak kivételesen szenvedhetnek hasonló elmozgásokat (helyzetváltoztatást alakváltoztatás nélkül). Ha valamely test elmozog és eközben alakját megváltoztatta, nem vagyunk képesek többé testünk megfelelõ mozdulatai arán érzékszerveinket e testekhez képest ugyanabba a viszonylagos helyzetbe hozni; következésképpen nem tudjuk többé az eredeti benyomások összességét visszaállítani.

Majd csak késõbben s újabb tapasztalatok nyomán fogunk odajutni, hogy megtanuljuk a változó alakú testet olyan kisebb elemekre felbontani, melyek mindegyike azután megközelítõleg ugyanazon törvények szerint mozog el, mint a szilárd testek. Ilyen módon megkülönböztetjük az "alakváltozást" más állapotváltozásoktól; ezeknél az alakváltozásoknál minden elem egyszerû helyzetváltozáson megy át, mely kiegyenlíthetõ, ellenben az a változás, melynek a változó alakú test egészében alá van vetve, sokkal mélyebb természetû s nem olyan, hogy valamely megfelelõ kiegészítõ mozdulattal helyre lehetne igazítani.

Az ilyen fogalom már igen összetett természetû s nem is igen keletkezhetett csak jóval késõbben; nem is jöhetett volna létre, ha már a szilárd testek megfigyelése nem tanított volna meg bennünket a helyzetváltozások megkülönböztetésére.

Eszerint, ha a természetben nem léteznének szilárd testek, a geométria sem létezhetnék.

Egy másik megjegyzés is megérdemel némi figyelmet. Tegyük fel, hogy valamely szilárd test, mely elõbb az á helyzetbõl a â helyzetbe jut, elõbbi helyzetében reánk az *A* összbenyomást gyakorolta, míg második helyzetében a *B* összbenyomást keltette. Vegyünk fel most valamely másik szilárd testet, melynek az elõbbitõl teljesen elütõ sajátságai legyenek, mondjuk például, hogy a színe más. Tegyük fel most, hogy ez ugyancsak az á helyzetbõl, hol reánk az *A*' összbenyomást gyakorolta, a â helyzetbe kerül, hol bennünk a *B*' összbenyomást kelti.

Általában az *A***.** összbenyomásnak az *A'* összbenyomással semmi közös vonása nem lesz. Ugyanezt mondhatjuk a *B* és *B'* összbenyomásokról is. Az *A* összbenyomásnak *B*-vé, meg az *A'*-nak *B'*-vé való átalakulása' tulajdonképpen olyan két változás, melyeknek magukban véve nincs semmi közös vonásuk. És mégis mindkét változást elmozdulásnak, sõt mi több, ugyanazon elmozdulásnak tekintjük. Hogyan lehetséges ez? Ennek oka egyszerûen abban rejlik, hogy testünknek egy és ugyanazon viszonylagos mozgásával mind a két változás kiegyenlíthetõ.

Ez a *"megfelelõ helyreállító mozgás"* képezi az egyedüli kapcsolatot a két jelenség között, egyébként soha sem kíséreltük volna meg közöttük kapcsolatot létesíteni.

Másfelõl testünk tagjai ízeltségének és izmainak nagy számánál fogva, egész sor különféle mozgást végezhet; ám azért ezeknek nem mindegyike alkalmas a külvilág tárgyai elváltozásának helyreállítására; erre csak azok alkalmasak, melyeknél vagy egész testünk, vagy legalább is mindamaz érzékszerveink, melyek a helyreállító elmozgásnál szerepet játszanak, együttesen mozduljanak el oly módon, hogy viszonylagos helyzetük ne változzék meg, mintha szilárd testek lennének.

Vagyis most összefoglalva:

1. Mindenekelõtt eljutottunk ahhoz, hogy a jelenségek két nagyobb csoportját különböztessük meg.

Az egyik az önkéntelen jelenségek csoportja, melyeket izomérzetek nem kísérnek; ezeket a külvilág tárgyainak tulajdonítjuk: ezek a külsõ változások.

A másik jelenségcsoport ennek éppen az ellentettje, az idetartozó jelenségeket a saját testünknek tulajdonítjuk: ezek a belsõ elváltozások.

2. Észreveszszük, hogy ezen csoportok mindegyikének bizonyos változásai helyreállíthatók, a másik csoport megfelelõ változásai segélyével.

3. A külsõ változások között megkülönböztetünk olyanokat, melyeknek megvannak a helyreállítói a másik osztályban, ezeket nevezzük elmozdulásoknak; és a belsõ változások között is megkülönböztetünk olyanokat, a melyeknek helyreállítói megvannak az elsõ osztályban.

Ily módon viszonosság által meghatároztuk a jelenségeknek bizonyos csoportját, melyet elmozdulásoknak hívunk.

Ezen jelenségek törvényei képezik a geométria tárgyát.

Az egynemûség törvénye.

Legelsõ e törvények közül az egynemûség törvénye.

Tegyük fel, hogy valamely α külsõ változáson át az *A* összbenyomástól a *B*összbenyomáshoz jutunk s hogy ezt az α változást valamely megfelelõ, szándékos β mozgás állítja helyre oly módon, hogy az *A* összbenyomáshoz jussunk vissza.

Tegyük fel most, hogy egy másik α' külsõ változás az *A* összbenyomástól ismét a *B*összbenyomáshoz juttat bennünket.

A tapasztalat arra tanít meg bennünket, hogy ez az α' változás éppen úgy, mint az α, valamely kiegészítõ szándékos β' mozgással helyreállítható és hogy ez a β' mozgás ugyanazon izomérzeteknek felel meg, mint a β mozgás, mely az α-t állította helyre.

Ez az a tény, melyet rendesen így fejezünk ki: *a tér egynemû és egyöntetû.*

Azt is mondhatjuk, hogy valamely mozgás, mely egyszer létrejöhetett, másodszor is megtörténhetik és harmadszor is és így tovább, anélkül, hogy sajátságai megváltoznának.

Az elsõ fejezetben, hol a mathematikai okoskodás természetét tanulmányoztuk, láttuk, mily fontosságot kell tulajdonítanunk annak a körülménynek, hogy valamely mûveletet végtelen sokszor megismételhetünk.

Ebben az ismétlésben rejlik a mathematikai okoskodás legfõbb ereje és az egynemûség törvényének köszönhetõ, hogy ez az okoskodás a geométriai tényekre is alkalmazható.

Teljesség kedveért az egynemûség törvényéhez egész sor hasonló törvényt kellene még felsorolni, melyek részletezésébe azonban nem akarok belemenni; a mathematikus e törvényeket egy szóval úgy foglalja össze, hogy azt mondja: az elmozdulások egy "csoportot" alkotnak.

A nem Euklides-féle világ.

Ha a geométriai tér olyan keret volna, mely az egyenként tekintett képzeteink mindegyikére reá volna kényszerítve, lehetetlen lenne bármely képet e kerettõl elkülönítve elképzelni, s akkor geométriánkon mit sem tudnánk változtatni.

A valóságban azonban ez nincs így; a geométria nem egyéb, mint azoknak a törvényeknek az összessége, melyek szerint e képek *egymásra következnek.* Semmi sem gátol meg hát bennünket abban, hogy oly képzetek sorát el ne gondoljuk, melyek a mi rendes képzeteinkkel mindenben hasonlók, de a melyek azért más törvények szerint következnek egymásra, mint a milyeneket mi megszoktunk.

Érthetõ tehát, hogy ama lényeknek, melyeknek nevelkedése valamely oly közegben történnék, hol ezek a törvények gyökeresen módosulnának, a mi geométriánktól teljesen eltérõ geométriájuk lehetne.

Vegyünk fel például oly világot, mely egy nagy gömbbe van bezárva s a melyben a következõ törvények uralkodnak:

A hõmérséklet nem egyenletes; legmagasabb a gömb középpontjában, azután pedig mindinkább csökken, a mint a középponttól egyre jobban eltávolodunk és végre a bezáró gömb felületéhez érve, eléri az abszolut zérust.

Szabjuk meg még részletesebben azt a törvényt, a mely szerint a hõmérséklet változik. Legyen R a határló gömb sugara, legyen ra felvett pont távolsága a gömb középpontjától. Az abszolut hõmérséklet legyen arányos a R^2-r^2 kifejezéssel.

Még azt is fel fogjuk tenni, hogy ebben a világban valamennyi testnek ugyanazon tágulási együtthatója van, oly módon, hogy bármily anyagból való rúd hossza arányos saját abszolut hõmérsékletével.

Végül fel fogjuk tenni, hogyha valamely tárgyat egyik pontból egy másik, de más hõmérsékletû pontba viszünk át, akkor e test az új környezetével azonnal tökéletes hõegyensúlyba lép.

E feltevések egyike sem elképzelhetetlen és ezek ellenmondásban sincsenek egymással.

Valamely mozgó test tehát mindinkább kisebbedik, a mint a határoló gömb felületéhez közeledünk.

Jegyezzük meg rnindenekelõtt, ha e világ határolt is a mi szokásos geométriánk szempontjából, lakói elõtt mégis végtelen nagynak fog feltünni.

Valóban, ha ezek a gömb határfelületéhez közeledni akarnának, lehülnének s egyre kisebbekké zsugorodnának össze. Még a lépések nagysága is, melyeket tennének, egyre kisebb lenne, oly módon, hogy a gömb határához soha sem juthatnának el.

Ha elõttünk a geométria nem egyéb, mint azoknak a törvényeknek a tana a melyek szerint a merev testek mozognak, e képzelt lények geométriája azoknak a törvényeknek a tana lenne, a melyek szerint *a leírt hõmérsékletkülönbségek folytán eltorzult szilárd testek mozognak tova.*

Kétségtelenül a természetes szilárd testek a mi világunkban is alá vannak vetve a meleg vagy hideg okozta alak- és térfogatváltozásnak. De a geométria alapjai megvetésénél eltekintünk e változásoktól; nemcsak azért, mert igen csekélyek, hanem mert szabálytalanok, s következésképpen nekünk csak esetlegeseknek látszanak.

Amabban a feltételezett világban, már nem így áll a dolog, s ezek a változások szabályosabb és igen egyszerû törvényeket követnének.

Másrészt azok a különbözõ szilárd részek, melyek e képzelt föld lakóinak a tagjait alkotnák, mind ugyanazon alak- és térfogatváltozásnak lennének alávetve.

Vezessünk be még egy föltevést: tegyük fel, hogy a fény különbözõ törõ képességû közegeken hatol át és hogy a törésmutató R^2-r^2 kifejezéssel fordítva arányos. Ily körülmények között könnyû belátni, hogy a fénysugarak nem egyenes irányban, hanem körben terjednének tova.

Megelõzõ állításaink igazolására ki kell még mutatnunk azt, hogy bizonyos, a külvilág tárgyain bekövetkezõ változások ama képzelt világ érzékelõ lényeinek bizonyos megfelelõ mozgásaival helyreállíthatók és pedig oly módon, hogy azon benyomások eredeti összessége, melyeknek ezen érzõ lények alá voltak vetve, visszaállítható legyen.

Tegyük fel ugyanis, hogy valamely tárgy mozog, de nem valamely változatlan szilárd test módjára, hanem úgy, a hogy megváltoznék egy szilárd test, mely az elõbb említett hõmérsékleti eloszlásnak megfelelõ egyenlõtlen tágulásokat szenved. Az olvasó nem fogja rossz néven venni, ha a következõkben az ilyen mozgást rövidség okáért "nem *Euklides*-félemozgásnak" nevezem.

Ha valamely érzõ lény az így mozgó tárgy szomszédságába kerül, benyomásai a test tovamozgása által változni fognak; de, megfelelõ módon szintén tovamozogva, helyreállíthatja az eredeti benyomásokat. Tökéletesen elegendõ, hogyha végül a tárgy és az érzékelõ lény összessége, közös testnek tekintve õket, olyan meghatározott természetû mozgást végzett, melyet az imént neveztünk el nem Euklides-féle mozgásnak. Ez lehetséges akkor, ha feltételezzük, hogy eme lények tagjai ugyanazon törvények szerint terjednek ki, mint világuk egyéb testei.

Jóllehet a mi szokásos geométriánk szerint a testek e mozgás közben alakjukat változtatják és különbözõ részeik nem kerülnek többé ugyanabba a viszonylagos helyzetbe vissza, de azért mindjárt látni fogjuk, hogy mindamellett ezen érzõ lények benyomásai ugyanazok maradnak.

Valóban, bár a különbözõ részek kölcsönös távolsága megváltozott, a kezdetben egymással érintkezésben volt részek a mozgás befejeztével is ilyen állapotba kerültek vissza. A tapintási érzetek keltette benyomások eszerint nem változtak meg.

Másrészrõl visszaemlékezve a fennebb körvonalozott fénytörési föltevéseinkre s a fénysugaraknak ebbõl következõ elgörbülésére, a látási benyomások is ugyanazok maradtak.

Ezek a képzelt lények is, éppen úgy mint mi, eljutottak volna oda, hogy azokat a jelenségeket, melyeknek tanui, osztályozzák és hogy megkülönböztessék a helyzetváltozásokat, a melyek megfelelõ szándékos mozgásokkal helyreállíthatók.

Ha õk is alkottak volna geométriát, az nem lett volna, a mi szilárd, változatlan testeink mozgásának a tudománya, mint a mi geométriánk; az õ geométriájuk ama helyzet-változás tana lett volna, a mit mi "nem *Euklides*-féleelmozdulásnak" neveztünk s a mi ilyen módon nem más, mint *a "nem Euklides-féle geométria"*.

Ilyenformán ugyanolyan lények, a milyenek mi vagyunk, egy amolyan világban nevelkedve, más geométriát építettek volna fel.

A négyméretû világ.

A hogy el tudjuk képzelni *a* nem-*Euklides*-félevilágot, éppen így négyméretû világot is képzelhetünk magunknak.

A látási érzék - még *egy* szem esetén is - azokkal az izomérzetekkel együtt, a melyek a szemgolyó mozgásából származnak, elegendõ arra, hogy velünk a háromméretû teret megismertessék.

A külvilági tárgyak képei a reczehártyára rajzolódnak le kétméretû *vetületek* alakjában.

De mivel ezek a tárgyak mozgékonyak és mozgékony a mi szemünk is, egymásután ugyanazon testnek különbözõ vetületeit látjuk, különbözõ nézõpontokból.

Egyidejüleg azt is tapasztaljuk, hogy miközben valamely vetület egy másikba megyen át, ezen átmenetelt gyakran izomérzetek kisérik.

Ha valamely *A* vetületnek *B* vetületbe való átmenetét meg valamely *A'* vetületnek *B'*-be való átmenetét ugyanazok az izomérzetek kísérik, megkiséreljük ezen átmeneteket egymáshoz közelíteni, mint az ugyanolyan természetû mûveleteket szoktuk.

Ha azután tanulmányozzuk azokat a törvényeket, a melyek szerint ezek a mûveletek összetevõdnek, felismerjük, hogy e mûveletek oly csoportot alkotnak, mely ugyanoly szerkezetû, mint a szilárd, változatlan testek mozgásának csoportja.

Láttuk azonban, hogy e csoportnak sajátságaiból merítettük a geométriai tér és a három méret fogalmát.

Így megérthetjük, hogy a háromméretû tér eszméje hogyan születhetett meg e vetületek folyton változó szinjátékából, bár e vetületek mindegyike csak kétméretû; és pedig azért, *mert e vetületek bizonyos törvények szerint következnek egymás után.*

Ámde a hogy megszerkeszthetjük valamely háromméretû tárgy vetületét valamely síkon, úgy valamely négyméretû idom vetületét is felrajzolhatjuk valamely háromméretû alakzatra (esetleg akár kétméretüre is). A mathematikusnak ez csak játékszámba megyen.

Ugyanazon idomról még különbözõ vetületeket is vehetünk fel különbözõ nézõpontokból.

Ezeket a vetületeket pedig könnyû szerrel elképzelhetjük, mert csak háromméretüek.

Képzeljük el, hogy ugyanazon tárgy különbözõ vetületei következnek egymásra s ezt az egymásba való átmenetet izomérzetek kisérik. Helyesen felfogva e folyamatokat, ezen átmenetek közül kettõt akkor fogunk ugyanolyan természetü mûveletnek tekinteni, ha ugyanazon izomérzetek kiséretében lépnek fel.

Semmi sem gátol most már bennünket annak az elképzelésében, hogy ezek a mûveletek olyan törvények szerint tevõdnek össze, a hogyan mi akarjuk; például oly módon, hogy oly csoportot alkossanak, melynek a szerkezete olyan, mint a szilárd változatlan négyméretû test mozgása.

Ebben semmi elképzelhetetlen sincs, pedig ezek éppen az oly lény érzetei, mely kétméretû reczehártyával ellátva, négyméretû térben végez mozgást.

Ily értelemben beszélhetünk arról, hogy a negyedik méretet is elképzelhetjük.

Összefoglalás.

Láttuk, hogy a tapasztalatnak nélkülözhetetlen szerep jut a geométria keletkezésében; de azért nagy tévedés volna ebbõl arra következtetni, hogy a geométria, habár csak részben is, kisérleti tudomány.

Ha kisérleti tudomány lenne, akkor csak megközelítõ és átmeneti szerepû lehetne. S még hozzá milyen durva megközelítéssel dolgoznék!

Akkor a geométria nem lenne egyéb, mint a szilárd testek mozgásának a tudománya. Avalóságban azonban a geométria nem foglalkozik a természetben elõforduló szilárd testekkel, hanem csak olyan bizonyos, eszményi szilárd alakokkal, melyek teljesen változatlanok, s a melyek tulajdonképpen csak egyszerûsített képek és a valóságtól ugyancsak távol esnek.

Ezen eszményi testek fogalma szellemünk minden részébõl szûrõdött le és a tapasztalat sem más, mint oly alkalmi ok, mely bennünket arra késztet, hogy szellemünkbõl e fogalom keletkezzék.

A geométria tárgya egy meghatározott "csoport", de e csoport általános fogalma, vagy legalább megalkotásának a lehetõsége, már eleve létezik elménkben. E fogalom reáerõszakolja magát az értelmünkre, és pedig nem az iránta való *érzetképességünk*, hanem éppen itélõképességünk alakjában.

Csakhogy az összes lehetséges csoportok közül ki kell választanunk azt, a mely, hogy úgy mondjuk, az a *minta* lesz, a melyre a természet jelenségeit vonatkoztathatjuk.

Ezen választásban a tapasztalat vezet bennünket, de e választást nem kényszeríti reánk; nem annak a felismerésére segít bennünket, hogy melyik a legigazibb geométria, hanem arra, melyik a legkényelmesebb.

Az olvasó észrevehette, hogy a fennebb kigondolt képzelt világokat leírhattuk *anélkül, hogy el kellett volna hagyni a közönséges geométria nyelvének használatát.*

S valóban, ha véletlenül ama világba kerülnénk el, a geométria nyelvén ugyan semmi változtatni valónk nem lenne.

Azok a lények, a melyek ott szerzették volna nevelésüket, kétségkívül kényelmesebbnek találnák, a mienktõl eltérõ geométriának megalkotását, a mely inkább megfelelne az õ benyomásaiknak. Mi pedig *ugyanazokkal a* benyomásokkal szemben bizonyára kényelmesebbnek tartanók meg nem változtatni azt, a mit megszoktunk.

ÖTÖDIK FEJEZET.

A tapasztalat és a geométria.

1. Az elõzõ sorokban több ízben megkisérlettem annak bebizonyítását, hogy a geométria elvei nem kisérleti tények és különösen, hogy az *Euklides*-féle követelmény tapasztalati úton nem bizonyítható be.

Bármennyire döntõknek tekintem is a már ez ideig adott érveket, azt hiszem, még jobban meg kell hánynunk-vetnünk a kérdést, mert az erre vonatkozó hamis felfogás ugyancsak sok ember elméjébe belegyökerezett.

2. Ha valamely anyagból kört készítünk, megmérjük a sugarát meg a kerületét s ha most megvizsgáljuk, vajjon e két hosszúság viszonya egyenlõ-e a *Ludolf*-féle számmal, π-vel, mit tettünk ezáltal? Kisérletet végeztünk annak az anyagnak tulajdonságain, a melybõl e kör és a melybõl az a mérõlécz készült, a melyet a mérésre felhasználtunk.

A geométria és a csillagászat.

3. Más módon is tették már fel a kérdést.

Ha *a Lovacsevszki* geométriája igaz, akkor valamely igen távoli csillag parallaxisa[8] véges nagyságú lenne; ha ellenben a *Riemann* geométriája az igazi: negativ lenne. Ezek itt olyan eredmények volnának, melyek, úgy látszik, a kisérletnek hozzáférhetõk és reméllték, hogy a csillagászati megfigyelések talán dönthetnek a három geométria között.

De az, a mit a csillagászatban egyenesnek hívunk, az egyszerûen a fénysugár útja a térben.

Feltéve, de meg nem engedve, hogy felfedeznék a negativ parallaxist vagy bebizonyítanák, hogy minden parallaxis bizonyos alsó határnál nagyobb, kétféle következtetés közt válogathatnánk: vagy tagadnánk *az Euklides*-féle geométriát, vagy pedig a fénytan törvényeit kellene módosítanunk s felvennünk, hogy a fény nem terjed szigorúan egyenesen vonalban.

Talán fölösleges is hozzátenni, hogy ezt az utóbbi megoldást mindenki elõnyösebbnek tekintené.

Az *Euklides*-féle geométriának nem kell tehát egyáltalában félnie az újabb tapasztalatoktól.

4. Vajjon igaz-e, hogy bizonyos jelenségek, melyek az *Euklides*-féle térben lehetségesek, a nem *Euklides*-félében lehetetlenek? Oly módon, hogy a tapasztalat, felismerve e jelenséget, a nem *Euklides-féle* föltevéseknek egyenesen ellent mondana. A mi számunkra ez nem képezheti kérdés tárgyát. A mi szemünkben az teljesen egyértelmû lenne a következõkkel, a melyek képtelensége ugyancsak mindenki elõtt szembetünõ: léteznek-e olyan hosszúságok, melyek méterekben, czentiméterekben kifejezhetõk, de a melyek ölekben, lábakban és hüvelyekekben nem volnának mérhetõk oly módon, hogy a tapasztalat megállapítva, hogy léteznek-e hosszak, egyenesen megczáfolná azt a feltevést, hogy létezik a hat lábra osztott öl?

Vizsgáljuk kissé közelebbrõl a kérdést.

Felteszem, hogy az egyenes vonalnak *az Euklides*-féle térben két meghatározott sajátsága van, melyeket *A* és *B* sajátságnak nevezek; felteszem továbbá, hogy az egyenesnek a nem *Euklides*-féle térben még megvan az *A* sajátsága, de a *B* már nincs meg. Végül felteszem még azt is, hogy úgy az *Euklides*-féle, mint a nem *Euklides-féle* térben az egyenes az egyetlen vonal, a mely ilyen *A* sajátságú.

Ez esetben a tapasztalat alkalmas lenne dönteni *az Euklides* és a *Lovacsevszki*-féle geométria között. Megállapíthatnók, hogy az ilyen kisérletnek alávethetõ tényleges tárgy, például a fénysugarak nyalábja *A* sajátságú; következtetnénk-e ebbõl, hogy a nyaláb egyenes vonalú és megvizsgálhatnánk azután, hogy megvan-e a *B* sajátsága vagy sem?

De a valóságban ez nincs így. Nem létezik olyan sajátság, mint a milyen az *A* tulajdonság, a mely feltétlenül biztos megkülönböztetõ jel gyanánt szolgálhatna az egyenes vonal felismerésére.

Vagy mondhatnánk-e például: Ez a sajátság a következõ: "Az egyenes olyan vonal, hogy az az idom, a melynek ez a vonal részét képezi, mozogni képes anélkül, hogy pontjainak egymástól való kölcsönös távolsága megváltoznék és oly módon, hogy ezen vonalnak minden pontja állandó helyzetû marad?"

Ime, valóban. ez olyan sajátság, mely az egyenesnek a csakis az egyenesnek kizárólagos sajátsága, akár *Euklides*-féle a tér, akár nem. De hogyan ismernõk fel tapasztalat útján, hogy ilyen vagy amolyan tényleges tárgyhoz tartozik? A távolságokat meg kellene mérni s honnan tudnók, hogy az a meghatározott mennyiség, melyet a mi anyagi mûszerünkkel lemértünk, valóban megfelel-e az elvont távolságnak?

A nehézségeket tehát legfeljebb csak eltoltuk.

Valósággal azonban az a sajátság, melyet most kifejeztünk, nem egyedül az egyenesnek sajátsága; ez az egyenesnek és *a távolságnak* együttes sajátsága. Hogy feltétlen megkülönböztetõ jelként felhasználható legyen, szükséges lenne, hogy ne csak megállapíthassuk, hogy az egyenesen és a távolságon kívül más vonalnak nincs meg e sajátsága, hanem még azt is, hogy más vonalnak mint az egyenesnek és más mennyiségnek mint a távolságnak, nincs meg e tulajdonsága. Csakhogy ez nem igaz.

Eszerint lehetetlen elképzelni oly valóságos kisérletet, mely az *Euklides*-féle rendszerben értelmezhetõ s *Lovacsevszki* rendszerében nem; tehát joggal következtethetünk ilyenformán:

Semmiféle tapasztalat sem lesz soha ellenmondásban az *Euklides*-féle követelménynyel; de viszont megfordítva, azt is mondhatjuk, hogy *Lovacsevszki* követelményeivel sem.

5. Az a körülmény, hogy az *Euklides* vagy nem *Euklides*-féle geométria a tapasztalat útján sohasem lesz megczáfolható, magában véve még nem elegendõ. Nem volna az lehetséges, hogy a geométria a kisérlettel csak akkor egyezik, ha az elegendõ ok elvét meg a tér viszonylagosságának elvét megsérti?

Megmagyarázom szavaimat: Vegyünk fel valamely tetszés szerinti anyagi rendszert; szemügyre kell vennünk egyrészt ezen rendszer különbözõ testeinek állapotát (például hõmérséküket, elektromos potencziáljukat stb.) s másrészt a térben elfoglalt helyzetüket; azok között az adatok között, a melyek e helyzetet meghatározzák, meg fogjuk még különböztetni e testek kölcsönös távolságait, a melyek egymáshoz viszonyított helyzetüket határozzák meg és azokat a föltételeket, melyek a rendszer abszolut helyzetét és a térben való abszolut irányítását határozzák meg.

Az ezen rendszerben lejátszódó jelenségek törvényei eme testek állapotától, meg egymástól való kölcsönös távolságuktól fognak függeni; de a tér viszonylagos és tehetetlen volta miatt egyáltalában nem fognak függeni a rendszer abszolut helyzetétõl és irányításától.

Más szóval, a testek állapota s egymástól való kölcsönös távolsága valamely idõpillanatbancsakis eme testeknek a kezdeti pillanatban való állapotától és kölcsönös távolságaiktól függ; de független teljesen a rendszer abszolut kezdeti helyzetétõl és abszolut kezdeti irányításától. Ez az, a mit rövidség okáért a *viszonylagosság törvényének* fogok nevezni.

Eddig úgy beszéltem, mint az *Euklides*-féle szellemben gondolkodó mathematikus. De a mint már mondottam, bármilyen tapasztalat, az *Euklides*-féle föltevés mellett mindig bizonyos módon értelmezhetõ; de nem kevésbbé értelmezhetõ a nem *Euklides*-féle föltevések mellett is. Ámde egész sor kisérletet végeztünk: értelmeztük õket *az Euklides*-féle föltevés szerint és észrevettük, hogy ezek az így értelmezett kisérletek nem állanak ellenmondásban a "viszonylagosság elvével."

Tolmácsoljuk most ugyane kisérleteket a nem *Euklides*-föltevések szellemében; ez mindig lehetséges. Csakhogy a mi különbözõ testeinknek nem *Euklides*-féle távolságai ezen új felfogásban általában véve nem lesznek azonosak az eredeti felfogás *Euklides*-félетávolságaival.

Vajjon a mi, emez új módon értelmezett kisérleteink összhangban lesznek-e még a mi "viszonylagossági elvünkkel?" S ha nem lennének összhangban vele, nem lenne-e jogunk azt mondani, hogy a kisérlet bebizonyította a nem *Euklides*-féle geométria helytelenségét?

Könnyû belátni, hogy ettõl hiába félünk; hogy ugyanis a viszonylagosság törvényét teljes szigorral alkalmazhassuk, az egész világegyetemre kell alkalmaznunk. Ha e mindenségnek csak egy kis részét vennõk tekintetbe és ha e rész abszolut helyzete változásnak lenne alávetve: akkor e résznek a világegyetem többi testétõl való távolságai szintén változnának. A világegyetem kiszemelt részére gyakorolt hatásuk e szerint növekedhetik vagy csökkenhetik, a mi esetleg módosíthatja a lejátszódó jelenségek törvényeit.

De ha rendszerünk az egész világegyetembõl áll, a tapasztalat képtelen arra, hogy bennünket felvilágosítson a térben való abszolut helyzetérõl és irányításáról. Mindaz, a mit a mi akárhogyan is tökéletesített mûszereink segítségével megismerhetünk, a világegyetem különbözõ részei állapotára és egymástól való kölcsönös távolságaira szorítkozik.

Ezek szerint viszonylagossági elvünk, törvényünk így fejezhetõ ki:

A mûszereinken bármely idõpillanatban végezhetõ leolvasások csak azoktól a leolvasásoktól függhetnek, amelyet mi ugyanezen mûszerekkel a kezdeti idõpillanatban végezhettünk volna.

Ez a tény pedig teljesen független a tapasztalatnak bármilyen úton való értelmezésétõl is. Ha ez a törvény az *Euklides*-féle felfogásban helyes, bizonyos, hogy a nem *Euklides*-féle értelmezés szerint is helyes marad.

Legyen szabad itt kissé eltérnem a tárgytól. Fennebb beszéltem azokról az adatokról, a melyek e rendszer különbözõ testeinek helyzetét megszabják; azokról az adatokról is kellett volna beszélnem, a melyek sebességeiket határozzák meg, azaz meg kellett volna különböztetnem azt a sebességet, a melylyel eme különbözõ testek kölcsönös távolságai változnak; másrészt a rendszer haladásának és forgásának sebességeit, azaz azokat a sebességeket, a melyekkel e rendszer abszolut helyzete és irányítása a térben változik.

Hogy elménk teljesen ki legyen elégítve, szükséges volna, hogy a viszonylagosság elvét így is kimondhassuk:

A testek állapota, valamint egymástól való kölcsönös távolságaik valamely idõpillanatban, továbbá azok a sebességek, a melyekkel eme távolságok ugyanezen idõpillanatban változnak, csakis eme testeknek a kezdet pillanatában való állapotától és ezeknek egymáshoz viszonyitott kölcsönös távolságaiktól függenek, valamint ama sebességektõl is, a melyekkel e távolságok a kezdeti pillanatban változnak; nem függenek azonban sem a rendszer abszolut kezdeti helyzetétõl, sem abszolut térbeli irányításától, sem pedig azoktól a sebességektõl, a melyekkel ez az abszolut helyzet és ez az abszolut térbeli irányítás a kezdeti pillanatban változik.

Sajnos az így kifejezett törvény nem egyezik a tapasztalatokkal, helyesebben a tapasztalatok szokásos értelmezésével.

Ha valaki olyan bolygó csillagra kerülne, hol az eget állandóan vastag fellegek sûrû takarója borítja oly módon, hogy a többi csillagok sohasem láthatók: akkor úgy élne, mintha ez a bolygó a térben teljesen el volna szigetelve. Ez a lény azért mégis észrevehetné azt, hogy bolygójával együtt forog, akár a bolygójának lapultságát mérve le (melyet ma rendszerint a csillagászati megfigyelések segítségével végeznek, de a mit tisztán geodéziai úton is el lehet érni), akár a *Foucault*-féle ingakísérlet megismétlésével. Mindezek segélyével a bolygó abszolut forgása biztossággal meg lenne állapítható.

Ime ezek olyan tények, a melyeken megütközik a filozófus, de a melyeket a fizikus elfogadni kénytelen.

Tudjuk, hogy *Newton* e ténybõl következtet az abszolut tér létezésére; én részemrõl semmi szín alatt nem fogadhatom el e felfogást; majd e munka harmadik részében kifejtem, hogy miért. E pillanatban nem akarom e nehézségeket fölvetni.

Ezért a viszonylagosság törvénye kijelentésénél be kellett érnem avval, hogy belevegyem a sebességek valamennyi faját azon adatok közé, melyek a testek állapotát meghatározzák.

Bármiképpen legyen is a dolog, ez a nehézség az *Euklides*-féle geométriában éppen úgy fennáll, mint a *Lovacsevszki*-félében*;* ezért nincs okunk nyugtalankodni s az egész kérdést csak alkalmilag hoztam szóba.

Fontos itt a végeredmény: a tapasztalat *Euklides* és *Lovacsevszki* geométriája között nem képes dönteni. Összefoglalásképpen, akármi módon is forgassuk a dolgot, lehetetlen valamely észszerûséget fellelni abban az irányzatban, mely a geométriát tapasztalati alapon akarja felépíteni.

6. A kísérletek és tapasztalatok csak a testek egymáshoz való viszonyáról tájékoznak bennünket. Egyetlenegy sem vonatkozik, nem is vonatkozhatik a térnek a testekhez való viszonyára vagy a tér különbözõ részeinek egymáshoz való kölcsönös viszonyára.

"Igen, mondaná az olvasó, egyetlenegy tapasztalat nem elegendõ, mert az csak egyetlenegy egyenletet ad több ismeretlennel, de ha kellõ számú kísérletet végeznénk, elegendõ egyenletünk is lenne, hogy az összes ismeretleneket meghatározhassuk."

Csakhogy ha a nagy árbócz hosszát ismerjük, abból még nem tudjuk kiszámítani, hogy hány éves a kapitány. Ha a hajó minden fadarabját megmérjük, lesz sok egyenletünk, de a kapitány korának ismeretéhez nem jutunk közelebb. Mindazok a fadarabkákon végzett mérések semmi másról nem adhatnak felvilágosítást, mint a mi reájuk magukra vonatkozik. Hasonlóképpen azok a bármily nagy számú kísérletek is, minthogy semmi egyébre nem vonatkoztak, mint a testek egymás közötti viszonyára, nem fognak nekünk semmi felvilágosítást adni a tér különbözõ részeinek egymáshoz való kölcsönös viszonyáról.

7. Azt mondja az olvasó, hogy ha a kísérlet a testekre vonatkozik, akkor e testek geométriai sajátságára is vonatkozik.

Mindenekelõtt, mit is értünk csak a testek geométriai sajátságain? Felteszem, hogy errõl beszélve, a testeknek a térrel való viszonyáról van szó; ám ezek a sajátságok teljesen hozzáférhetetlenek az oly kísérletek számára, a melyek csak a testek egymás közötti viszonyára vonatkoznak. Ez az egyetlen tény is elegendõ annak a bebizonyítására, hogy ez nem lehet a kérdés tárgya.

Mindenesetre kezdjük azon, hogy a szavak értelmében egyetértsünk: mik tehát "a testek geométriai sajátságai?"

A mikor azt mondom, hogy valamely test több részbõl áll, felteszem, hogy ezen nem geométriai sajátságot értek; s ez még akkor is igaz marad, ha a legkisebb részeknek, melyeket még észrevehetek, a nekik meg nem felelõ *"pont"* nevet adnám.

A mikor azt mondom, hogy egyik testnek ilyen része egy másik testnek amolyan részével érintkezik, tulajdonképpen oly kijelentést teszek, mely a két test egymáshoz való kölcsönös viszonyára vonatkozik, nem pedig a testeknek a térrel való viszonyára.

Felteszem, hogy az olvasó velem egyetért abban, hogy ezek nem geométriai sajátságok; legalább is abban bizonyos vagyok, hogy az olvasó elismeri, hogy ezek a sajátságok függetlenek a métrikus geométria ismeretétõl.

Ezt felvéve, gondolatban szerkeszszünk meg oly szilárd testet, mely nyolcz vékony vasrúdból, *OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH*-ból oly módon van alkotva, hogy *O* végeiket egyesítettük[9]. Legyen másrészrõl egy másik szilárd testünk, például egy fadarabunk, a melyre három kis téntafoltot rajzoltunk, melyeket α, β, γ-nak nevezek el. Felteszem továbbá, hogy megállapítjuk, hogy az α, β, γ az *A, G, O*-val érintkezésbe hozható, (úgy értem, hogy α az *A*-val s egy idõben β a *G*-vel és γ az *O*-val); azután pedig az α, β, γ egymás után *BGO, CGO,* *DGO, EGO, FGO*-val, azután meg *az AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO,* s végül az á, ãegymás után az *AB, BC, CD, DE, EF, FA*-val érintkezésbe hozható.

Ime ily megállapításokat végezhetünk, anélkül, hogy a térnek akár alakjáról, akár métrikus sajátságairól eleve fogalmunk volna. E megállapítások a *"testek geométriai sajátságával"* nincsenek semmi összefüggésben. Mindazonáltal ezek a megállapítások nem volnának lehetségesek, ha azok a testek, a melyeken a kísérleteket végeztük, olyan csoport sajátságai szerint mozognának, melyek *a Lovacsevszki*-féle csoporttal egyenlõ szerkezetûek. (Azt akarom ezzel mondani, hogy ugyanazon törvények szerint mozognak, mint a szilárd testek a *Lovacsevszki*-féle geométriában.) Ezen megállapítások elegendõk annak a bebizonyítására, hogy ezek a testek *az Euklides*-féle csoport szerint mozognak vagy legalább is annak a kimutatására, hogy nem mozognak *a Lovacsevszki*-féle csoport szerint.

Hogy ezen megállapítások *az Euklides*-féle csoporttal összeférnek, azt könnyû belátni.

Ezeket a megállapításokat ugyanis akkor végezhetnõk, ha az α, β, γ test a mi rendes geométriánk szerinti változatlan szilárd test lenne, melynek alakja derékszögû háromszög s az *A, B, C, D, E, F, G, H* pontok oly sokcsúcsú alaknak lennének csúcsai, mely két hatoldalú, szabályos, a mi rendes geométriáik szerinti gúlából áll, a melyeknek közös alapja *A, B, C, D, E, F* s melyek egyikének *G* a csúcsa, a másiké pedig H.

Tegyük fel most, hogy az elõbbi megállapítások helyett azt tapasztaljuk, hogy az α, β, γ-át éppen úgy, mint elõbb, érintkezésbe hozhatjuk *az AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO*-val, továbbá hogy α, β (de nem mint fent α, γ) is egymásutánban reávihetõ *az AB, BC, CD, DE, EF* és *FA*-ra.

Ezeket a megállapításokat végezhetnõk akkor, ha a nem *Euklides*-féle geométria lenne igaz, ha az α β γ és *O A B C D E F G H* változatlan szilárd testek volnának és pedig az elsõ derékszögû háromszög, a második meg alkalmas méretû, hatoldalú szabályos kettõs gúla volna.

Ezek az újabb megállapítások tehát nem lehetségesek, ha a testek az *Euklides*-féle csoport szerint mozognak, de legott lehetségesekké válnak, ha felveszszük, hogy a testek *Lovacsevszki*-féle csoport szerint mozognak. Elegendõk volnának tehát e megállapítások (ha elvégezhetõk volnának) annak a kimutatására, hogy a szóban forgó testek nem az *Euklides*-féle csoport szerint mozdulnak el.

Ezek szerint anélkül, hogy bármily föltevést vennénk alapul, a térnek akár alakjára, akár természetére, akár a testeknek a térhez való vonatkozásaira nézve, továbbá anélkül, hogy a testeknek bárminemû geométriai sajátságokat tulajdonítottunk volna, olyan megállapításokat végeztünk, a melyek lehetõvé tették az egyik esetben annak a kimutatását, hogy a kísérletnek alávetett testek oly csoport szerint mozognak, mely *Euklides*-féle szerkezetû; s a másik esetben viszont annak az igazolását, hogy a testek *Lovacsevszki*-féle szerkezetû csoport szerint mozognak.

És mégsem mondhatjuk azt, hogy e megállapítások elsõ összesége tapasztalatot alkot, annak bizonyítására, hogy a tér *Euklides*-féle és a másik összesége oly tapasztalatot, mely azt bizonyítja, hogy a tér nem *Euklides*-féle.

Mert valóban el lehetne képzelni (de csak elképzelni!) oly módon mozgó testeket, hogy a megállapítások eme második sorozata lehetõvé váljon. Az igazolása abban állana, hogy az elsõ jött-ment mûszerész ily testeket megszerkeszthetne, ha venne magának hozzá elég fáradságot s a kellõ költséget reá fordítaná. De az olvasó ebbõl azért mégsem következtetné azt, hogy a tér nem *Euklides*-féle.

Továbbá; minthogy a közönséges szilárd testek akkor is csak tovább léteznének, ha azokat a fennemlített különös testeket megépítené is az a mûszerész; az következnék-e ebbõl, hogy a tér egy idõben *Euklides* és nem *Euklides*-féle*?*

Tegyük fel például, hogy van valamely *R* sugarú nagy gömbünk és hogy a hõmérséklet e gömb középpontjától a felülete felé olyan törvény szerint fogy, mint a milyet fennebb a nem *Euklides*-féle világ származtatásánál (a 65. lapon) leírtunk.

Olyan testekkel lehetne így dolgunk, melyek kitágulása elhanyagolható és a melyek úgy viselkednének, mint a közönséges, szilárd változatlan testek; és másrészrõl igen tágulékony testek is akadnának, melyek úgy viselkednének, mint a nem *Euklides*-féle szilárd testek. Ily módon két kettõs gúlánk volna: *O A B C D E F G H* és *O' A' B' C' D' E' F' G' H'* és két háromszögünk $\alpha\ \beta\ \gamma$ és $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$. Az elsõ kettõs gúla egyenes vonalú volna, a másik görbe vonalú; az $\alpha\ \beta\ \gamma$ háromszög a ki nem táguló anyagból való volna, az $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ háromszög a nagyon tágulékony anyagból készülne.

Az elsõ megállapításokat eszerint az *O A H* kettõs gúla és az $\alpha\ \beta\ \gamma$ háromszög alapján lehetne megtenni; a második megállapításokat az *O' A' H'* kettõs gúla és az $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ háromszög alapján. Ily módon a kísérlet kezdetben azt látszanék bizonyítani, hogy az *Euklides*-félegeometria igaz, utóbb azt, hogy hamis.

Ezek szerint a kísérletek nem a térre, hanem a testekre vonatkoztak.

Függelék.

8. Hogy e kérdést tökéletesen letárgyaljuk, egy igen kényes kérdésrõl kellene még beszélnünk, a mely hosszas fejtegetést kíván; csak arra fogok itt szorítkozni, hogy röviden összefoglaljam azt, a mit már elõbb a "Revue de métaphysique et de morale"-ben meg a "The monist"-ban közzétettem.

Mikor azt mondjuk, hogy a tér háromméretû, mit akarunk azzal mondani? Láttuk ama "belsõ változások" fontosságát, a melyeket izomérzeteink tárnak fel elõttünk. Ezek testünk különbözö "tartásai"-nak jellemzésére szolgálhatnak.

Vegyük fel tetszés szerint ezen "tartások" egyikét *A* kezdõhelyzetnek. Ha ezen kezdeti *A*tartásból valamely másik *B* tartásba megyünk át, az izomérzetek egész *S* sorozatát veszszük észre és az *S* sorozat fogja meghatározni *B*-t. Mindenesetre jegyezzük meg, hogy gyakran az *S* és *S'* két sorozatot úgy tekintjük, mint a melyek ugyanazon *B* tartást határozzák meg (mivel a kezdeti és a végsõ tartás *A és B* ugyanazok lehetnek, míg a közbeesõ tartások és a megfelelõ érzetek különbözhetnek). Hogyan ismerhetjük hát fel e két sorozat egyértékûségét? Arról, hogy ugyanazon külsõ változás helyreállítására szolgálhatnak, vagy általánosabban arról, hogy ha külsõ változás helyreállításáról van szó, a sorozatok egyikét a másik sorozat helyettesítheti.

Ezen sorozatok között megkülönböztettük azokat, melyek magukban véve is már képesek valamely oly külsõ változást helyreállítani, a melyet "elmozdulásnak" neveztünk. Minthogy nem tudunk megkülönböztetni két oly elmozdulást, mely egymásnak közvetlen közelségében megyen végbe, ezen elmozdulások összessége a fizikai folytonosság jellegét fogja mutatni; a tapasztalat megtanít bennünket arra, hogy ezen fizikai folytonosság hatméretû; de még nem tudjuk, hogy maga a tér hány méretû, ezért elõbb egy más kérdést kell megoldanunk.

Mi a tér egy pontja? Mindenki azt hiszi, hogy tudja, pedig az csak képzelõdés. Az, a mit mi látunk, mikor megkiséreljük a tér egy pontját elképzelni, az egy fekete folt a fehér papiroson, vagy krétanyom a fekete táblán, tehát mindig csak tárgy. A kérdést azonban a következõ módon kell kiterjesztenünk:

Mit akarok azzal mondani, ha azt állítom, hogy a *B* tárgy most ugyanazt a pontot foglalja el, a melyet az imént még *A* foglalt el? És miféle ismertetõ jel az, a melynek a segítségével ezt felismerhetem?

Azt akarom ezzel mondani, hogy *habár meg sem mozdultam,* (a mirõl az izomérzetem világosít fel), az egyik újjam, mely az imént az *A* testet tapintotta meg, most a *B*-t érinti. Más ismertetõ jeleim is lehetnek erre nézve, például egy másik újjam, vagy a látási érzékem. De az elsõ ismertetõ jel is elegendõ; tudom, ha az igent mond, a többi bizonyíték is ugyanazt fogja mondani. Ezt azonban *tapasztalatból* tudom, *s a priori* nem tudhatnám. Azért mondom azt is, hogy a tapintás a távolból nem gyakorolható; ez ugyanazon tapasztalati ténynek kifejezése. Ha ellenkezõleg, azt mondom, hogy a látás a távolságból történik, azzal azt akarom kifejezni, hogy a látási érzék igent mondhat akkor, mikor a többi érzékek nemmel felelnek.

És valóban az eltávolodott tárgy a reczehártya ugyanazon pontján alkothatja képét "A tárgy ugyanazon helyen maradt", mondaná a látás érzete; a tapintás azonban nemmel felel, mert az újjam, mely az imént még érintette a tárgyat, most már nem tapinthatja. Ha a tapasztalat azt mutatná, hogy az egyik ujj nemmel felelhet akkor, mikor a másik igennel, azt is mondhatnók, hogy a tapintás is á távolságból történik.

Végeredményben, testem minden helyzetének megfelelõen, az elsõ ujjam meghatároz egy pontot, és ez, még pedig egyedül ez határozza meg a tér egy pontját.

Eszerint minden testtartásnak megfelel egy pont; az azonban gyakran megesik, hogy ugyanazon pont több tartásnak is megfelel; ebben az esetben azt mondjuk, hogy az ujjunk ugyan nem mozdult el, de testünk többi része elmozdult. Megkülönböztetjük eszerint a helyzet változásai között azokat, mikor az ujj nem mozdul el. Hogy jutottunk el ide? Úgy, hogy gyakran észreveszszük, hogy a változásoknál a tárgy, mely az ujjal érintkezésben van, nem hagyja el ezt az érintkezést. Sorozzuk most be ugyanabba az osztályba mindazokat a testtartásokat, a melyek egymásból a most részletezett változások révén leszármaztathatók. Ugyanazon osztály minden tartásának a tér ugyanazon pontja fog megfelelni: minden osztálynak meg fog felelni egy pont, és minden pontnak egy osztály. Ám azt mondhatnók, hogy az, a mit a tapasztalat elért, az nem maga a pont, hanem ama változás osztálya vagy jobban mondva a megfelelõ izomérzetek osztálya.

És így ha azt mondjuk, hogy a tér háromméretû, azzal egyszerûen azt akarjuk mondani, hogy ez osztályok összessége oly jellegûnek tûnik nekünk fel, mint valamely háromméretû fizikai folytonosság.

Hajlandók lehetnénk arra következtetni, hogy a tapasztalat tanított meg bennünket arra, hogy a tér hány méretû? Valóságban azonban a tapasztalataink még itt is nem magára a térre, hanem a mi testünkre s ennek a hozzá szomszédos tárgyakkal való helyzetére vonatkoznak. Ezenkívül e megfigyelések meglehetõsen durvák.

Elménkben a csoportok bizonyos számának lappangó eszméje már eleve létezett; ezeknek elméletét építette ki *Lie* (1. a 49. oldalt).

Vajjon melyiket fogjuk kiválasztani, hogy ezt bizonyos értelemben alapmértékül véve, a természet jelenségeit hozzá hasonlítsuk? És e választott csoportnak vajjon melyik az az alcsoportja, a melyet a tér egy pontjának meghatározására ki fogunk választani?

A tapasztalat vezetett bennünket, kijelölve, hogy mely választás az, a mely a mi testünk sajátságaihoz a legjobban hozzásímul. De szerepe csak eddig terjed.

Õseink tapasztalatairól.

Sokszor vitatják, hogy, ha az egyéni tapasztalat nem teremthette a geométriát, az õsidõk lényeinek tapasztalatairól ez nem állítható. De vajjon mit is értûnk ezen? Vajjon azt-e, hogy mi nem tudjuk kisérleti úton bebizonyítani *az Euklides*-féle követelményt, de õseinknek ez sikerült? A világért sem. Azt akarjuk mondani, hogy agyunk természetes kiválasztás útján *hozzá alkalmazkodott a* külvilág körülményeihez és hogy elfogadta azt a geométriát, mely *neki, fajának a legelõnyösebb,* vagy más szavakkal azt, a mely *a legkényelmesebb.* Ez pedig teljesen megegyezik a mi fennebbi következtetéseinkkel: a geométria nem *igaz,* de *hasznos.*

HARMADIK RÉSZ.

Az erõ.

HATODIK FEJEZET

A klasszikus mechánika.

Az angolok a mechánikát kísérleti tudományként tanítják, Európa egyéb részein ellenben többé-kevésbbé mint deduktiv és a priori tudománynak szokták feltüntetni.[*] Hogy az angoloknak igazuk van, az bizonyos, de hogyan lehetett oly állhatatosan megmaradni egyéb tévedésekben? A kontinens tudosai, kik elõdeik megszokásaitól menekülni igyekeztek, miért nem tudtak a legtöbb esetben e tévedésektõl teljesen megszabadulni?

Másrészrõl, ha a mechánikai alapelveknek a tapasztalaton kívül nincs más forrása, vajjon nemcsak megközelítõk és átmenetiek-e?

Vajjon újabb tapasztalatok nem vezethetnének-e el bennünket oda, hogy módosítsuk, vagy végképpen elhagyjuk ezen elveket?

Ilyenek azok a kérdések, melyek természetszerûen felmerülnek és a megoldás nehézsége fõképpen abban áll, hogy a mechánikai tankönyvek nem különböztetik meg egészen tisztán, hogy mi a tapasztalat és mi a mathematikai okoskodás, mi a közmegegyezésen alapuló megállapodás és mi benne a föltevés.

De többet mondok:

1. Nincs abszzolut tér és mi csak a viszonylagos mozgást foghatjuk fel; mindazonáltal gyakran úgy fejezik ki a mechánikai tényeket, mintha léteznék abszzolut tér, melyre a mechánikai jelenségeket vonatkoztatni lehetne.

2. Nincs abszolut idõ; ha azt mondjuk mégis, hogy két idõtartam egymással egyenlõ, ez olyan állítás, melynek magában véve semmi értelme sincs; és értelemmel csakis a megállapodás által ruházható fel.

3. Nemcsak hogy nincs közvetlen szemléletünk két idõtartam egyenlõségérõl, de még annak a két eseménynek az egyidejûségérõl sem, a mely két különbözõ színtéren folyik le; ezt egy közleményemben, a *La mesure du temps*-banfejtettem ki. (Revue de métaphysique et de morale, VI. k., 1-13 l. 1898 január.)

4. Végül maga a mi *Euklides*-féle geométriánk nem más, mint a nyelv bizonyos megállapodásainak összesége; a mechánikai tényeket kifejezhetjük a nem-*Euklides*-féletérre vonatkoztatva is, a mi ugyan kevésbbé kényelmes jelzési mód lenne, de éppen olyan jogosúlt volna, mint a mi rendes terünkre vonatkoztatott mechánikánk. A dolgok kifejezése így sokkal bonyolódottabb volna, de még mindig lehetséges maradna.

Ezek szerint az abszolut tér, az abszolut idõ, sõt maga a geométria is, nem olyan elõfeltételei a mechánika kiépítésének, melyek magukat e tanra reákényszerítik; éppen oly kevéssé szükséges, hogy elõbb létezzenek, mint a mechánika, mint a mily kevéssé szükséges logikailag, hogy a magyar nyelv elõbb létezzék, mint az igazságok, a melyeket magyar nyelven fejeznek ki.

Megkísérelhetnék a mechánika alaptörvényeit olyan nyelvmodorban kifejezni, mely mindezen megállapodásoktól független. Mindenesetre ilyen módon jobban adhatnánk magunknak számot arról, a mit e törvények magukban jelentenek.

Ezt kísérelte meg legalább részben *Andrade*, *Leçons de mécanique physique* czímû munkájában.

E törvények kifejezése tulajdonképpen sokkal bonyolódottabbá válna, mivel valamennyi megállapodást éppen azért eszelték ki, hogy ezt a kifejtést, a mennyire csak lehet, megrövidítsék és egyszerûsítsék.

Én részemrõl, annak a kivételével, a mi az abszolut térre vonatkozik, mindezeket a nehézségeket félreteszem; nem mintha félreismerném õket; távol állok tõle; hanem azért, mert az elsõ két részben már eleget foglalkoztunk velük.

Ezek szerint a következõkben *ideiglenesen* elfogadom az abszolut idõt és az *Euklides*-félegeométriát.

A tehetetlenség elve.

Az a test, a mely semmiféle erõ hatásának nincs alávetve, csakis egyenletes, egyenes vonalú, mozgást végezhet.

Vajjon oly igazság-e ez, a mely *a priori* uralkodik elménken? Ha így lett volna, miért nem ismerték akkor a görögök? Hogyan gondolhatták mégis azt, hogy a mozgás azonnal megszûnik, a mint szülõoka elenyészik? Vagy hogyan gondolhatták még azt, hogy minden test, ha ebben semmi sem gátolja, körmozgást végezne, a mozgások e legelõkelõbb faját?

Ha azt mondjuk, hogy valamely test sebessége akkor nem változhatik, a mikor ennek megváltoztatására ok nincs, vajjon nem lehetne-e éppen olyan joggal állítani, hogy e test helyzete nem változhatik, vagy hogy pályájának görbültsége nem változhatik, hacsak külsõ ok meg nem változtatja.

A tehetetlenség elve, mely nem a priori igazság, vajjon kísérleti tény-e? De kísérleteztek-e valamikor oly testekkel, a melyeket valamennyi erõnek hatása alól kivontak? s ha kísérleteztek, honnan tudták, hogy ez a test nem volt alávetve semmiféle erõnek?

Rendesen a márványasztalon igen hosszú ideig gördülõ golyó példáját szokták említeni; de miért mondjuk azt, hogy ez semmi erõnek sincs alávetve? Vajjon azért, mert minden más testtõl nagyon is távol lévén, ez utóbbiak nem gyakorolhatnak reá észrevehetõ hatást?

A földtõl azonban így sincs messzebb, mintha a levegõbe szabadon hajítanók el; és mindenki tudja, hogy ez esetben a földvonzás okozta nehézségi erõ hatásának leszen kitéve.

A mechánika tanárainak az a szokása, hogy e golyó példáján gyorsan átsíklanak, de hozzáteszik, hogy a tehetetlenség elve közvetett úton, következményei által van bebizonyítva.

De rosszul fejezik ki magukat; nyilvánvaló ugyanis, hogy azt akarják mondani, hogy oly általánosabb elv különbözõ következményeit be lehet igazolni, melynek e tehetetlenségi elv csak különös esete.

Ezen általános elv számára a következõ kifejezést ajánlom:

Valamely test gyorsulása csak a test és a szomszédos testek helyzetétõl és sebességétõl függ.

A mathematikusok azt mondanák, hogy a világegyetem összes anyagi molekuláinak mozgása másodrendû differencziális egyenletektõl függ.

Hogy megvitassuk, hogy valóban ez a tehetetlenség törvényének természetes általánosítása, kérem az olvasót, hogy engedjen meg némi képzelõdést. A tehetetlenség törvénye, mint már fennebb is mondottam, nem kényszeríti magát *a priori* reánk; más törvények éppen úgy összeegyeztethetõk lennének a kielégítõ ok elvével, mint ez. Ha valamely test semmi erõ hatásának sincs alávetve, a helyett, hogy feltennõk, hogy a sebessége nem változik, feltehetnõk, hogy helyzete vagy pedig a gyorsulása marad változatlan.

Képzeljük most egy pillanatra, hogy e két feltételezett törvény egyike valóban természeti törvény és helyettesíti a mi tehetetlenségi törvényünket. Milyen volna akkor ennek természetes általánosítása! Egy pillanatnyi gondolkodás után látni fogjuk.

Az elsõ esetben fel kellene tennünk, hogy valamely test sebessége csakis saját helyzetétõl és a szomszédos testek helyzetétõl függ; a második esetben pedig azt, hogy a test gyorsulásának változása csakis eme test és a szomszédos testek helyzetétõl, sebességétõl és gyorsulásától függ.

Vagy hogy mathematikai nyelven fejezzük ki magunkat: a mozgás differencziális egyenletei elsõrendûek lennének az elsõ esetben s harmadrendûek a második esetben.

Módosítsuk egy kissé képünket. Vegyünk fel a mi világunkhoz hasonló naprendszert, de a hol valamely sajátszerû véletlen folytán az összes bolygók pályái szigorúan körök volnának, melyeknek egymáshoz való hajlása zérus lenne. Még azt is feltételezem, hogy e bolygók tömege igen csekély ahhoz képest, hogy kölcsönös zavaró hatásuk észrevehetõ legyen. E bolygók csillagász-lakói bizonyára arra következtetnének, hogy valamely csillag pályája csak kör lehet, mely egy meghatározott síkhoz párvonalasan fekszik; valamely csillag helyzetének ismerete egy adott pillanatban elegendõ lenne eszerint ezen csillag sebessége és egész pályájának meghatározására. Õk tehát a fent szóba hozott két képzelt törvény közül az elsõt fogadnák el tehetetlenségi törvényül.

Tegyük fel most azt, hogy ezen a rendszeren egy napon távoli csillagzatokból jövõ nagy tömegû, nagy sebességû test vonul át. Valamennyi csillagpálya alapos zavart szenvedne. Csillagászaink ezen még nem ütköznénekmeg túlságosan; kitalálnák, hogy ez az új csillag mindezen rossznak az oka. De, mondanák, „ha majd eltávozik, a rend önként helyre fog állani; kétségtelenül ama bolygóknak a naptól való távolsága nem marad ugyanaz, mint a fölforgatás elõtt, de azért a zavarodást okozó csillag távoztával a pályák ismét köralakúakká fognak válni".

Ámde, csak akkor vennék észre a csillagászok e jelzett kijelentésük téves voltát és csak akkor látnák a szükségét egész mechánikájuk megújításának, mikor a zavaró test már messze távozott és a mikor ez alatt a pályák, a helyett, hogy ismét köralakúak lennének, ellipszis-alakot öltenének.

Egy kissé idõztem ezeknél a föltevéseknél, mert azt hiszem, hogy csak úgy lehet könnyû szerrel megérteni a mi általánosított tehetetlenségi törvényünk lényegét, ha valamely ellentétes föltevéssel állítjuk szembe.

Kérdezzük most, beigazolták-e már kísérleti úton ezt az általánosított tehetetlenségi törvényt vagy egyáltalán beigazolható-e ily módon? Mikor *Newton* megírta a *Principia mathematica philosophiae naturalis* czímû alapvetõ mûvét, õ mindenesetre kisérletileg szerzett és bizonyított igazságnak tekintette e törvényt.

Az õ szemében ilyennek tûnt fel nemcsak az emberi természet mélyében rejlõ eszménynél fogva, melyrõl még szólni fogok, hanem *Galilei* munkái révén is. Sõt maguk a *Kepler*-féle törvények is ilyennek tüntették fel a tehetetlenségi törvényt; valóban e törvények szerint valamely bolygó pályája teljesen meg van határozva kezdeti helyzete és kezdeti sebessége által; és éppen ezt kívánja a mi általános tehetetlenségi elvünk.

Hogy az elv csak látszólagosan legyen igaz, hogy attól kelljen félnünk, hogy egy szép napon majd amaz elvek egyikével kelljen felcserélnünk, a melyekkel csak az imént állítottuk szembe, ahhoz szükséges lenne, hogy valami meglepõ véletlen ejtett légyen tévedésbe, mint a hogy a fenti képben szereplõ véletlen megtévesztette képzelt csillagászainkat.

Ily föltevés azonban sokkal valószínütlenebb, hogysem minket megakaszszon. Senki sem gondol arra, hogy ilyen véletlenek létezzenek; annak a valószínüsége, hogy két ellipszis középpontkivülisége pontosan zérus legyen a megfigyelések hibáin belül, nem kisebb, mint az a valószínüség, hogy az egyik egyenlõ legyen egy tizeddel, a másik meg két tizeddel, a megfigyelések pontosságának határain belül. Valamely egyszerû esemény valószínüsége nem kisebb, mint valamely összetett eseményé és mégis, ha az elsõ bekövetkezik, nem nyugszunk meg abban, hogy ezt a véletlennek tulajdonítsuk; nem akarjuk azt hinni, hogy a természet ezt külön azért tette, hogy bennünket megtéveszszen. Miután az efféle tévedés feltevése így el van hárítva, elfogadhatjuk, legalább a míg a csillagászatról van szó, hogy törvényünk tapasztalati úton beigazolást nyert.

De a csillagászat még nem az egész fizika. Vajjon nem félhetünk-e attól, hogy egy szép napon valamely új tapasztalat nem fogja-e e törvényt a fizika valamely tartományában hibásnak találni? A kísérleti törvények állandóan ellenõrzõ javítás alatt állanak; mindig el lehetünk készülve arra, hogy majd egy tökéletesebb törvénynyel fogjuk pótolhatni.

Ámde senki sem tart komolyan attól, hogy a szóban forgó törvényt valamikor el kell hagyni, vagy meg kell javítani. Miért nem? Éppen azért nem, mert soha sem lesz döntõ kísérletnek alávethetõ.

Mindenekelõtt, hogy ez a kísérlet teljes legyen, ahhoz szükséges lenne, hogy bizonyos idõ elteltével a világegyetem összes testei kezdeti sebességeikkel kezdeti helyzetükbe visszatérjenek.

Így azután láthatnánk, vajjon e pillanattól kezdve ugyanazon pályákat írnák-e le, melyeket elõbb követtek?

Ez a próbakísérlet azonban lehetetlen, ez csakis részlegesen vihetõ ki és akármilyen jól végezzük is, még mindig fognak akadni oly testek, melyek kezdeti helyzetükbe nem térnek vissza; így azután a tõrvénytõl való minden eltérés könnyû szerrel találna magyarázatot.

De tovább mehetünk. A csillagászatban mi *látjuk* azokat a testeket, melyeknek mozgását tanulmányozzuk, s a legtöbbször felveszszük, hogy nincsenek más láthatatlan testek hatásának alávetve. Ilyen körülmények között szükséges, hogy törvényünk vagy beigazolódjék, vagy sem.

A fizikában azonban a dolog nem így áll. Ha a fizikai jelenségek mozgásoknak tulajdonítandók, a molekulák mozgásai reánk nézve már láthatatlanok. Ha tehát azt találjuk, hogy a mi látható testeink gyorsulása *valami mástól* függ, mint a többi látható testek helyzetétõl és sebességétõl, vagy a láthatatlan molekulák helyzetétõl és sebességétõl, a melyeknek a létezését elõbb hallgatagon elfogadtuk, semmi sem áll útjában ama feltevésünknek, hogy ez a *más valami* oly molekulák helyzete vagy sebessége legyen, a mely molekulák jelenlétét eddig még nem sejtettük. A törvény épsége e szerint meg lenne mentve.

Engedje meg most az olvasó, hogy egy pillanatra a mathematika nyelvét alkalmazzuk arra, hogy ugyanezt a gondolatot más formában fejezzük ki. Felveszem, hogy n molekulát figyelünk meg, s hogy megállapítjuk, hogy 3 *n* koordinátájuk 3 n számú negyedrendû differencziálegyenlet rendszerének tesznek eleget, nem pedig másodrendûeknek, mint azt a tehetetlenségi törvény kívánja. Tudjuk, hogy ha 3 *n* segédváltozót vezetünk be, a 3 n negyedfokú egyenletbõl álló rendszer oly 6 *n* számú egyenlet rendszerévé változtatható, melyek rnásodrendûek. Ha tehát felveszszük, hogy ez a 3 *n* segédváltozó az n láthatatlan molekula koordinátáit képviseli, az eredmény a tehetetlenségi törvénynyel ismét megegyezõ.

Végeredményben, ez a néhány különös esetben kísérletileg bizonyított törvény, aggodalom nélkül kiterjeszthetõ a legáltalánosabb esetekre is, mert tudjuk, hogy ezen általános esetekben a kísérlet által sem meg nem czáfolható, sem meg nem erõsíthetõ.

A gyorsulás törvénye.

Valamely test gyorsulása egyenlõ a reá ható erõvel, osztva a saját tömegével.

Vajjon ez a törvény kísérletileg igazolható-e? E czélból meg kellene mérni az éppen kimondott kijelentésben szereplõ három mennyiséget: a gyorsulást, az erõt és a tömeget.

Feltételezem, hogy a gyorsulás mérhetõ, mert eltekintek attól a nehézségtõl, melylyel az idõ mérése jár. De hogyan mérjük az erõt meg a tömeget, mikor azt sem tudjuk, hogy e szavak mit jelentenek?

Mi a tömeg? A térfogat és sûrûség szorzata, feleli *Newton. Thomson* és *Tait* meg azt mondják, hogy jobb lenne úgy mondani, hogy a sûrûség a tömeg és a térfogat hányadosa.

Mi az erõ? *Lagrange* szerint valamely olyan ok, mely a testek mozgását létesíti, vagy a mely arra törekszik, hogy a testeket mozgásba hozza.

A tömegnek *a gyorsulással* való szorozata, mondja *Kirchhoff.*[10] De miért ne mondhatnók akkor azt, hogy a tömeg az erõnek és a gyorsulásnak hányadosa?

Ezek a nehézségek legyõzhetetlenek. Ha azt mondjuk, hogy az erõ a mozgás oka, tulajdonképpen metafizikai nyelven beszélünk; s ez a fogalmi meghatározás, ha vele be kellene érnünk, ugyancsak meddõ maradna. Hogy valamely meghatározást valamilyen czélra használhassunk, szükséges, hogy megtanítson bennünket az erõ *mérésére;* ez azután elegendõ is; de egyáltalán nem szükséges, hogy megtanítson bennünket arra, hogy mi az *erõ önmagában*, sem arra, vajjon oka-e a mozgásnak, avagy következménye.

Mindenekelõtt két erõ egyenlõségének meghatározását kell adnunk. Mikor fogjuk két erõrõl azt mondani, hogy egymással egyenlõk?

Akkor, mondhatnánk, ha ugyanazon tömegre hatva, annak ugyanazon sebességét kölcsönöznék, vagy pedig, ha szembeállítva, egymást egyensúlyoznák.

Ám e fogalmi meghatározás csak szemfényvesztés.

Ugyanis, valamely testre alkalmazott erõt nem lehet egyszerûen leakasztani s egy másikhoz kapcsolni, mint a hogyan leakasztják a gõzmozdonyt, hogy más vonathoz kapcsolják. Lehetetlen azt tudni, hogy milyen gyorsulást létesít az oly erõ, melyet elõbb emilyen testre alkalmaztunk, egy amolyan más test mozgásában, *ha* csakugyan reá alkalmaznók.

Lehetetlen azt tudni, hogy miképpen viselkednék két erõ, a mely nem közvetlenül ellentett egymással, hogy *ha* egymással közvetlenül szembe mûködnének.

Ezt a fogalmi meghatározást akarják úgyszólván anyagiasítani, mikor valamely erõt a dinámométerrel mérnek, vagy súlyokkal egyensúlyoznak. Két erõ, *F* és *F*', melyeket egyszerûség okáért függõlegeseknek, alulról felfelé irányítottaknak tételezek fel, mindegyike egy-egy testre, *C* és *C*'-re hat; most a *P* súlyú testet elõbb a *C*, azután a *C'* testre függesztem fel; ha a két esetben egyaránt egyensúly állana be, azt fogom következtetni, hogy a két erõ *F és F'* egymással egyenlõ, mivel a *P* test súlyával mind a kettõnek súlya megegyezik.

De vajjon bizonyos vagyok-e a felõl, hogy a P test megõrizte-e eredeti súlyát, mikor én az elõbbi testrõl az utóbbira vittem át? Szó sincs róla; sõt éppen az ellenkezõjérõl vagyok meggyõzõdve. Tudom, hogy a nehézségi erõ nagysága pontról-pontra változik és hogy például ezen erõ nagyobb a sarkoknál, mint az egyenlítõ táján. Igaz, hogy a különbség rendkívül csekély, úgy hogy a gyakorlatban nem veszem számításba[11]; mindazonáltal a jó fogalmi meghatározásnak mathematikai szigorúságúnak kell lennie s ez esetben e követelményt ugyancsak kevéssé elégítettük ki. Az, a mit a súlyról mondottam, nyilván a dinámométer rugójának erejére is érvényes, a hol a hõmérséklet és a körülmények egész serege játszik közre.

De egyéb ellenvetés is tehetõ. Nem mondhatjuk azt, hogy a *P* test súlya a *C* testre átvíve, az *F* erõt közvetlenül ellensúlyozza. Az, a mit a *C*-re átvittünk, az *P* testnek *A*hatása a *C* testre; a *P* test a maga részérõl egyrészt saját súlyának van alávetve, másrészt a *C* test részérõl *P*-re gyakorolt *R* visszahatásnak. Végeredményben az *F* erõ egyenlõ az *A* erõvel, mert egyensúlyban áll vele; az *A* erõ meg egyenlõ *R*-rel a hatás és visszahatás egyenlõsége elvének értelmében és végül *R* erõ egyenlõ a *P* súlylyal, mert egyensúlyban áll vele. E három egyenlõség következményeképpen vezetjük hát le az *F* és a *P* egyenlõségét.

A két erõ egyenlõségének fogalmi meghatározásában e szerint kénytelenek vagyunk már a hatás és visszahatás egyenlõségének elvét is mint közvetítõt felhasználni. Ennek következtében ez az elv nem tekinthetõ többé kísérleti törvénynek, hanem csak fogalmi meghatározásnak.

Ezek értelmében a két erõ egyenlõségének felismerésére immár két szabályunk van: két, egymással egyensúlyban álló erõ egyenlõsége s a hatás és visszahatás egyenlõségének az elve. Láttuk azonban fennebb, hogy ez a két szabály elégtelen; kénytelenek vagyunk, egy harmadikhoz folyamodni és feltételezni, hogy némely erõ, mint például valamely test súlya, nagyságra és irányra nézve állandó. E harmadik szabály azonban, mint már mondottam is, kísérleti törvény: csak közelítõleg igaz és ezért *ez rossz fogalmi meghatározás.*

Eljutottunk eszerint *a Kirchhoff* -féle fogalmi meghatározáshoz: *az erõ egyenlõ a gyorsulással szorzott tömeggel.* Ezzel a *„Newton-féle* törvény" megszûnik kísérleti törvény gyanánt szerepelni és többé nem más, mint egy meghatározás. E meghatározás azonban még elégtelen, mert nem tudjuk még, mi a tömeg. Kétségkívül alkalmas arra, hogy segélyével ugyanazon testre, de két különbözõ idõpillanatban alkalmazott két erõnek egymáshoz való viszonyát kiszámíthassuk; de két különbözõ testre ható erõk viszonyára nézve semmi felvilágosítást nem ad.

Hogy e meghatározást kiegészíthessük, ismét segítségül kell vennünk *Newton* harmadik törvényét, a hatás és visszahatás egyenlõségének elvét, melyet egyelõre ne kísérleti törvénynek, hanem fogalmi meghatározásnak tekintsünk. Két test, *A* meg *B* hat egymásra; az *A* gyorsulása szorozva *A* tömegével, egyenlõ a *B*-nek *A*-ra gyakorolt erõhatásával. Hasonlóképpen a *B* gyorsulásának, saját tömegével való szorzata egyenlõ az A-nak B-re gyakorolt erõhatásával, mivel pedig meghatározásunk szerint a hatás egyenlõ a visszahatással, *A*és *B* tömegei fordított arányban állanak a két test gyorsulásával. Ime meghatároztuk a két tömeg viszonyát és most már a kísérlet dolga, hogy e viszony állandóságát igazolja.

Ez a kísérlet könnyen végezhetõ volna, ha csak a két test, *A* meg *B* egyedül volna jelen, kivonva a világ összes többi testeinek hatása alól. Csakhogy ez tényleg nincsen így; az *A* gyorsulását nem egyedül *B* okozza, hanem a többi testek egész sorozata: *C, D s* így tovább. Hogy az elõbbi szabályt alkalmazhassuk, az *A* gyorsulását több összetevõre kell szétválasztanunk és megállapítanunk azt, hogy ezek közül melyik származik a B test hatásától. Ez a szétbontás akkor még lehetséges lenne, ha *föltennõk,* hogy a *C*-nek az *A*-ra gyakorolt hatása egyszerûen hozzáadódik a *B*-nek az *A*-ra gyakorolt hatásához, a nélkül, hogy a *C* test jelenlétele a *B*-nek az *A*-ra gyakorolt hatását megváltoztatná, vagy hogy a *B* jelenlétele módosítaná a *C*-nek az *A*-ra gyakorolt hatását. Szóval, akkor lehetséges a szétbontás, ha ezek értelmében fölvennõk, hogy bármely két test vonzza egymást, hogy kölcsönös egymásra való hatásuk beleesik egybekötõ vonalukba s hogy ez a hatás csakis kölcsönös távolságaiktól függ; röviden, *ha elfogadjuk a középponti erõk föltevését.*

Tudjuk, hogy az égi testek tömegének a meghatározására egészen más elvet használunk. A nehézkedés törvénye arra tanít bennünket, hogy két test egymásra gyakorolt kölcsönös vonzása, tömegükkel arányos; ha *r* a távolságuk, *m* és *m'* a tömegük, *k* pedig állandót jelent, vonzásuk kifejezése:

$$\frac{kmm'}{r^2}$$

Itt tehát nem a tömeget, az erõnek a gyorsuláshoz való hányadosát mérjük, hanem a *vonzó* tömeget, ez nem a test tehetetlensége, hanem vonzó képessége.

Közvetett eljárás ez, melynek a használata elméletileg tulajdonképpen nem nélkülözhetetlen. Könnyen lehetséges volna ugyanis az, hogy a vonzás a távolság négyzetével fordítva arányos, a nélkül, hogy a tömegek szorzatával arányos lenne, azaz, hogy ez egyenlõ lenne az

$$\frac{f}{r^2}$$

kifejezéssel, anélkül, hogy az

$$f = kmm'$$

vonatkozás fennállana.

Még ez esetben is az égi testek tömegét meg lehetne mérni ezen testek viszonylagos mozgásának megfigyelése révén.

De vajjon van-e jogunk elfogadni a középponti erõk föltevését? Vajjon szigorúan igaz-e ez a föltevés? Bizonyos-e az, hogy a tapasztalat soha sem fogja megczáfolni? Ki merné ezt állítani? Pedig, ha netán el kellene hagynunk ezt a föltévést, az egész oly sok munkával emelt épület összeomlana.

Nem volna jogunk többé ahhoz, hogy az *A* gyorsulás amaz összetevõjérõl beszéljünk, a mely *B* erõhatásának a következménye. Nincs semmi módszerünk, melylyel ez összetevõt a *C* vagy valamely más test hatásától megkülönböztessük: A tömegek mérésére szolgáló szabály alkalmazhatósága megszûnik. Mi marad eszerint a hatás és visszahatás egyenlõségének elvébõl?

Ha a középponti erõk föltevését elvetjük, akkor ez az elv mindenesetre ilyenformán fejezhetõ ki: Ha valamely rendszer semmiféle külsõ hatásnak nincsen alávetve, akkor e rendszer különbözõ testeire mûködõ összes erõk geométriai eredõje zérussal egyenlõ. Vagy más szóval: *E rendszer tömegközéppontjának mozgása egyenletes és egyenes vonalú.*

Azt gondolnók, ime ez a módja a tömeg meghatározásának. Világos, hogy a tömegközéppont helyzete a tömegeknek tulajdonított értékektõl függ; ezeket az értékeket úgy kell elosztani, hogy a tömegközéppont mozgása egyenes vonalú és egyenletes legyen. Ez mindig lehetséges, még pedig csak egyféleképpen: ha *Newton* harmadik törvénye igaz.

Csakhogy minden külsõ hatástól elszigetelt rendszer nem létezik; a világegyetem minden része többé-kevésbbé alá van vetve az összes többi részek hatásainak. A *tömegközéppont* mozgásának a törvénye szigorúan csak akkor igaz, ha az egész világegyetemre alkalmazzuk.

Hogy azonban a tömegek értékeit ezen az alapon kiszámíthassuk, szükséges volna a világegyetem súlypontjának a mozgását megfigyelni. Ennek a követelménynek képtelensége mindig nyilvánvaló. Nem ismerünk mást, mint viszonylagos mozgást és a világegyetem súlypontjának mozgása örökre rejtély marad elõttünk.

Nem értünk eszerint semmit sem el és törekvéseink meddõk maradtak. Kénytelenek vagyunk ezért a következõ meghatározással megelégedni, a mi nem más, mint a saját tehetetlenségünk beismerése: *a tömegek a számításokban a kényelem céljából bevezetett együtthatók.*

Ha minden tömegnek a szokásostól eltérõ értéket tulajdonítnánk, akár az egész mechánikát újra megalkothatnók. Ez az új mechánika nem állana ellenmondásban sem a tapasztalattal, sem a dinámika általános elveivel (ezek: a tehetetlenség elve; az erõknek a tömegekkel és gyorsulásokkal való arányossága; a hatás és visszahatás egyenlõsége, a súlypont egyenesvonalú és egyenletes mozgása, a területek elve).

Csakhogy ezen új mechánika egyenletei kevésbbé egyszerûek volnának. Értsük meg jól: kifejezéseiknek csak az elsõ tagjai volnának kevésbbé egyszerûek, ugyanis azok melyeket tapasztalati úton már felismertünk; meglehet, hogy a tömegeket kis mennyiségekkel módosítani lehetne, a nélkül, hogy a teljes egyenletek egyszerûségükben veszítenének vagy nyernének.

Hertz[12] vetette fel a kérdést: vajjon a mechánika alaptörvényei szigorúan véve igazak-e? „A legtöbb fizikus megfoghatatlannak véli, úgymond, hogy akár a legmesszebbmenõ tapasztalat is a mechánika rendíthetetlen tételein változtatni tudna; és mégis: az, a mihez tapasztalati úton jutottunk, az tapasztalati úton mindig javítható."

Azok után, a miket az imént mondottunk, az ilyen aggodalmak fölöslegeseknek fognak látszani. A dinámika elvei kezdetben kísérleti igazságoknak tûnnek fel; de azért kénytelenek vagyunk ezen elveket fogalmi meghatározásokként kezelni. Az erõ, *meghatározása alapján* egyenlõ és a tömeg a gyorsulás szorzatával. Olyan elv ez, mely a jövõben minden késõbbi tapasztalat hatáskörén kívül áll; fogalmi meghatározás alapján érvényes az is, hogy a hatás a visszahatással egyenlõ.

Mondhatnók azonban, hogy e nem igazolható elvek ilyenformán minden jelentés nélkül valók; tapasztalati úton meg nem czáfolhatók, de másrészt semmi hasznosra nem taníthatnának meg bennünket; eszerint mire jó akkor a dinámika tanulmányozása?

Ez a túlgyors ítélkezés igazságtalan lenne. A természetben nem létezhetik *teljesen* elszigetelt rendszer, mely minden más külsõ hatástól meg van védve; de vannak majdnem elszigetelt rendszerek.

Ha egy ilyen rendszert szemügyre veszünk, nemcsak különbözõ részeinek egymásra vonatkozó viszonylagos mozgását tanulmányozhatjuk, hanem megfigyelhetjük még tömegközéppontjának mozgását is a világegyetem többi részeihez képest. Megállapíthatjuk e szerint, hogy a tömegközéppont mozgása majdnem egyenletes és egyenes irányú, *Newton* harmadik törvényének megfelelõen.

Ez kísérleti igazság, mely azonban tapasztalati úton nem bizonyítható be: mert vajjon a szabatosabb kísérlet mire taníthatna meg bennünket? Arra, hogy a törvény csak közelítõleg igaz, de azt meg amúgy is tudjuk már.

Mindezekbõl kiviláglik, hogyan szolgálhatott e tapasztalat a mechánika elveinek alapjául *és még sem kerülhet velük soha ellenmondásba.*

Az emberi felfogású mechánika.

Mondhatnók, hogy *Kirchhoff* nem tett egyebet, mint hogy a mathematikusok körében általánosan elterjedt nominálizmus iránt való hajlamának engedett.

A fizikában való ügyessége nem óvta õt meg ettõl. Súlyt fektetett arra, hogy legyen az erõnek egy fogalmi meghatározása és erre a czélra kiválasztotta magának a legelsõ fogalmazást, mely eszébe jutott. Az erõ meghatározására azonban nincs szükségünk: az erõ eszméje eredeti, másra vissza nem vezethetõ és meg nem határozható fogalom, mindnyájan tudjuk, hogy mi az erõ, közvetetlen szemléletünk van róla. Az erõnek ez a közvetlen szemléleti felfogása az erõlködés fogalmából származik, melyet már gyermekkorunk óta megszoktunk.

De mindenekelõtt ez a közvetlen szemlélet, még ha az erõ igazi szemléletét ismertette is meg velünk, elégtelen lenne a mechánika megalapítására; tehát teljesen hasznavehetetlen lenne. Nem fontos azt tudni, hogy micsoda az erõ, hanem azt, hogy miként kell az erõt mérni.

Mindaz, a mi nem az erõ mérésére tanít meg bennünket, éppen oly hasznavehetetlen a mechánikával foglalkozó tudósnak, mint például a hideg és a meleg alanyi fogalma annak a fizikusnak, a ki a hõt tanulmányozza. Ez az alanyi fogalom nem fejezhetõ ki számokban és így semmire sem használható. Az a tudós, kinek a bõre egészen rossz hõvezetõ lenne és a ki következésképpen sohasem tapasztalta volna sem a meleg, sem a hideg érzetét, éppen olyan jól leolvashatná a hõmérõt, mint más valaki és ez neki elég volna a hõ egész elméletének megalkotására.

Eszerint az erõlködésnek ez a közvetlen fogalma nem képesít bennünket az erõ mérésére; világos például az, hogy ha én emelek fel egy ötven kilogrammos súlydarabot, nagyobb fáradságot fogok érezni, mint az az ember, ki a teherhordáshoz hozzászokott.

De még többet mondhatunk: az erõnek ez a fogalma nem ismerteti meg velünk az erõ valódi természetét; végeredményben ugyanis az izomérzetek emlékezésére vezethetõ vissza, pedig azt aligha fogjuk állítani, hogy ilyen izomérzetei a napnak is vannak, miközben a földet vonzza.

Végeredményben tehát ez is csak jelkép, kevésbbé pontos és kevésbbé kényelmes mint a nyilak jelzése, melyet a mathematikus az erõk elõtüntetésére használ, de mely jelzés éppen annyira távol áll a valóságtól.

A mechánika keletkezésénél, az ember természetéhez való hozzászabás igen nagy történeti szerepet játszott; meglehet, hogy valaha még szolgáltathat néhány oly jelképet, melyet némely elme kényelmesnek fog találni; de nem alapíthat semmi olyat, a minek valóban tudományos jellege, vagy filozófiai jelentõsége lenne.

A „fonál" iskolája.

Andrade a „Leçons de mécanique physique" czímû munkájában felújította az emberi felfogású mechánikát. A mechánika azon iskolájának, melyhez *Kirchhoff* is tartozott, szembeállít egy másikat, melyet elég sajátszerû módon a „fonál" iskolájának nevez.

Ez az iskola mindent „elhanyagolható tömegû anyagi rendszerekre törekszik visszavezetni, melyek feszültségi állapotban vannak és képesek jelentékeny erõket távollevõ testekre átvinni; ezek oly rendszerek, melyek eszményi mintája a *fonál"*.

Oly fonál, a mely bármily erõt visz át, ezen erõ hatása alatt kissé megnyúlik; a fonál iránya megismerteti velünk az erõ irányát, nagyságát pedig a fonál megnyúlása méri.

Eszerint a következõ kisérletet tervezhetjük: Az *A* test valamely fonálhoz van fûzve; a fonál másik végére valamely tetszésszerinti erõ hat, amelyet addig változtatunk, míg a fonál bizonyos á megnyúlásra tesz szert és feljegyezzük az *A* test gyorsulását. Most leakasztjuk az *A* testet és helyébe a *B*-t fûzzük ugyanazon fonálhoz és ezen erõvel, vagy egy másikkal ismét hatást gyakorolunk, addig változtatva a hatóerõt, míg a fonál ismét á megnyúlást veszi fel; most feljegyezzük a *B* test gyorsulását. Ezután újra kezdjük a kisérletet úgy az *A*testtel mint a *B*-vel, de úgy, hogy a fonál megnyulása most â legyen. Az így megfigyelt négygyorsulásnak egymással arányosaknak kell lennie. Ilyen módon a fennebb kifejezett gyorsulási törvénynek kisérleti igazolását adtuk.

Vagy pedig valamely testet több azonos, egyenlõen feszített fonál hatásának vetünk alá és kisérleti úton keressük azt, hogy milyen irányításban kell mindazon fonalaknak elhelyezve lenniök, hogy a hozzájuk fûzött test egyensúlyban maradjon meg. Ilyen módon az erõk összetevése szabályának kisérleti igazolásához jutunk.

De vajjon végeredményben mit tettünk? Meghatároztuk az erõt, a melynek a fonál alá van vetve amaz alakváltozással; ez a fogalmi meghatározás eléggé észszerû; felvettük azután, hogy ha valamely test e fonálhoz van erõsítve, akkor az az erõ, melyet a fonál hozzá átvisz, egyenlõ azzal a hatással, melyet ez a test erre a fonálra gyakorol: végeredményben a hatás és visszahatás elvét használtuk fel, nem mint kisérleti igazságot, hanem mint magának az erõnek a meghatározását.

Ez a meghatározás már éppen olyan megállapodásszerû, mint *a Kirchhoff*-féle, de sokkal kevésbbé általános.

Nem minden erõ közvetíthetõ fonál útján. (Ezenkívül az összes erõket azonos fonalakon kellene átvinni, hogy egymással összehasonlíthatók legyenek.) Még ha azt is tennõk fel, hogy a Földet a Naphoz valamely láthatatlan fonál fûzi, abban mindnyájan egyetértünk, hogy e fonál megnyúlásának mérésére semmi módszerünk nincs.

Következésképpen meghatározásunk tíz közül kilencz esetben felmondja a szolgálatot; semmiféle faját az értelemnek nem tulajdoníthatnánk neki s így vissza kell térnünk *a Kirchhoff*-féle meghatározáshoz.

Miért járjunk eszerint ilyen kerülõ úton? Minek vegyük fel az erõ olyan meghatározását, melynek csak egyes esetekben van értelme. Ezen esetekben kísérleti úton beigazoljuk, hogy ez a meghatározás a gyorsulás törvényéhez vezet. E kísérlet által feljogosítva, azután a gyorsulás törvényét az összes többi esetekben az erõ meghatározásának tekintjük.

Vajjon nem lenne-e egyszerûbb dolog a gyorsulás törvényét az összes esetekben fogalmi meghatározásnak tekinteni s a kérdéses kísérletet nem ezen törvény, hanem a visszahatás elve igazolásaként felfogni, vagy pedig annak kimutatására felhasználni, hogy valamely rugalmas test alakváltozásai csakis azoktól az erõktõl függenek, melyeknek alá van vetve.

E mellett tekintet nélkül voltunk arra, hogy a feltételek, melyek között a fonalas iskola meghatározása elfogadható, mindig csak tökéletlenül teljesülhetnek, hogy tömegnélküli fonál nem létezhetik és még az sem lehetséges, hogy a fonál minden más erõtõl el legyen szigetelve és csak a két végén hozzáfûzött két test hatása alatt álljon.

De azért *Andrade* eszméi mégis rendkívül érdekesek; ha a logikai követelményeinknek nem is tesznek eleget, legalább jobban megértetik velünk a mechánikai alapfogalmaknak történeti fejlõdését. Azok a gondolatok, melyeket ezen eszmék bennünk ébresztenek, mutatják, hogy az emberi ész hogyan emelkedett az eredeti emberi felfogás együgyû tanaiból a mai tudomány fogalomalkotásaihoz.

A kiindulási pontban egyes esetekre érvényes és egészében elég nyers tapasztalatot látunk; mai ismereteinkben pedig egy egészen általános érvényességû, teljesen szabatos törvényt, melyet feltétlenül biztosnak tekintünk. Ezen bizonyossággal tulajdonképpen mi ruháztuk fel, úgyszólván önként, azáltal, hogy megállapodásnak tekintettük. A gyorsulás törvénye, az erõk összetevésének szabálya, tehát éppen csak ilyen önkényes megállapodások? Megállapodások: igenis de nem tetszés szerintiek. Ilyenek volnának, ha szem elõl tévesztenõk azokat a kísérleteket, melyek a tudomány megalapítóit ezen elvek elfogadására késztették és a melyek akármilyen tökéletlenek is, igazolásukra elégségesek. Igen helyesen cselekszünk, ha figyelmünket idõnként ezen megállapodások kísérleti eredetére irányítjuk.

---

*Hazánkban is már évtizedek óta vannak képviselõi a mechánika kisérleti alapon való tanításának és irodalmának. ***R.***

HETEDIK FEJEZET

A relatív és az abszolut mozgásról.

A viszonylagos mozgás elve.

Több ízben megkísérelték már a gyorsulás törvényét valamely általánosabb elvvel kapcsolatba hozni. Bármely rendszer mozgásának ugyanazon törvényt kell követnie, akár mozdulatlan koordináta-tengelyekre vonatkoztatjuk, akár oly tengelyekre, melyek egyenes irányú és egyenletes mozgást végeznek. Ez a viszonylagos mozgás elve, mely két okból is önkéntelenül tolúl elõtérbe. Elõször, mert az egyszerû tapasztalás is megerõsíti, másrészt, mert az ellenkezõ föltevés határozottan ellenkezne elménkkel.

Fogadjuk ezért el ez elvet és vegyünk szemügyre valamely erõ hatása alatt álló testet; e test viszonylagos mozgása, vonatkoztatva az oly szemlélõre, kinek egyenletes sebessége egyenlõ a test kezdõ sebességével, éppen úgy folyik le, mint e test abszolut mozgása, ha ez nyugalmi helyzetébõl indulna ki. Ebbõl azt következtették, hogy a test gyorsulása nem függhet az abszolut sebességtõl, sõt ezen az alapon meg is kísérelték a gyorsulás teljes törvényének a kimutatását.

Ilyenféle bizonyítás nyomait hosszú idõn át még az érettségi vizsgálatok feladványai között is láthattunk. Természetes, hogy e törekvések meddõk. Az akadály, mely a gyorsulási törvény levezetésénél felmerül, abban áll, hogy az erõ fogalmát nem tudjuk kellõképpen meghatározni. Ám e nehézség meg is marad mindvégig, mert a segítségül vett elv éppen nem szolgáltatta a hiányzó meghatározást.

A viszonylagos mozgás elve azért nem kevésbé érdekes és megérdemli, hogy önmagáért tanulmányozzuk. Elõbb azonban kísértsük meg ez elvet kissé szabatosabb alakban kifejezni.

Fenntebb mondottuk, hogy oly különbözõ testek gyorsulásai, melyek valamely közös rendszer tagjai, csakis viszonylagos sebességüktõl és helyzetüktõl függenek, nem pedig abszolut sebességeiktõl és abszolut helyzeteiktõl, feltéve, hogy a mozgó tengelyek, melyekre a viszonylagos mozgás vonatkozik, egyenes irányban és egyenletesen mozognak tova a térben. Vagy, ha így jobban tetszik, az imént felvett testek gyorsulásai csakis sebességeik különbségétõl és koordinátáik különbségétõl függenek, nem pedig ezen sebességek és koordináták abszolut értékétõl.

Ha ez az elv érvényes a viszonylagos gyorsulásokra, vagy mondjuk a gyorsulások különbségére is, akkor a hatás-visszahatás elvével egyesítve belõle azt következtethetjük, hogy az abszolut gyorsulásokra is érvényes.

Meg kell azonban mutatnunk még, mikép bizonyítható be, hogy a gyorsulások különbségei csakis a sebességek különbségeitõl és a koordináták különbségeitõl függenek? Vagy mathematikai nyelven szólva: azt, hogy a koordináták ezen különbségei másodrendû differencziális egyenleteknek tesznek eleget.

Vajjon levezethetõ-e ezen bizonyítás kísérleti úton, vagy kimutatható-e a *priori* megfontolások útján?

Visszaemlékezve arra, a miket fennebb mondottunk, az olvasó maga fogja megadni a választ.

Úgy a mint a viszonylagos mozgások elvét kimondottuk, ez igen hasonlít ahhoz a törvényhez, melyet fennebb a tehetetlenség általánosított elvének neveztem. A két elv azonban mégsem teljesen azonos, mert hiszen a most fogalmazott elvnél a koordináták különbségeirõl, de nem magukról a koordinátákról van szó. Az új elv tehát valamivel többre tanít meg bennünket, mint amaz elõbbi, de ugyanazok a fejtegetések alkalmazhatók itt is és ezek ugyanazon következtetésekhez is vezetnek; éppen ezért nem szükséges azokra újra rátérnünk.

A Newton-féle érvelés.

Nagyon fontos, egyszersmind talán kissé zavaros kérdéssel találkozunk itt. Már elõbb említettük, hogy a viszonylagos mozgás elve nemcsak a tapasztalat szüleménye és hogy bármilyen ezzel ellentett feltevés a priori ellenkeznék felfogásunkkal.

Ámde miért érvényes e törvény csak akkor, ha az elmozgó koordináta-tengelyek tovahaladása egyenletes és egyenesvonalú? Azt lehetne hinni, hogy ez az elv akkor is oly határozottan tolúlna fel elménkben, ha e mozgás változó volna, vagy legalább is akkor, ha egyenletes forgásból állana. És mégis ezen esetekben az elv nem helyes többé.

Nem óhajtunk hosszasan foglalkozni azzal az esettel, hogy a tengelyek mozgása egyenes irányú, anélkül, hogy egyenletes lenne; az az ellenmondás, mely az elvnek ez esetekre való alkalmazásánál fellép, egy pillanatig sem állaná ki az alapos vizsgálatot. Ha vasúti kocsin ülünk s ha a vonat valamely akadályba ütközve hirtelen megáll, egyszerre az ellenkezõ oldalon lévõ ülõhelyre esünk át, bár közvetlenül semmiféle erõnek sem voltunk alávetve. Ebben azonban semmi csodálni való nincs; ha mi nem is voltunk semmi külsõ erõ hatásának alávetve, a vonat szenvedett külsõ rázkódást. Abban, hogy két test viszonylagos mozgása azonnal zavarást szenved, mihelyt az egyik test mozgását valamely külsõ ok megváltoztatja, semmi ellenmondás nincs. Hosszabb ideig fogunk azonban annál az esetnél idõzni, hol a viszonylagos mozgás oly tengelyekre vonatkozik, melyek egyenletesen forognak. Ha az eget folytonosan fellegek borítanák, ha nem volna módunkban a csillagok megfigyelése, mégis képesek volnánk arra következtetni, hogy a Föld forog. Tudomást szereznénk a forgásról a Föld alakjának lapultsága révén, vagy akár a *Foucault*-féle ingakísérlet útján.

És mégis, volna-e értelme ezen esetben annak az állításnak, hogy a Föld forog? Ha nem létezik abszolut tér, lehet-e forogni anélkül, hogy valami tárgyhoz képest történnék e forgás? És másrészt hogyan fogadhatjuk el *Newton* következtetését, hogyan hihetünk az abszolut térben?

Nem elég azonban annak a megállapítása, hogy valamennyi lehetséges megoldás egyaránt idegenszerû; meg kell vizsgálnunk e megoldások mindegyikét, hogy reájöjjünk idegenkedésünk okaira, a végbõl, hogy az okokat ismerve választhassuk a megoldást. Az e fölötti hosszas megfontolásokért, melyek itt következnek, kérjük tehát az olvasó elnézését.

Idézzük fel ismét az elõbbi képzelt világot. Sûrû fellegek takarják el a csillagokat az ember szemei elõl, a ki így nem veheti õket észre és még létezésükrõl sem tud. Hogyan fogják megtudni ezek az emberek, hogy a Föld forog? Bizonyos, hogy a Földet szilárdnak és mozdulatlannak tekintenék, még inkább, mint elõdeink. Bizonyára hosszabb ideig várnának egy *Kopernikusz*megszületésére. Végre a *Kopernikusz*[13] mégis csak megszületnék.

E képzelt világ mechánikusai kezdetben nem ütköznének egy abszolut ellenmondásba sem. A viszonylagos mozgás elméletében, eltekintve a valódi erõktõl, két képzelt erõt vesznek tekintetbe. Az egyik a közönséges, a másik az ellentett középpontfutó erõ. A mi képzelt világunk tudósai tehát mindent megmagyarázhatnak akként, hogy e két erõnek valóságos létet tulajdonítanak; nem fognak ebben semmi olyat látni, a mi a tehetetlenség általános elvével ellenmondásban lenne, mivel ez erõk egyike függ, mint a valóságos vonzás esetén, a rendszer különbözõ részeinek egymáshoz való viszonylagos helyzetétõl, a másik e részek relativ sebességeitõl függ, mint a valóságos surlódási erõk.

Ezalatt azonban sok nehézség hamarosan fel fogja hívni figyelmüket. Ha sikerülne nekik elszigetelt rendszert alkotni, ennek tömegközéppontja nem írna le közelítõleg egyenes vonalú pályát.

Hogy e tényt megmagyarázhassák, a középpontfutó erõket hívhatnák segítségül, melyeket valóságosaknak tekintenének és melyeket õk kétségkívül a testek kölcsönös hatásának tulajdonítanának. Csakhogy õk nem észlelhették volna ezen erõknek fokonkénti fogyását a távolság növekedésével, azaz ebben a mértékben, a mint a rendszer elszigetelése jobban és jobban megvalósítható; sõt ellenkezõleg: hiszen a középpontfutó erõ a távolsággal egészen a végtelenségig nõ.

Ezt a nehézséget bizonyára már elég jelentékenynek találnák; de nem akadnának fenn rajta hosszabb ideig. Elképzelnének csakhamar valamely nagyon finom közeget, a mi étherünk mintájára, melyben az összes testek úsznak s a mely a testekre taszító hatást gyakorolna.

Ám újabb nehézségek mutatkoznának. A tér részarányos és a mozgás törvényei még sem mutatnának részarányosságot: különbséget kellene tenniök a jobb és a bal oldal között. Látni lehetne például, hogy a forgószelek mindig ugyanazon irányba forognak; pedig a részarányosságnál fogva hol az egyik, hol a másik irányban kellene forogniok. Ha tudósaiknak sikerülne munkájukkal világegyetemüket tökéletesen részarányosnak elképzelni, akkor e részarányosság nem állhatna fenn, jóllehet semmi szembeötlõ érv nem szól amellett, hogy e részarányosság valamelyik oldalon zavart szenvedjen.

Mindenesetre tudnának magukon segíteni. Kitalálnának valamit, a mi talán nem különösebb, mint *Ptolemajosz* üveggömbjei; és így a nehézségek felhalmozódtak volna addig, míg a várva-várt *Kopernikusz* egy csapásra el nem söpörte volna mindezeket, mondván: De hiszen sokkal egyszerûbb felvenni, hogy a Föld forog!

És éppen úgy, mint a hogy a mi *Kopernikusz*unk nekünk mondta: Kényelmesebb azt feltenni, hogy a Föld forog, mert ezáltal a csillagászati igazságok egyszerûbb nyelven fejezhetõk ki, úgy ama *Kopernikusz* is így szólna: Sokkal egyszerûbb azt feltenni, hogy a Föld forog, mert ezáltal a mechánika törvényei sokkal egyszerûbb nyelven fejezhetõk ki.

De ez nem akadály arra nézve, hogy az abszolut térnek, annak a segédeszköznek, melyre a Földet vonatkoztatnunk kell, hogy megállapíthassuk, vajjon tényleg forog-e, semmiféle tárgyi létezést ne tulajdonítsunk. Azért amaz állításnak: "a Föld forog", egyáltalában semmiféle értelme nincs, mert tapasztalati úton semmiképpen sem igazolható. Az ily kísérlet nemcsak hogy keresztül nem vihetõ, de még a legmerészebb *Verne Gyula* sem álmodhatná meg; sõt ily kísérlet ellenmondás nélkül el sem képzelhetõ. Eszerint e két mondat: "a Föld forog" és: "Kényelmesebb azt feltételezni, hogy a Föld forog" egy és ugyanazon értelmû. Egyik sem mond többet, mint a másik.

Meglehet azonban, hogy ezzel az eredménynyel még nem érnénk be, sõt megütköznénk rajta, hogy az összes föltevések vagy inkább megállapodások között, melyeket a jelenség magyarázatára felvehetünk, az egyik kényelmesebbnek látszik, mint a többi.

Másrészt azonban, ha akkor, mikor a csillagászati törvényekrõl volt szó, ez nem okozott aggodalmat, miért idegenkednénk tõle a mechánikában?

Láttuk, hogy a testek koordinátáit másodrendû differencziális egyenletek határozták meg és hogy ugyanez áll e koordináták különbségeire nézve is. Ezt neveztük a tehetetlenség általánosított elvének és a viszonylagos mozgás elvének. Ha e testek egymástól való távolsága szintén másodrendû egyenletekkel éppen úgy meg volna határozva, akkor, gondolható, hogy mindez elménket teljesen ki fogja elégíteni! Vajjon milyen fokig elégszik meg az ész az ilyen magyarázattal, s vajjon miért nem éri be vele?

Hogy a dolgot tisztázzuk, jobb lesz valamely egyszerû példát alapul venni. Vegyünk fel valamely, mai rendszerünkhöz hasonló rendszert, de olyat, a honnan az ezen Naprendszerhez nem tartozó állócsillagokat észrevenni nem lehet és a hol a csillagászok csak a Nap és a bolygók egymástól való kölcsönös távolságát észlelnék anélkül, hogy abszolut csillagászati hosszúságaikról fogalmat szerezhetnének. Ha most közvetlenül a *Newton*-féle elvbõl vezetjük le azokat a differencziális egyenleteket, melyek e távolságok vátlozásait meghatározzák: ezen egyenletek nem lesznek másodrendûek. Ezzel azt akarjuk mondani, hogy ha a *Newton*-féle törvényen kívül a távolságok kezdeti értékeit és az idõ szerint képezett differencziálhányadosait ismernõk, az még nem volna elgendõ arra, hogy ugyanezen távolságokat valamely késõbbi idõpontra nézve meghatározhassuk. Hiányoznék ehhez még egy adat; ez lehetne esetleg az, melyet a csillagászok a területek elve állandójának hívnak[14].

Itt azonban két különbözõ álláspontra helyezkedhetünk: az állandók két faját különböztethetjük meg. A fizikus szemében a világ a jelenségek oly sorozatából áll, a mely jelenségek mindannyian kizárólagosan a kezdeti állapottól, meg attól függenek, mily törvények kapcsolják össze a következõ jelenségeket a megelõzõkkel. Ha tehát a megfigyelés arra tanít bennünket, hogy egy bizonyos mennyiség "állandó", akkor kétféle felfogásmód között választhatunk.

Vagy elfogadjuk azt, hogy létezik oly törvény, mely azt kívánja, hogy ez a mennyiség ne változhassék; a mely azonban csak véletlenül jutott hozzá, hogy az évszázadok kezdetétõl fogva ekkora mennyiség legyen, hogy így tehát tisztán véletlenség, hogy inkább ezt, mint más értéket vett fel, melyet ezóta kénytelen megtartani. Ezt a mennyiséget eszerint *esetleges* állandónak nevezhetnõk.

Ezzel szemben felvethetnõk azt, hogy létezik oly természet-törvény, mely eme mennyiségre reákényszeríti éppen ezt az értéket és nem mást. Az ily mennyiséget *"lényeges állandó"*-nak nevezhetjük.

Például: Newton törvénye értelmében a Föld tengely közüli forgásának tartama állandó. Hogy azonban e tartam éppen 366 csillagnap és még valami és nem 300 vagy éppen 400 nap: ez valamely elõttünk teljesen ismeretlen véletlennek a következménye. A forgás tartama eszerint úgynevezett esetleges állandó. Ha azonban a távolság azon hatványa, mely az általános vonzási törvény kifejezésében elõfordul, -2-vel egyenlõ és nem -3-al: akkor ez már semmi szín alatt sem véletlen, hanem azért van így, mert a Newton-féle törvény így kívánja. Ez lenne tehát a *lényeges állandó.*

Nem tudjuk, vajjon helyénvaló-e a véletlennek ily értelemben a jelenségeknél szerepet tulajdonítani; és hogy vajjon az így megállapított megkülönböztetés nem mesterkélt-e; az mindenesetre bizonyos, hogy mindaddig, míg a természetnek titkai lesznek, e megkülönböztetés azon értelemben a hogyan használtuk, felette önkényes, sõt mindig kényes.

A területek elve állandóját, rendszerint esetlegesnek tekintjük. Bizonyosak vagyunk-e a felõl, hogy a mi képzelt világunk csillagászai is ilyennek tekintenék? Ha módjukban lett volna két különbözõ naprendszert egymással összehasonlítani, akkor okvetlenül felmerült volna az a gondolatuk, hogy ezen állandónak különbözõ értékei lehetnek. Azonban mindjárt kezdetben azt tettük fel, hogy az õ rendszerük elõttük teljesen elszigeteltnek tûnnék fel és hogy õk semmi oly csillagot nem figyelhetnének meg, a mely rendszerükhöz nem tartozik. Eme feltételek mellett csakis egyetlen állandót vehettek volna észre, a melynek egyetlen értéke feltétlenül változatlannak látszanék; ez kétségtelenül végre oda juttatta volna õket, hogy ez állandót lényegesnek tekintsék.

Egyúttal még néhány szót, hogy egy ellenvetésnek elejét vegyük. E képzelt világ lakói a terület-állandót sem megfigyelni, sem fogalmilag meghatározni nem tudták volna oly értelemben, a hogyan mi ma teszszük, mert ehhez hiányzott volna neki a csillagok abszolut hosszúságának ismerete. Ez azonban nem akadályozta volna meg õket abban, hogy csakhamar észre ne vegyenek egy meghatározott állandót, mely egyenleteikbe természetszerûleg bevezetõdik; és ez az állandó nem más mint az, a mit a terület-állandón értünk.

És most lássuk, mi következik mindebbõl: Ha a területi állandót lényeges állandónak tekintjük, azaz olyannak, mely a természet egyik törvényétõl függ, akkor ahhoz, hogy a bolygóknak tetszés szerinti idõpontban a Földtõl való távolságát kiszámíthassuk, elegendõ ha e távolságok kezdeti értékeit, meg e távolságok elsõ differencziálhányadosának kezdõ értékeit ismerjük. Ez új nézõpontunkból azután e távolságok ismét másodrendû differencziális egyenleteknek hódolnak.

Vajjon mindezzel csillagászaink felfogása teljesen ki volna-e elégítve? Nem igen hiszszük. Elõször is azért, mert ezen egyenleteket oly czélból differencziálva, hogy rendjüket emeljék, csakhamar rájönnének, hogy azok egyszerûbbekké válnak. Mindenekfölött megütköztek volna azonban azokon a nehézségeken, melyek a már fennebb említett részarányossági viszonyokból származnak. A szerint, a mint a bolygók összessége bizonyos sokszög alakját mutatja, vagy a mint szabályos sokcsúcsú idom-alakban helyezkednek el, különbözõ törvényeket kellene nekik elfogadniok; és ezen következtetés elõl szükségképpen nem térhettek volna ki, csak azon esetben, ha a területi állandót esetleges állandónak tekintik.

Azért választottuk ki ezen eléggé különös példát, mert oly csillagászokat vettünk fel, a kik földi mechánikával egyáltalában nem foglalkoznának és megfigyeléseik tere kizárólag a Naprendszerre szorítkoznék; mindazonáltal következtetéseink bármely esetre alkalmazhatók. A mi világegyetemünk kiterjedtebb, mint az övék, mert vannak álló csillagaink; de azért a mi világegyetemünk is határolt; s azért a mi okoskodásunk a mi világegyetemünkrõl ugyanolyan lehet, mint ezen képzelt csillagászok okoskodása a saját világegyetemükrõl.

Mindezek alapján végre is arra a következtetésre jutunk, hogy azok az egyenletek, melyek a távolságokat meghatározzák, másodiknál magasabb rendûek. Miért ütköznénk meg ezen? S miért találjuk azt teljesen természetesnek, hogy a jelenségek egymásra következése a távolság elsõ differencziálhányadosainak a kezdeti értékeitõl függ; ellenben vonakodunk attól, hogy elfogadjuk azt, hogy a második differencziálhányadosok kezdõ értékétõl is függhet?

Ez csak azon megszokásnál fogva lehetséges, a mely bennünk a tehetetlenség általánosított elvének és folyományainak folytonos tanulmányozása következtében kifejlõdött.

Valamely tetszésszerinti idõpillanatban a távolságok értéke ezeknek kezdeti értékeitõl, meg elsõ differencziálhányadosai kezdeti értékeitõl függ és még más valamitõl. Mi ez a *más valami?*

Ha nem akarjuk egyszerûen azt elfogadni, hogy e valami a második differencziálhányadosok egyike legyen, akkor nem marad más hátra, mint választás a föltevések közül. A mathematikus elõtt kényelmes megoldás lehet, sõt bizonyára valóban a legkényelmesebb azt feltételezni, mint a hogy különben rendesen teszik is, hogy ez a más valami a világegyetem abszolut irányítása a térben, vagy az a gyorsaság, melylyel ezen irányítás változik. Ez azonban a filozófusra nézve nem a legkielégítõbb, mert ilyen abszolut irányítás a térben nem létezik.

Felvehetjük azt is, hogy ez a más valami valamely láthatatlan testnek a helyzete, vagy a sebessége; ezt a föltevést néhányan elfogadták, sõt el is nevezték ama testet "alfa" testnek, jóllehet a mi emberi rendeltetésünk szerint e testrõl nevén kívül soha sem tudhatunk meg mást.

Ez a mesterséges fogás egészen hasonló ahhoz, melyrõl azon fejezet végén szóltam, mely a tehetetlenség elve fölötti meggondolásainknak volt szentelve.

De végeredményében e nehézség csak mesterséges. Ha mûszereinknek a jövõben végezendõ leolvasásai nem függhetnének mástól, mint a mely leolvasásokat elõbb szolgáltattak, vagy a melyeket régebben szolgáltathattak volna, akkor ez nekünk elegendõ. Ámde e tekintetben nyugodtak lehetünk.

NYOLCADIK FEJEZET

Az energia és a thermodinámika.

Az energetikus rendszerrõl.

A klasszikus mechánika keltette nehézségek némely elmét arra indítottak, hogy egy más, új rendszert részesítsenek elõnyben, melyet energetikus rendszernek neveznek.

Az energetikus rendszer az energia megmaradása elvének felismerése következtében született meg. *Helmholtz* öntötte végleges alakjába[15].

Mindenek elõtt két mennyiséget határozunk meg, a melyeknek ezen elméletben igen fontos szerep jut. Ezek egyike a *mozgási* (kinetikai) *energia* vagy *eleven erõ*, másika a *helyzeti* (potencziális) *energia.*

Valamennyi változás, melynek a természetben valamely test alávetve lehet, a következõ két tapasztalati törvénynek hódol:

1. A mozgási és a helyzeti energia összege állandó; ez az energia megmaradásának elve.

2. Ha valamely testrendszer a t_0 idõpillanatban az *A* helyzetben van és a t_1 idõben a *B* helyzetbe kerül, akkor az elsõ helyzetbõl a második helyzetbe mindig olyan úton jut, hogy a kétféle energia különbségének középértéke azon idõközben, mely a t_0 és t_1 idõpontokat egymástól elválasztja, a lehetõ legkisebb legyen.

Ez a *Hamilton*-féle elv, mely egyúttal egyike azon alakoknak, melyekkel a legkisebb mûködés (actio) elvét kifejezhetjük.

Az energetikai elméletnek a klasszikus elmélet fölött a következõ elõnyei vannak:

1. Nem annyira tökéletlen; azaz az energia megmaradásának elve és a *Hamilton*-féle elv sokkal többre tanít, mint a klasszikus elmélet alapelvei; e mellett kizár bizonyos mozgásjelenségeket, melyeket a természet nem valósít meg, de a melyek egyébként a klasszikus elmélettel jól összeférnének.

2. Fölöslegessé teszi azt a föltevést, hogy léteznek atomok, a mely tételt a klasszikus elméletben majdnem lehetetlen elkerülni.

A maga részérõl azonban ezen elmélet újabb nehézségeket kelt.

Az energia két fajának fogalmi meghatározása alig tekinthetõ könnyebbnek, mint az elõbbi rendszernél az erõ és az anyag fogalmi meghatározása. Mindazonáltal az energetikai elméletben, legalább az egyszerûbb jelenségeknél, könnyebben segíthetünk magunkon.

Vegyünk fel valamely elszigetelt, határozott számú anyagi pontból álló rendszert. Tegyük fel, hogy ezek a pontok oly erõknek vannak alávetve, melyek csak viszonylagos helyzetüktõl, kölcsönös egymástól való távolságaiktól függenek, ellenben sebességeiktõl függetlenek. Ezen esetben az energia megmaradásának elve szerint itt valamilyen erõfüggvénynek kellene léteznie.

Ebben az egyszerû esetben az energia megmaradása elvének kifejezése rendkívül egyszerû. Egy meghatározott mennyiségnek, mely kísérleti úton ellenõrizhetõ, állandónak kell maradnia. Ez a mennyiség két tagnak az összege, melyek elseje csak az anyagi pontok helyzetétõl függ, de sebességeiktõl független, a második ezen sebességek négyzetével arányos. Az energia ezen szétválasztását csakis egyetlen egyféle módon végezhetjük.

Ezen meghatározók egyikét jelöljük *U*-val és értsük alatta a helyzeti energiát; a másik a melyet *T*-vel jelölünk, legyen a mozgási energia.

Igaz, hogyha $T + U$ értéke állandó, akkor ugyanez áll a $T + U$-nak bármilyen függvényére nézve; vagy a szokásos jelöléssel:

$$\phi(T + U) = \textit{állandó}.$$

De ez a függvény $\phi(T + U)$ már nem lesz az összege két oly mennyiségnek, melyek egyike a sebességektõl független, másika pedig a sebességek négyzetével arányos. Azok között a függvények között, melyek állandók maradnak, egyetlen egy van, a mely ilyen sajátságú; s ez maga a $T + U$ (vagy $T + U$-nak valamely elsõfokú függvénye, a mi azonban nem mond semmi újat, mert ez az elsõfokú függvény a mértékegység és a kezdõhelyzet megváltoztatásával mindig visszavezethetõ a $T + U$ függvényre). Ezt a $T + U$-t fogjuk tehát energiának nevezni; még pedig az elsõ meghatározót, *U*-t, helyzetinek, a másodikat, *T*-t, mozgási energiának. Az energia eme két fajának ilyen módon való fogalmi meghatározása minden kétértelmûség nélkül keresztülvihetõ.

A tömeg meghatározásánál hasonló esettel állunk szemben. A mozgási energia, vagyis az eleven erõ a tömegekkel és az összes anyagi pontok viszonylagos sebességeivel egyszerûen kifejezhetõ, ha e sebességeket e pontok egyikére vonatkoztatjuk. E viszonylagos sebességek megfigyelhetõk és ha a mozgási energiának - ezen viszonylagos sebességek függvényeképpen való - kifejezése birtokában vagyunk, akkor ezen kifejezés együtthatói a tömegeket fogják szolgáltatni.

Ezen egyszerû esetben az alapfogalmakat ily módon nehézség nélkül lehet meghatározni. Az összetettebb esetekben e nehézségek újra elõtûnnek; ilyen eset például az, mikor az erõk nemcsak a távolságtól, hanem a sebességektõl is függenek.

Weber például felteszi, hogy két elektromos molekulának egymásra gyakorolt kölcsönös hatása nemcsak egymástól való távolságuktól, hanem még sebességeiktõl és gyorsulásaiktól is függ. Ha az anyagi pontok egymást hasonló törvények szerint vonzanák, akkor *U* a sebességtõl függhetne, sõt a sebesség négyzetével arányos tagot is tartalmazhatna.

Hogyan lehet már most ezek között a tagok között, melyek a sebesség négyzetével mindannyian arányosak, a *T*-tõl és az *U*-tól eredõket egymástól megkülönböztetni? Következésképpen hogyan lehet az energia két faját egymástól különválasztani?

De még nagyobb nehézség is fellép: Hogyan határozhatjuk meg magát az energiát? Semmi okunk sincs arra, hogy inkább fogadjuk el meghatározásként a $T + U$ mennyiséget, mint $T + U$ bármely más függvényét, ha egyszer e kifejezés azt a reá nézve lényeges jellemzõ sajátságát elvesztette, hogy két határozott szerkezetû mennyiség összege.

De még tovább mehetünk; számításba kell vennünk nemcsak a tulajdonképpeni mechánikai energiát, hanem az energia egyéb alakjait is, így a hõt, a chemiai energiát, az elektromos energiát stb. Az energia megmaradásának elvét eszerint így kellene felírnunk:

$$T + U + Q = constans,$$

a hol T a látható energiát, U a helyzeti potencziális energiát, mely csakis a testek helyzetétõl függ, Q pedig a belsõ vagy molekuláris energiát jelenti, mely hõ, chemiai vagy elektromos energia alakjában léphet fel.

Mindez helyes lenne, ha e három mennyiség egymástól teljesen szétválasztható volna; ha T arányos lenne a sebességek négyzetével, U ezen sebességektõl és a testek állapotától független lenne, míg Q végre független lenne a sebességektõl, a testek helyzetétõl és csakis a testek belsõ állapotától függene.

Az energia kifejezése akkor csak egyetlen módon lenne három ilyen természetû tagra felbontható.

Ez azonban nincs így. Vegyük fel például az elektromozott testek esetét. Az elektrosztatikai kölcsönös egymásra való hatásukból származó energia nyilvánvalóan a töltéseiktõl, azaz elektromos állapotuktól fog függeni; de függ ezen energia egyszersmind helyzetüktõl is. Ha a testek mozgásban vannak, egymásra kölcsönösen elektrodinámikus hatást fognak gyakorolni s ezen elektrodinámikus energia már nemcsak helyzetüktõl és az állapotuktól fog függeni, hanem még sebességeiktõl is.

Ezúttal tehát semmi eszközünk többé nincs arra, hogy azokat a tagokat kiválogassuk, a melyek a T, az U és a Q részeit alkotják és hogy az energia ezen három részét egymástól elválaszszuk. Ha $T + U + Q$ állandó, akkor a $T + U + Q$ bármely függvénye is ilyen természetû:

$$\phi(T + U + Q) = constans.$$

Ha $T + U + Q$-nak valóban az a határozott alakja lenne, melyet fent szemügyre vettünk, akkor abból semmi többértelmûség nem származhatnék. Azon $\phi(T + U + Q)$ függvények között, melyek állandók maradnak, csak egy volna olyan függvény, mely ilyen sajátságos alakú; és éppen ezt az egy függvényt nevezhetnõk megállapodásszerûleg energiának.

De már mondottuk, hogy ez szigorúan véve nincs így; azok között a függvények között, melyek állandók maradnak, egyetlenegy olyan sincs, mely szigorúan a fenti különös alakra volna hozható; ezek szerint hogyan válaszszuk ki közülük azt, melyet energiának akarunk nevezni? Semmi olyan támaszpontunk nincs, mely e választásnál bennünket vezethetne.

Ezek szerint az energia megmaradása elvének a kimondására csak egyetlenegy kifejezésünk marad: *valami van, a mi állandó marad.* Ám az elv ezen alakjában a tapasztaláson ismét kívül esik s a magától érthetõ azonosság bizonyos fajára zsugorodik össze, mert világos, hogy ha a világegyetemet törvények kormányozzák, akkor léteznie kell olyan mennyiségeknek, a melyek állandóak maradnak.

E szerint, éppen úgy mint a *Newton*-féle elv, az energia megmaradásának tapasztalatokra épített elve is, hasonló okoknál fogva sohasem lesz tapasztalati úton igazolható.

Ez a megfontolás azt mutatja, hogy ha a klasszikus rendszerrõl az energetikushoz megyünk át, haladást tettünk, de egyúttal azt is látjuk, hogy e haladás nem elégséges.

Még egy más ellenvetés is tehetõ, a mely még súlyosabbnak látszik. A legkisebb mûködés elve a megfordítható folyamatokra alkalmazható, de a meg nem fordítható folyamatokra való alkalmazása semmiképpen sem kielégítõ; *Helmholtz*nak ily irányú törekvése, ezen elvnek az ily fajta jelenségekre megkísérlett kiterjesztése nem sikerült és nem is sikerülhetett. Ezen a téren az egész elvégezni való munka még hátra van.

Maga a legkisebb mûködés elvének fogalmazása az észre nézve valami idegenszerût foglal magában. Ugyanis, valamely anyagi molekula, mely semmiféle erõnek nincs alávetve, hogy egyik ponttól a másikhoz eljusson, és emellett arra van kényszerítve, hogy valamely felületen mozogjon, geodéziai vonalat fog leírni, azaz a legrövidebb utat fogja megtenni.

Úgy tünik fel, mintha ez a molekula már eleve ismerné azt a pontot, melyhez átvezetni kívánjuk, sõt úgy látszik, mintha még elõre látná azt az idõt, melyet ez az odautazás igénybe fog venni a szerint, a mint ezt vagy azt az útat követi s azután kiválasztaná a neki legmegfelelõbb útat. Ennek az elvnek a kifejezése e szerint úgy tünteti fel e molekulát, mintha ez valamely élõ és szabadon cselekvõ lény volna.

Világos, hogy sokkal elõnyösebb volna ezt az elvet valami kevésbbé idegenszerû kifejezéssel helyettesíteni, a hol - mint a filozófusok mondanák - az a látszat el lenne kerülve, mintha a végokok a ható okok helyébe kerültek volna.

Thermodinámika.*

A thermodinámika mindkét alapelvének szerepe a természetfilozófia minden ágában napról-napra nagyobb fontosságúvá lesz. A negyven év elõtti molekuláris föltevésekkel terhelt nagyravágyó elméleteket feladva, ma már arra törekszünk, hogy a mathematikai, fizika egész építményét a thermodinámikára alapítsuk. *Mayer* és *Clausius*[16] két elve vajjon oly szilárd alapot biztosít-e a thermodinámikának, melyen némi ideig fennállhat? Senki sem kételkedik benne, de hogyan veszszük mi ezt a nagy bizalmat?

Egy híres fizikustól hallottam egyszer a hiba-törvényre vonatkozólag ezt a megjegyzést: "Mindenki szilárdan hisz ebben, mert a mathematikusok azt képzelik, hogy megfigyelési tény, az észlelõk pedig mathematikai tantételnek tartják." Ugyanez volt hosszú ideig az energia megmaradása elvének sorsa is. Ma azonban már nincs így; senki nem kételkedik abban, hogy kísérleti tény.

De vajjon ki ad nekünk ahhoz jogot, hogy magának az elvnek nagyobb általánosságot és nagyobb pontosságot tulajdonítsunk, mint azoknak a tapasztalatoknak, a melyek ezen elv bebizonyítására szolgálnak?

Ez ugyananyit jelent, mint azt kérdezni, vajjon szabad-e a tapasztalati adatokat általánosítani úgy, a mint azt rendszerint teszik; én részemrõl nem tartom magamat illetékesnek e kérdés fejtegetésére, miután annak a megoldásával már annyi filozófus hiába foglalkozott. Egy dolog azonban bizonyos: ha az általánosításra szolgáló ezen képességünket megvonnák tõlünk, nem létezhetnék tudomány, vagy legfeljebb csak arra szorítkoznék, hogy mintegy leltárt alkosson, mely az egyes elszigetelt tények megállapítására szolgálna; ilyen módon e tudománynak reánk nézve semmi értéke nem volna, mert a rendszer és az összhang iránti kívánalmainkat ki nem elégíthetnék és mivel ez a bekövetkezendõ jelenségeknek elõre való megállapítására képtelen volna. Minthogy azok a körülmények, a melyek között valamely jelenség beáll, egyidejûleg valószínûleg sohasem fognak megismétlõdni, már ahhoz is szükséges bizonyos legelsõfokú általánosítás, hogy elõre láthassuk, vajjon ez a jelenség még akkor is ismétlõdni fog-e, ha ama körülmények között a legcsekélyebb változás is áll be.

Ámde minden tétel végtelen sokféle módon általánosítható. Valamennyi lehetséges általánosítás közül kell azután választanunk és csak a legegyszerûbbet választhatjuk. Ez arra vezet minket, hogy úgy cselekszünk, mintha valamely egyszerû törvény egyébként azonos körülmények között valószínûbb volna, mint valamely bonyolódott törvény.

Fél század elõtt ezt mindenki nyiltan bevallotta és hirdette, hogy a természet az egyszerûséget szereti; de azóta maga a természet erre az elvre sokszor ráczáfolt.

Manapság már nem is vallják többé ezt az irányzatot, vagy legalább is csak annyiban tartják meg, a mennyiben ez föltétlenül szükséges ahhoz, hogy a tudomány ne váljék lehetetlenné.

Ha tehát a kísérleteknek aránylag kis számára támaszkodva (a melyek egymás között azért bizonyos eltéréseket mutatnak), egyszerû, szabatos és általános törvényt fogalmazunk, tulajdonképpen olyan belsõ szükségnek engedelmeskedünk, a mely elõl az emberi ész nem képes kitérni.

Azonban még ennél is többrõl van szó s azért idõzünk kissé e kérdésnél.

Senki sem kételkedik abban, hogy a *Mayer*-féle elv hivatva van túlélni az összes részleges törvényeket, melyekbõl levezették, éppen úgy, mint a hogy a *Newton*-féle törvény túlélte a *Kepler*-féléket, a melyekbõl pedig kiindult, de a melyek csak közelítõleg érvényesek, ha a zavaró befolyásokat is tekintetbe veszszük.

Vajjon miért foglal el ez a törvény ilyen elõkelõ helyet az összes fizikai törvények között? Nagyon sok apró oka van annak.

Mindenekelõtt azt hiszik, hogy sem el nem vethetjük, még csak kétségbe sem vonhatjuk e törvény feltétlen szigorát, anélkül, hogy a "perpetuum mobile" lehetõségét el ne ismernõk; az a kilátás, hogy ilyen következtetésre juthatnánk, bizalmatlanná tesz bennünket s úgy véljük, kisebb merészség az elvet elfogadni, mint tagadni.

Ez az állítás talán nem egészen helyes, mert a perpetuum mobile lehetetlensége csak a megfordítható folyamatokra nézve vonja maga után az energia megmaradása törvényét.

A *Mayer*-féle elv meglepõ egyszerûsége szintén csak megerõsíti a beléje vetett hitünket. Valamely közvetetlenül a tapasztalatból levezetett törvény esetén, mint a milyen például a *Mariotte*-féle törvény[17], az ilyen egyszerûség inkább bizalmatlanságra adna okot; de az eset itt nem ugyanaz. Ugyanis olyan elemek, melyek elsõ pillantásra látszólag egymással semminemû összefüggésben nem állanak, szemeink elõtt egymás mellé sorakoznak és váratlan rendben egyetlen összhangzó egészet képeznek. Lehetetlen azt gondolni, hogy ez az elõre nem látott összhang csak a véletlen játéka. Szerzeményünk annál becsesebbnek és kedvesebbnek fog látszani, minél több fáradtságba került a megszerzése, vagy mivel annál biztosabbak vagyunk abban, hogy a természettõl az igazi titkát ragadtuk el, minél féltékenyebben rejtegette el azt elõlünk.

Ezek azonban csak apró okok; hogy a *Mayer*-féle törvényt, mint abszolut elvet állapíthassuk meg, ahhoz mélyebb megfontolás szükséges. De ha ezt megkíséreljük, csakhamar látni fogjuk, hogy ennek az abszolut elvnek még megfogalmazása sem könnyû.

Minden egyes esetben jól látjuk, hogy mi az energia, s legalább ideiglenes meghatározását minden esetben megadhatjuk. Lehetetlen azonban általános fogalmi meghatározását megtalálni.

Ha az elvet a maga egész általánosságában akarjuk megfogalmazni, az egész világegyetemre alkalmazni, akkor látjuk, hogy az elv úgyszólván teljesen eloszlik és semmi egyéb sem marad, mint e mondat: *van valami, a mi állandó marad.*

De vajjon van-e ennek valami értelme?

A determinista föltevés szerint a világegyetem állapotát rendkívül nagy számú, n parameter határozza meg, a melyeket $x_1, x_2, \ldots x_n$-nel fogok jelölni.

Ha bármely pillanatban ezen n parameter értékét ismerjük, akkor egyszersmind az idõre vonatkoztatott differencziálhányadosaikat is ismerjük, tehát kiszámíthatjuk ugyanezen parameterek értékeit valamely elõbbi, vagy késõbbi pillanatra nézve is. Más szavakkal ez az n parameter n elsõrendû differencziális egyenletnek tesz eleget.

Ezeknek az egyenleteknek n-1 integrálja van, tehát van $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$-nek n-1 számú olyan függvénye, melyek állandók maradnak. Ha tehát azt állítjuk, hogy *van valami, a mi állandó,* azzal csak azonosságot mondottunk ki. Sõt még zavarban leszünk az iránt, hogy emez integrálok között melyik az, a melyet az *energia* név illeti meg.

Egyébként a *Mayer*-féle elvet nem ily értelemben használjuk, ha határolt rendszerre alkalmazzuk.

Felveszszük ezen esetben, hogy a mi n parametereink közül p számú a többitõl függetlenül változik, úgy hogy csak $n-p$ vonatkozásunk van a mi n parametereink és ezeknek differencziálhányadosai között; e kapcsolatok általában véve elsõ fokúak.

Hogy a fogalmazást megkönnyítsük, tegyük fel, hogy a külsõ erõk munkáinak összege zérus, valamint, hogy azon hõmennyiségek összege is, melyeket a rendszer kifelé lead, ugyancsak zérus. Elvünk kifejezése akkor a következõ lesz:

Az n-p számú vonatkozásból egy új egyenlet állítható elõ, melynek baloldala teljes differencziális, míg a jobb oldala a mi n-p számú összefüggésünk következtében zérus. Ezen differencziális integrálja eszerint egy állandó és ezt az integrált nevezzük energiának.

De vajjon hogyan lehetséges az, hogy több olyan parameter fordul elõ, a melyeknek változásai egymástól függetlenek? Ez csak a külsõ erõk hatása alatt lehetséges (bár egyszerûség okáért feltettük, hogy a külsõ erõk munkáinak algebrai összege zérus). Ha a rendszer valóban minden külsõ hatástól el van szigetelve, akkor a mi *n* parameterünknek valamely idõpillanatban adott értéke elegendõ lenne, hogy a rendszer állapotát valamely késõbbi idõpontra nézve meghatározzuk, folytonosan feltételezve azt, hogy a determinista-föltevés mellett megmaradunk. Ugyanazokba a nehézségekbe ütközünk hát mint fennebb.

Ha a rendszer jövõ állapota a jelen állapotával nincsen teljesen meghatározva, akkor ez azon múlik, hogy ez az állapot a jelen állapoton kívül azoknak a testeknek az állapotától is függ, melyek a rendszeren kívül esnek. De vajjon valószínû-e akkor az, hogy az *x* parameterek között, melyek a rendszer állapotát meghatározzák, olyan egyenletek állhassanak fenn, melyek e külsõ testek állapotától függetlenek. S ha azt vélnénk, hogy bizonyos esetekben ilyen egyenleteket találhatnánk, vajjon ez a gondolat nem alapszik-e a mi tudatlanságunkon meg azon a tényen, hogy eme testek hatása sokkal csekélyebb, hogy sem annak következményeit a mi tapasztalatunk képes volna felismerni?

Ha a rendszert nem tekintjük teljesen elszigeteltnek, akkor valószínû, hogy a saját belsõ energiájának szigorúan pontos kifejezése a külsõ testek állapotától is fog függeni. Fennebb már elõre föltettük, hogy a külsõ erõk munkájának összege zárus és ha magunkat ettõl a némiképpen mesterkélt megszorítástól meg akarnók szabadítani, az elv kifejezése még nehezebb lesz.

Hogy a *Mayer*-féle elvet abszolut értelmében fejezhessük ki, ki kellene azt terjesztenünk az egész világegyetemre; akkor meg ismét ugyanazon nehézségekkel állunk szemben, melyeket elkerülni óhajtottunk.

Mindezt összefoglalva és közönséges nyelven kifejezve mondhatjuk, hogy az energia megmaradásának elve csak egyet jelenthet, azt ugyanis, hogy az összes lehetõségeknek van egy közös sajátsága; ám a determinista föltevések szerint csak egy lehetõség van és így itt a törvénynek már semmi jelentése nincs.

A nemdeterminista föltevés szerint ellenben akkor is lesz jelentése, ha abszolut értelemben akarjuk megfogalmazni; a törvény akkor úgy fog feltünni, mint a lehetõségek szabadságának erõszakos korlátja.

De ez a szó emlékeztet arra, hogy már messze eltértem a tárgytól és hogy már azon az úton vagyok, hogy a mathematika és fizika területét elhagyjam. Nem megyek e szerint tovább s az egész fejtegetésbõl csak egy benyomást akarok megtartani, ugyanis azt, hogy a *Mayer*-féle törvény oly keret, mely eléggé hajlékony ahhoz, hogy majdnem mindazt beleilleszszük, a mit akarunk. Nem akarom ezzel azt mondani, hogy a törvény semmiféle tárgyi valóságnak meg nem felel, sem azt, hogy egyszerû azonossággá zsugorodik össze, mert minden egyes esetben, különösen ha nem erõszakoljuk az elvet egészen az abszolutnak határáig, egészen határozott, tiszta értelme van.

A törvénynek ez a hajlékonysága mindenesetre ok arra, hogy az elv hosszú életében higyjünk és minthogy ez a törvény másrészrõl csak akkor fog eltünni, ha valamely magasabb összhangba olvadhat bele, bizalommal dolgozhatunk tovább erre az elvre támaszkodva s már eleve bizonyosak lehetünk benne, hogy munkánk nem fog veszendõbe menni.

Jóformán mindaz, a mit most mondottam, a *Clausius*-féle elvre nézve is áll. A különbség nála csak az, hogy ezt egyenlõtlenséggel fejezik ki. Valaki talán azt jegyezhetné meg, hogy ez valamennyi fizikai törvényre nézve áll, mert pontosságuknak a megfigyelési hibák határt szabnak. Ám a fizikai törvények nem is akarnak mást, mint elsõ megközelítéssel feltüntetni a valóságot; s mindig van reá reményünk, hogy jelenlegi törvényeinket egyre pontosabb és pontosabb törvényekkel helyettesíthessük. Azonban az a körülmény, hogy a *Clausius*-féle törvény egyenlõtlenségben nyer kifejezést, az nem a mi megfigyelési eszközeink tökéletlenségén múlik, hanem magán a kérdés természetén.

A harmadik részbõl folyó általános következtetések.

A mechánika elvei e szerint két különbözõ alakban tünnek elénk. Egyrészt tapasztalatra alapított igazságok ezek, a melyek csak közelítõ igazolást nyertek, legalább a mennyiben közelítõleg szigetelt rendszerekre vonatkoznak. Másrészrõl oly követelményeknek tünnek fel, melyek a világegyetem összességére alkalmazhatók és szigorúan igazaknak tekintendõk.

Ha ezek a követelmények általánosan érvényesek és megbízhatók volnának, a mi nem mondható azon kísérleti igazságokról, a melyekbõl õket levezették, akkor ez annak a körülménynek tulajdonítandó, hogy ezen elvek végsõ fejtegetés szerint egyszerû megállapodások, a melyeket elfogadni annyival is inkább jogunk van, mert elõre is bizonyosak vagyunk benne, hogy semmiféle tapasztalattal meg nem czáfolhatók.

Ez a megállapodás azért mégsem egészen önkényes, ez nem a szeszélyünk szülötte; azért fogadjuk ezt el, mert bizonyos tapasztalatok azt mutatták, hogy ez kényelmes.

Ez magyarázza meg, hogyan építhette fel a tapasztalat a mechánika elveit, meg hogy miért nem döntheti meg ezeket sohasem.

Hasonlítsuk most össze a mechánikát a geométriával. A geométria alaptételei, mint például *Euklides* követelménye, szintén nem mások, mint megállapodások és éppen annyira kevéssé észszerû azt keresni, hogy vajjon igazak-e vagy nem, mint azt kérdezni, hogy vajjon helyes-e a méteres mértékrendszer vagy sem.

Ámde e megállapodások kényelmesek és bizonyos tapasztalatok megtanítottak bennünket arra, hogy ezt felismerjük.

Az elsõ pillantásra a hasonlóság tökéletes; a tapasztalat szerepe ugyanannak látszik.

Hajlandók volnánk eszerint azt mondani: Vagy tapasztalati tudománynak tekintjük a mechánikát és akkor ugyanaz áll a geométriára nézve is, vagy ellenkezõleg, a geométria deduktív tudomány, de akkor a mechanika is az.

Ez a következtetés azonban nem volna jogosult. Azok a tapasztalatok, melyek bennünket a geométria alapvetõ megállapodásaihoz mint legkényelmesebbekhez vezettek, olyan dolgokra vonatkoznak, melyeknek a geométria tanulmányozta tárgyakhoz semmi közük nincs; e megállapodások ugyanis a szilárd testek sajátságaira és a fény egyenes vonalú terjedésére vonatkoznak. Mechánikai és optikai tapasztalatok ezek és semmi czímen sem tekinthetõk geométriai tapasztalatoknak. A fõoka annak, hogy geométriánk nekünk kényelmesnek látszik, abban rejlik, hogy testünk különbözõ részei, szemünk, tagjaink maguk is a szilárd testek egynémely sajátságaival bírnak. Ilyen szempontból véve, a mi alaptapasztalataink mindenekelõtt fiziológiai kísérleteken alapulnak, a melyek nem a mathematikus tanulmánya tárgyát képezõ térre, hanem saját magának a testére vonatkoznak, azaz arra a segédeszközre, a melyet e tanulmányában felhasznál.

Ezzel ellentétben a mechánikai alapvetõ megállapodások, valamint azok a tapasztalatok, melyek bebizonyították, hogy e megállapodások kényelmesek, vagy ugyanazokra a tárgyakra, vagy hasonló testekre vonatkoznak. A megállapodásszerû általános elvek az egyes esetekben érvényes tapasztalati elveknek a természetes és közvetlen általánosítását képezik.

Ne mondja az olvasó azt, hogy ezzel mesterséges határt akarok húzni a tudományok között; hogy ha a tulajdonképpeni geométriát a szilárd testek tanától határozott korláttal különítem el, joggal vonhatnék ugyanilyen korlátot a kísérleti mechánika és az általános elveknek a megállapodásokból fejlesztett mechánikája közé. Valóban ki ne látná, hogy ha egymástól elkülönítem e két tudományt, mind a kettõt megcsonkítom és hogy a megállapodásszerû mechánikából vajmi kevés marad meg, ha elszigeteljük és hogy ezen maradékot ugyancsak nem lehet összehasonlítani a tudományoknak azon fényes csoportjával, a mit geométriának hívunk?

Most már érthetõ, hogy a mechánikai tanításnak miért kell kísérletinek maradnia.

Csakis így tudjuk megérteni e tudomány keletkezését, a mi pedig elengedhetetlen a tudomány szellemének teljes megértéséhez.

Másrészt a mechánikát azért tanuljuk, hogy alkalmazhassuk; alkalmazni meg csak akkor lehet, ha e tudomány tárgyi tudomány marad. Már pedig, a mint láttuk, a mit ez elvek általános érvényben és biztosságban nyernek, azt elveszítik tárgyilagosságukban. Szükséges tehát különösen az elvek tárgyi oldalával idejében megismerkedni, a mi csak akkor valósítható meg, ha az egyes esetektõl az általános felé haladunk, nem pedig a fordított úton.

Az elvek közmegegyezésen alapuló megállapodások és burkolt fogalmi meghatározások. Azonban emellett ezek kísérleti törvényekbõl szûrõdtek le; e törvényeket úgyszólván elvekként állították oda, a melyeknek elménk azután abszolut értéket tulajdonít.

Egyik-másik filozófus túlsokat általánosított; azt gondolták, hogy alapelvek képezik az egész tudományt és hogy következésképpen az egész tudomány közmegegyezésen alapuló.

Ez a képtelen tan, melyet nominálizmusnak hívnak, nem állja ki a szigorú vizsgálatot.

Hogyan lehet a törvénybõl elv? A törvény két valóban létezõ *A* és *B* tag egymáshoz való vonatkozását fejezi ki. Ez azonban nem szigorúan igaz, csak közelítõen helyes. Önkényesen beiktatunk eszerint egy közbeesõ *C* tagot, a mely többé-kevésbbé képzelt és így *C a meghatározás révén* jelenti azt a dolgot, mely *A*-val *pontosan* olyan vonatkozásban van, mint a milyet a törvény kifejez. Törvényünk ilyen módon egyrészt abszolut és szigorú *alapelvre* oszlott, mely *A* és *C* egymáshoz való vonatkozását fejezi ki, másrészt egy közelítõleg érvényes kísérleti törvényre, a mely kijavításra alkalmas és mely *C*-nek *B*-hez való vonatkozását fejezi ki. Világos, hogy bármilyen hosszú ideig folytassuk is ezt a szétbontást, törvények mindig fognak maradni.

A következõkben rátérünk a tulajdonképpeni törvények birodalmára.

* Ez a fejezet részben szerzõnek "Thermodynamique" czímû munkája elõszavából való.

NEGYEDIK RÉSZ.

A természet.

KILENCZEDIK FEJEZET.

A föltevések a fizikában.

A tapasztalat és az általánosítás szerepe.

A tudományos igazság egyetlen forrása a tapasztalat; egyedül csak ez taníthat bennünket valami újra, csak ez teheti tudásunkat biztossá. Olyan sarkalatos két tétel ez, melyet semmi meg nem czáfolhat.

De ha a tapasztalat minden, milyen hely jut akkor a mathematikai fizika számára? Mire jó a kísérleti fizikának az olyan segítség, mely haszontalannak, sõt talán veszélyesnek is látszik?

És az elméleti fizika mégis megvan és tagadhatatlan, hogy nagy szolgálatot tett; ez oly tény, mely magyarázatra szorul.

Maga a megfigyelés ugyanis soha sem elegendõ; az észleleteket még fel is kell használnunk és ezért általánosítanunk kell. Ezt tették mindenkor, de mivel az embert a mult tévedéseinek emléke egyre óvatosabbá tette: igyekezett megfigyeléseit folytonosan szaporítani és általánosításait mindinkább korlátolni.

Minden század kinevette a megelõzõt és szemére vetette, hogy túlságosan hamar és igen együgyû módon általánosít. *Descartes* megszánta a jónokat, mi meg mosolygunk *Descarteson* s kétségkívül a mi utódaink is valaha rajtunk fognak nevetni.

E szerint nem juthatnánk-e mi mindjárt czélhoz? Nem lehetne-e azt a gúnyt, melyet máris látunk utódaink arczán, kikerülni? Nem érhetnõk be magával a puszta tapasztalattal?

Nem; ez teljes lehetetlenség és egyértelmû a tudomány természetének teljes félreismerésével.

A tudós feladata a tények rendezése; a tudományt éppen úgy építik fel a tényekbõl, mint a kövekbõl a házat, de azért a tények halmaza még éppen úgy nem tudomány, mint a hogyan a kõhalom még nem ház.

És mindenekelõtt a természetbúvár igyekezzék a jelenségeket elõre látni. *Carlyle* valahol körülbelül a következõket írta:

„Csak magának a ténynek van jelentõsége; *Földnélküli János* erre járt s ez az, a mi figyelemre méltó; olyan igazság ez, a miért a világ összes elméleteit odaadnám" *Carlyle Baconnak* honfitársa volt, de *Bacon* aligha mondott volna ilyet. Dehát a történész így beszél! A fizikus talán sokkal inkább ezt jegyezné meg: „*Földnélküli János* erre járt, de az engem nem érdekel, mert hiszen még egyszer nem fog erre járni".

Tudjuk, hogy vannak jó, de vannak hibás kísérletek is. Az utóbbiakat hiába halmozzák fel száz, vagy akár ezer számra: egy igazi mesternek egyetlen munkája, mint a minõ például *a Pasteuré,* elegendõ arra, hogy amazokat teljesen elfeledtesse. Bacon ezt bizonyára jól tudta, mert tõle ered az „experimentum crucis" kifejezés. Annál kevésbbé volt errõl fogalma *Carlylenek.* A tény tény; egy tanuló leolvas valamely adatot a hõmérõn, de semmi elõvigyázattal nem élt, az nem lényeges, csak az fontos, hogy leolvasta; s ha csak a tény számít, akkor az éppen olyan joggal való igazság, mint akár *Földnélküli János* vándorlásai. Hogyan van hát mégis, hogy ez a tény, hogy az a tanuló azt a leolvasást végezte, teljesen érték nélküli, míg ellenkezõleg az a tény, hogy egy ügyes fizikus egy másik leolvasást végzett, kiváló fontosságú lehet? Ennek az az oka, hogy az elsõ leolvasásból semmiféle következtetést sem vonhatunk. Mit értünk e szerint jó kísérlet alatt? Az olyat, melynek segélyével még mást is ismerhetünk fel, mint valamely elszigetelt tényt, az olyan kísérletet, mely bennünket elõrelátásra, jövendölésre, tehát általánosításra képesít.

Mert hiszen általánosítás nélkül az elõrelátás lehetetlen. Azok a körülmények, a melyek között dolgozunk, sohasem fognak többé teljesen megismétlõdni; maga a megfigyelt jelenség sem fog úiból lejátszódni; az egyetlen tény, a melyet megállapíthatunk, az, hogy hasonló körülmények között hasonló jelenség fog bekövetkezni. Hogy ezt elõre lássuk, legalább is segítségül kell vennünk a hasonlóságot, azaz: megint csak általánosítanunk kell.

Ha még oly óvatosak vagyunk is, közbeiktatnunk mégis csak kell; a kisérlet csak bizonyos számú, egymástól elszigetelt pontot szolgáltat, melyeket összefüggõ vonallal egyesítenünk kell; ez azután az igazi általánosítás.

Pedig még ennél is többet teszünk; a meghúzott görbe a megfigyelt pontok *között* és *közel mellettük* vonul el, magukon e pontokon nem is halad át. Ily módon nemcsak hogy a kísérlet általánosítására szorítkozunk, hanem még ki is javítjuk a kísérleteket; az a búvár, ki e javítástól tartózkodni akarna - megelégedve a puszta kísérlettel - bizonyára különös törvényszerûségekhez jutna.

A teljesen meztelen tények eszerint bennünket nem elégíthetnek ki. Azért kell nekünk a tudományt rendszereznünk, vagyis inkább szerveznünk.

Gyakran mondják, hogy kísérletezni elõre megalkotott véleménynyel nem szabad. Ez képtelenség; ezáltal nemcsak hogy valamennyi kísérlet meddõ maradna, hanem olyat akarnánk elérni, a mi kivihetetlen.

Mindenkinek megvan a maga világnézete, a melytõl egykönnyen nem szabadulhat. Még a nyelvünk is, melyet ugyancsak használnunk kell, tele van szójárásokkal, melyek elõre képezett eszmékbõl keletkeztek; a mint hogy másból nem keletkezhettek. Csakhogy éppen ezek az öntudatlanul elõre alkotott nézetek ezerszer veszedelmesebbek a többieknél.

Gondolkozzunk csak, súlyosbítjuk-e a hibát, ha ezeket teljesen tudatunkban lévõ más elõítéletekkel keverjük? Én részemrõl ugyan nem gondolom; sokkal inkább azt hiszem, hogy az egyik a másikat ellensúlyozni fogja, akárcsak a méreg az ellenmérget; egyik a másikat nem tûrheti el, egymással összeütköznek és ezáltal arra kényszerítenek bennünket, hogy a dolgokat különbözõ nézõpontokból szemléljük. Ez máris elég arra, hogy felszabaduljunk és az már nem rabszolga többé, ki szabadon választja az urát!

Az általánosításnak köszönhetõ tehát, hogy minden megfigyelt jelenség nagyszámú más jelenség elõrelátására képesít bennünket; de ne feledjük el, hogy csak az az elsõ jelenség bizonyos, melyet megfigyeltünk s a többi mind csak valószínû.

Bármily szilárdnak is lássék nekünk valamely elõrelátás, azért mégis feltétlen bizonyosak nem lehetünk a felõl, vajjon a kísérlet nem fogja-e megczáfolni, ha igazolására kerül a sor. Ámde a valószínûség sokszor oly nagy, hogy a gyakorlatban bátran megelégedhetünk vele. Jobb *feltétlen* bizonyosság nélkül elõre látni, mint egyáltalában elõre nem látni.

Ezért ha alkalmunk van arra, hogy valamely tényt valamiképpen igazolhassunk, ezt soha se mulaszszuk el. Ámde minden kísérlet hosszadalmas és nehéz s a tudományos kísérletezõk nincsenek nagy számmal és azoknak a tényeknek a száma, melyeket elõre megállapítanunk kell, mégis rendkívül nagy; ehhez a nagy tömeghez képest a közvetlen igazolások száma, melyeket végezhetünk, mindig elhanyagolhatóan kicsiny lesz.

Azt a keveset, a mit közvetlenül megfigyelhetünk, lehetõleg jól kell beosztani; minden kísérletet úgy végezzünk, hogy ennek alapján a lehetõ legtöbb tényt lehessen elõre látnunk és pedig a lehetõ legnagyobb valószínûséggel. A feladat, hogy úgy mondjuk, abban áll, hogy a tudományos gépezet hatásfokát a lehetõségig növeljük.

Hadd hasonlítsam össze a tudományt egy olyan könyvtárral, melynek szünet nélkül egyre gyarapodnia kell; a könyvtárosnak azonban csak elégtelen anyagi eszközök állanak rendelkezésre; vigyáznia kell, hogy ezen eszközöket czélszerûtlenül ne használja el.

A kísérleti fizika játszsza a könyvtáros szerepét; õ van megbízva a vásárlásokkal, õ egyedül gyarapíthatja a könyvtárt. Amathematikai fizika hivatása a könyvjegyzék összeállítása. S ha ez a könyvjegyzék jól van elkészítve, azzal a könyvtár ugyan nem lesz gazdagabb, hanem azért a könyvjegyzékre az olvasónak mégis szüksége van, hogy a könyvtár kincsei felhasználásában útmutatóul szolgáljon.

A míg ezenkívül a könyvjegyzék a könyvtárost gyûjteményének hiányaira figyelmessé teszi, egyszersmind arra képesíti, hogy anyagi segédeszközeit helyesen használhassa, mi annyival is fontosabb, mert ezek az eszközök amúgy is teljesen elégtelenek.

Ez tehát az elméleti fizika szerepe; feladata ugyanis, hogy az általánosításokat oly értelemben vezesse, hogy, miképpen már elõbb is kifejeztem magamat, a tudomány hatásfoka növekedjék. Hogy ezt milyen módon érheti el, és káros hatás nélkül hogyan viheti keresztül, azt akarjuk most közelebbrõl is megvizsgálni.

A természet egysége.

Jegyezzük meg mindenekelõtt, hogy minden általánosítás a természet egységében és egyszerûségében való hitet tételez fel. Az egységre nézve semmi nehézségûnk nincs. Ha a világegyetem különbözõ részei nem úgy viselkednének, mint egy és ugyanazon test különbözõ szervei, akkor ezek egymásra nem hatnának és egymást kölcsönösen nem ismernék, mi pedig csak egyetlenegy részét ismernõk. Nem szükséges tehát kérdezni, hogy vajjon a természet egységes-e, hanem csak azt: miképpen van az, hogy egységes?

A második pont már nem intézhetõ el oly egyszerûen. Egyáltalában nem bizonyos, hogy a természet egyszerû. vajjon veszély nélkül járhatunk-e úgy el, mintha egyszerû volna?

Volt idõ, a mikor *a Mariotte* féle törvény egyszerûsége eme tõrvény pontosságának a javára felhozott érv volt. A mikor még *Fresnel* is *Laplace*szalbeszélgetve úgy nyilatkozott, hogy a természet analitikai nehézségekkel nem törõdik, kötelezve érzé magát, hogy magyarázatokat adjon, hogy az uralkodó nézetet nagyon meg ne sértse.

Azóta a nézetek ugyancsak megváltoztak, de mindamellett azok, a kik nem hiszik, hogy a természet törvényeinek egyszerûeknek kell lenniök, sokszor kénytelenek úgy cselekedni, mintha ezt hinnék. E szükségszerûség alól teljesen nem vonhatják ki magukat a nélkül, hogy mindennemû általánosítást és ezzel egyúttal az összes tudományokat is lehetetleneknek ne tekintsék.

Világos, hogy bármely tény végtelen sokféle módon általánosítható és e módok közt választanunk kell. A választást pedig csak az egyszerûségre vonatkozó meggondolások vezethetik. Vegyük a legközönségesebb esetet, a közbeiktatást. Azokat a pontokat, a melyek megfigyeléseinkbõl állanak elõ, folytonos, lehetõleg szabályos vonallal kötjük egymással össze. Vajjon miért igyekszünk ekkor a hegyes szögleteket és hirtelen fordulókat elkerülni? Miért nem engedjük meg, hogy a görbe a legszeszélyesebb módon, zeg-zug vonalat írjon le? Azért, mert elõre tudjuk, vagy legalább tudni véljük, hogy a kifejezendõ törvény nem lehet annyira bonyolódott, hogy ilyen görbének feleljen meg.

A Jupiter tömegét vagy holdjainak. mozgásából, vagy a nagyobb, vagy pedig a kisebb bolygókra gyakorolt zavaró hatásából határozhatjuk meg. Ha e három módszer útján nyert adatok középértékét veszszük, három egymáshoz közel álló, de mégis különbözõ számértékhez jutunk. Ezt az eredményt úgy is magyarázhatnók, hogy felteszszük, hogy a nehézkedési vonzás állandója e három esetben nem ugyanaz; a megfigyeléseket e föltevés bizonyára sokkal jobban tüntetné elõ. Vajjon miért vetjük el mégis ezt az értelmezést? Bizonyára nem azért, mert képtelen, hanem mert túlságosan bonyolódott.

E magyarázatot csak akkor fogjuk majd elfogadni, ha magát reánk kényszeríti, de ennek ideje még nem érkezett meg.

Összefoglalva, minden törvényt egyszerûnek szoktunk tartani mindaddig, míg az ellenkezõje be nem bizonyul.

Ez a szokás terjedt el a fizikusok közt az elõbb már kifejtett okoknál fogva. De hogyan igazoljuk ezt a szokást, azon felfedezésekkel szemben, a melyek naponta egyre gazdagabb és összetettebb részleteket tárnak elénk? Hogyan egyeztessük össze e szokást már a természet egységérõl fennálló érzetünkkel? Mert ha minden kölcsönösen egymástól függ, azok a vonatkozások, a melyeknél annyi különféle tárgy játszik szerepet, nem lehetnek többé egyszerûek.

Ha a tudomány történetét tanulmányozzuk, kétféle olyan jelenséget tapasztalhatunk, melyek egymásnak mintegy a fordítottjai: Majd az egyszerûség rejtõzik látszólag összetett jelenségek mögé, majd ezzel ellentétben az egyszerûség látszólagos és eltakarja a rendkívül bonyolódott folyamatokat.

Vajjon mi bonyolódottabb, mint a bolygók megháborgatott mozgásai, és vajjon mi egyszerûbb, mint a *Newton*-féle törvény? Itt kigúnyolja a természet, mint *Fresnel* mondja, az analitikai nehézségeinket, és egyszerû eszközöket használva fel, ezeknek egymással való egybekapcsolásával, nem tudom miféle rendkívüli, megoldhatatlan bonyodalmat hoz létre. Ilyen az elrejtett egyszerûség, a melyet fel kell fedeznünk.

Az ellenkezõ esetre is bõven találunk példát. A gázok kinetikai elméletében nagy sebességgel felruházott molekulákat vizsgálunk, a melyek pályái szünet nélküli ütõdések következtében változnak, szeszélyes alakúak és a teret minden irányban átszelik.

Ezen elméletnek a megfigyelhetõ végeredménye az egyszerû *Mariotte* féle törvény; minden egyes egyéni jelenség összetett természetû; a nagy számok törvénye a középeredmény egyszerûségét helyreállította. Itt az egyszerûség csak látszólagos és csak érzékeink tökéletlensége gátol bennünket abban, hogy az összetettséget észrevegyük.

Sok jelenség az arányosság törvényét követi; vajjon miért? Mert e jelenségekben létezik valami, a mi igen kicsiny. A megfigyelt egyszerû törvény eszerint semmi más, mint annak az általános analitikai szabálynak a természet jelenségeire való átvitele, hogy valamely függvény végtelen kicsiny növekménye arányos a változók végtelen kicsiny növekményeivel. Mivel azonban ezek a növekmények a valóságban nem *végtelen* kicsinyek, hanem csak *nagyon* kicsinyek, az arányossági törvény is csak közelítõ, és az egyszerûség csak látszólagos. Az, a mit most mondtam el, a kicsiny mozgások összetevésének szabályára alkalmazható, a melynek felhasználása annyira termékeny és a mely a fényelmélet alapját képezi.

Vajjon hogyan állunk magával a Newton-féle törvénynyel? Lehet, hogy az olyan hosszú ideig elrejtett egyszerûsége csak látszólagos. Ki tudja: nem valamely bonyolódott szerkezetnek tudandó-e be, talán valami finom, szabálytalanul mozgó anyag ütközéseinek s vajjon nem a középértékek a és nagy számok játéka következtében látszik-e egyszerûnek? Mindenesetre nehéz nem tételezni fel azt, hogy a valóságos törvény kiegészítõ tagokat tartalmaz, melyek kis távolságban már észrevehetõ nagyságúak lehetnek. Ha a csillagászatban ezek a többi tagok elhanyagolhatók, az elsõ taggal szemben, a mely *a Newton* törvényét fejezi ki; az csak az égi távolságok óriási méreteinek a következménye.

Ha a mi búvárlati eszközeink egyre mélyrehatóbbak lesznek, kétségkívül fel fogjuk fedezni az egyszerût az összetett alatt, azután az összetettet az egyszerûben, azután ismét az összetettben az egyszerût és így tovább a nélkül, hogy elõre láthatnánk, hogy hol lesz e láncz utolsó szeme.

Valahol meg kell állanunk; és hogy a tudomány lehetséges legyen, mindenesetre ott, a hol az egyszerûséget találtuk. Ez az egyetlen talaj, a melyre általánosításaink épületét emelhetjük. De mivel ez az egyszerûség csak látszólagos; vajjon elég szilárd lesz-e a mi épületünk? Ezt kell még kissé közelebbrõl megvizsgálnunk.

E czélból lássuk csak: milyen szerepet is játszik az egyszerûségbe vetett hitünk a mi általánosításainkban. Valamely egyszerû törvényt a különös esetek nagy számán át beigazoltunk; nem akarjuk azt elfogadni, hogy ez az olyan gyakran megismételt beigazolás a véletlennek játéka, hanem arra fogunk következtetni, hogy a törvény az általános esetben igaz.

Kepler észrevette, hogy egy bolygónak *Tycho*-tól megfigyelt helyzetei mind egy és ugyanazon ellipszisen feküsznek. Egy pillanatra sem jut eszébe az a gondolat, hogy *Tycho* valami ritka véletlen következtében az eget csak azokban a pillanatokban észlelhette, a mikor a bolygó valódi pályája ezen ellipszist metszette.

Mi közünk eszerint ahhoz, hogy az egyszerûség igazi-e, avagy összetett igazságot takar? Légyen az egyszerûség akár a nagy számok szerepének következménye, mely az egyéni különbségeket kiegyenlíti, vagy akár bizonyos mennyiségek kicsiny vagy nagy voltának hatása, a minek folytán bizonyos tagok elhanyagolhatók: mindenesetre az bizonyos, hogy ez az egyszerûség nem a véletlennek következménye. Ezen egyszerûségnek, akár valóságos akár látszólagos, mindig megvan a maga oka. Mindig élhetünk ugyanazzal a megfontolással és ha valamely egyszerû törvényt több esetben megfigyeltünk, joggal, feltehetjük, hogy hasonló esetekben is még igaz lesz. Ha ezt a következtetést nem fogadnók el, azzal a véletlennek egy meg nem engedhetõ szerepét tulajdonítanánk.

Ámde itt mégis van némi különbség. Ha az egyszerûség valóságos és mély, akkor ez a mi mérõ mûszerünk tökéletesedésének ellenáll és fennmarad; eszerint, ha azt gondoljuk, hogy a természet legmélyebb okaiban egyszerû, akkor a közelítõleges egyszerûségbõl szigorú egyszerûségre kellene következtetnünk. Régebben meg is tették ezt, de erre nekünk már nincs jogunk.

A *Kepler*-féle törvények egyszerûsége például csak látszólagos. Ez nem akadályoz meg bennünket abban, hogy azokat a naprendszerhez hasonló összes rendszerekre bizonyos közelítéssel ne alkalmazzuk; de megakadályoz abban, hogy e törvényéket szigorúan pontosaknak tekintsük.

A föltevés szerepe.

Minden általánosítás egyszermind föltevés; a föltevésnek eszerint oly szükséges szerep jut, melyet soha senki kétségbe nem vont. Csakhogy a föltevést mindig, mielõbb és a lehetõ leggyakrabban igazolásnak kell alávetnünk. Magától érthetõ, hogy ha e próbát nem állja ki, el kell hagynunk minden utógondolat nélkül. Ezt tényleg meg is szokták tenni általában; de sokszor kedvetlenül.

Ámde maga ez a kedvetlenség sem jogos; a fizikus, a ki egy föltevését visszavonta, éppen ellenkezõleg örüljön, hogy váratlan alkalma nyílott egy felfedezésre.

Valószínû, hogy föltevését nem könnyelmûen fogadta el, s hogy e föltevés számba veszi az összes ismert tényezõket, a melyekrõl hihetõ, hogy a jelenségnél közrejátszottak. Ha az igazolás nem sikerül, ez annyit jelent, hogy valami váratlan, valami rendkívüli dolog van jelen; itt tehát valami ismeretlent és újat fog találni.

Vajjon az így megdöntött föltevés terméketlen maradt-e? Szó sincs róla, ellenkezõleg azt mondhatnók, hogy nagyobb szolgálatokat tett, mint egy helyes föltevés; nemcsak alkalmat adott a döntõ kísérletre, hanem a kísérletet czéltalanul végeztük volna, és ha elõbb ama föltevéssel nem élünk, sohasem olvashattunk volna ki a kísérletbõl semmit; semmi rendkívülit nem láttunk volna benne s csak egy ténynyel többet lajstromoztunk volna, a nélkül, hogy a legcsekélyebb kõvetkeztetést vontuk volna le belõle.

Kérdezzük most már: milyen feltételek mellett veszélytelen a föltevések használata?

Az a szilárd elhatározás, hogy a kísérletnek mindent alárendelünk, nem elegendõ; mégis csak vannak veszélyes föltevések is, s ezek elsõsorban és fõképpen azok, a melyek hallgatagon és öntudatlanul állanak fenn. Mivel az ilyen föltevéseket használjuk a nélkül, hogy tudnánk róla, nem vagyunk képesek megszabadulni tõlük. A mathematikai fizika ez esetben is szolgálatunkra lehet. Az a pontosság, a mely neki sajátja, arra kényszerít bennünket, hogy mindazokat a föltevéseket megfogalmazzuk, melyeket a mathematikai fizika alkalmazása nélkül ugyancsak használtunk volna, de a nélkül, hogy bennük kételkedtünk volna.

Jegyezzük meg másfelõl, hogy fontos dolog, hogy ne éljünk túlsok föltevéssel és hogy csak az egyiket a másik után állítsuk fel. Ha valamely elméletet többszõrös föltevésekre alapítunk és azután a kísérlet az elméletet nem igazolja be, vajjon melyik az a mi elõre megalkotott feltevéseink közül, a melyen változtatnunk kell? Lehetetlen ezt kiderítenünk. És megfordítva, ha a kísérlet sikerül, vajjon az összes föltevéseket egyszerre beigazoltaknak fogjuk-e tekinteni? Azt fogjuk-e gondolni, hogy egyetlenegy egyenlet több ismeretlent határozott meg?

Arra is ügyelnünk kell, hogy a föltevések különbözõ fajait megkülönböztessük. Mindenekelõtt vannak olyanok, a melyek egészen természetesek és a melyek elõl nem zárkózhatunk el. Nehéz dolog föl nem tenni azt, hogy az igen távoli testek hatása nem teljesen elhanyagolható, hogy a kicsiny mozgások elsõfokú törvénynek hódolnak; hogy a hatás az oknak folytonos függvénye. Ugyanez mondható a részarányosságból folyó feltételekrõl. Mindezek a föltevések a mathematikai fizika összes elméleteinek úgyszólván közös alapját képezik. Ezeket a föltevéseket kellene legutoljára elhagynunk.

Van a föltevéseknek egy másik csoportja, a melyeket közömbösöknek nevezhetnék. A mathematikus a legtöbb kérdésnél számítása kezdetén feltételezi vagy azt, hogy az anyag folytonos vagy megfordítva, azt, hogy atomokból áll. Akár az egyik, akár a másik föltevéssel él, azért az eredményei ez által nem szenvednek változást, legfeljebb egyik úton több fáradságába kerülne, hogy hozzájuk eljusson; ez az egész. Vajjon ha már most a kísérlet beigazolja az õ következtetéseit, gondolhatja-e, hogy bebizonyította például az atomok valóságos létezését?

A fényelméletekbe kétféle iránymennyiséget szokás bevinni, melyek egyikét a sebességnek, másikat az örvénylõ mozgás erõsségének szokás tekinteni. Ez is egy közömbös föltevés, mert ugyanazokhoz a következtetésekhez juttat bennünket, mint az ellenkezõje; a kísérlet sikere nem gyõzhet meg bennünket arról, hogy az elsõ iránymennyiség valóban sebesség, csak egyetlen dolgot bizonyít, ugyanis azt, hogy valóban iránymennyiség és ez az egyetlen föltevés, melyet tényleg az elõzményekbe bevittünk. Hogy az iránymennyiségnek azt a kézzelfogható látszatát adjuk, melyet elménk gyöngesége megkíván, úgy kell azt felfognunk, mint sebességet vagy pedig örvénylõ mozgás erõsségét; éppen úgy, mint ahogy a jelzésére betûket, x-et vagy y-t kell használnunk. De bármilyen legyen is az eredmény, azt nem fogja eldönthetni, vajjon igazunk volt-e vagy sem, a mikor sebességnek tekintettük, mint ahogy azt sem döntheti el, hogy joggal neveztük-e ezt az iránymennyiséget x-nek és nem y-nak.

Ezek a közömbös föltevések soha sem veszedelmesek, hacsak igazi értelmüket nem ismerjük félre. Hasznosak lehetnek akár mint a számítás segédeszközei, akár azért, hogy értelmünket meghatározott képek használatával támogatják, hogy az eszméket úgyszólván rögzítik. Eszerint semmi okunk nincs ezen föltevések elvetésére.

A harmadik csoport föltevései a valóságos általánosítások. Ezeket kell a kísérletnek megerõsítenie vagy megczáfolnia. Akár beigazolva, akár elvetve, ezek mindenképpen termékenyek lehetnek. De azoknál az okoknál fogva, a melyeket fennebb fejtettem ki, csak akkor lehetnek termékenyek, ha számukat mértéktelenül nem szaporítjuk.

A mathematikai fizika eredete.

Hatoljunk hát kissé mélyebbre s tanulmányozzuk közelebbrõl azokat a föltételeket, a melyek a mathematikai fizika kifejlõdését lehetõvé tették. Az elsõ pillantásra felismerjük, hogy a tudósok törekvése mindig oda irányult, hogy a közvetlen tapasztalatból merített összetett jelenséget az elemi jelenségek igen nagy számára bontsák fel.

Ez háromféle módon történik: elõször az idõszerinti egymásután alapján. Ahelyett, hogy valamely jelenség tovahaladó fejlõdését egész tartamában vennénk szemügyre; megkíséreljük minden idõpillanatot a közvetlen megelõzõvel összekötni; felveszszük, hogy a világ mai állapota csakis a legközelebbi multtól függ, anélkül, hogy valami távolabbi multnak, hogy úgy mondjuk emléke hatását éreztethetné. Ezen elv következtében, ahelyett, hogy a jelenségek egész sorozatát közvetlenül tanulmányoznánk, arra szorítkozhatunk, hogy a jelenséget „differencziális egyenlet"-ben fejezzük ki; így a *Kepler*-féle törvényeket *a Newton*-félével helyettesítjük.

Egy második eljárás az, mikor megkíséreljük a jelenséget a tér szerinti egymásmellettiség alapján szétbontani. Az, a mit a tapasztalat nekünk nyujt, az a tények zavart halmaza, melyek bizonyos kiterjedésû színtérén játszódnak le; meg kell kísérelnünk azt az elemi jelenséget felismerni, a mely a nagy térnek csak egy kicsiny részében folyik le.

Hogy mit értek ezen, azt egynéhány példa jobban meg fogja magyarázni. Ha valamely szilárd testben, a mely lehûl, egész összességében akarnók tanulmányozni a hõ eloszlását, ez sohasem sikerülne. Ámde minden egyszerûvé válik legott, mihelyt megfontoljuk, hogy a szilárd testnek egy pontja sem adhat át hõt valamely távoli tömegpontnak, hanem csakis a közvetetlen közel lévõ pontoknak és így a hõáramlat csak helyrõl-helyre terjedve juthat el a szilárd testnek más részeibe. Az elemi jelenség tehát két egymást érintõ szomszédos pontnak a hõkiegyenlítése; ez a kicserélõdés szigorúan helyhez kötött jelenség és aránylag egyszerû, ha a dolog természete szerint felveszszük, hogy az egymástól észrevehetõ távolságban lévõ részecskék hõmérséklete e folyamatra nincsen hatással.

Meghajlítok egy rudat; ez igen bonyolódott alakúvá válik, a mely alaknak a közvetetlen tanulmányozása lehetetlen lenne; ám e nehézségeket legyõzhetem, ha megfigyelem, hogy hajlított állapota nem más, mint a rúd kicsiny elemei alakváltozásának az eredménye és hogy minden ilyen elem alakváltozása csak azoktól az erõktõl függ, melyek közvetetlenül magára az elemre hatnak, de nem függhet azoktól az erõktõl, a melyek a többi elemeken mûködnek.

Az összes ilyen példákban, a melyeket minden nehézség nélkül lehetne szaporítani, általában felveszszük, hogy nincs távolba való hatás vagy legalább is, hogy nagy távolságba való hatás nincs. Ez csak föltevés; ez nem mindig helyes, mint ahogy a nehézkedés tõrvényébõl tudjuk; e föltevést tehát igazolásnak kell alávetnünk; ha azután a helyességét csak közelítõleg is be tudjuk bizonyítani, akkor igen becses elvünk van benne, melynek segítségével már felépíthetjük a mathematikai fizikát, legalább is egymásra következõ megközelítések felhasználásával.

Ha nem állja ki a próbát, akkor valami más hasonlót kell keresni, mert van még más mód is arra, hogy az elemi jelenséghez eljussunk. Ha több test egyszerre hat, megeshetik, hogy hatásaik egymástól függetlenek és az egyik egyszerûen a másikhoz adódik, akár mint az iránymennyiségek, akár mint a léptékes mennyiségek. Az elemi jelenség akkor valamely elszigetelt testnek a hatásából áll. Más alkalommal kicsiny mozgásokkal, vagy általánosabban mondva, kicsiny változásokkal van dolgunk, melyek az egymásra rakás jól ismert törvényének hódolnak. Ily módon a megfigyelt mozgás egyszerû mozgásokra bontható szét; például a hang a különbözõ összhangzó alap- és felhangokra, a fehér fény a maga egyszerû egyszinû összetevõire. Vajjon milyen módszerrel lelhetjük fel az elemi jelenségeket, ha már felismertük, hogy valószínûleg hol kell õket keresnünk?

Mindenekelõtt gyakran elõfordul, hogy ezt elõre láthatjuk, vagy legalább is annyit látunk elõre, a mennyi nekünk hasznos, a nélkül, hogy bele kellene hatolnunk a jelenség egész szerkezetébe; a nagy számok törvényével már czélt érünk. Visszatérünk ismét a hõvezetés példájára; minden molekula hõt bocsát ki a szomszédos molekula felé; hogy ez milyen törvény szerint történik, azt nem szükséges tudnunk; ha erre nézve valamit feltennénk, akkor az csak közömbös föltevés lehetne, nem volna tehát haszna és nem volna bebizonyítható. S valóban, mivel csak az átlagos középértékekkel számolunk s mivel e közeget egyöntetünek veszszük fel, az összes különbségek kiegyenlítõdnek; és bármilyen föltevést használtunk is, az eredmény mindig ugyanaz marad.

Ugyanezen körülmény jelentkezik a rugalmasság, valamint a hajcsõvesség elméletében; a szomszédos molekulák vonzzák és taszítják egymást; hogy mely törvények szerint, azt nem szükséges ismernünk, beérjük azzal, hogy ez a vonzás csak kis távolságokra nézve vehetõ észre, hogy a molekulák igen nagy számban vannak jelen s hogy a közeg egyöntetû; és akkor semmi más tennivalónk nincs, minthogy érvényesülni engedjük a nagy számok tõrvényét.

Az elemi jelenségek egyszerûsége itt is a megfigyelhetõ, eredõ jelenség összetettsége mögött rejtõzik; ám ez az egyszerûség a maga részérõl ugyancsak látszólagos volt s igen bonyolódott szerkezetet takart el.

Hogy az elemi jelenségekhez hozzájussunk, erre a legjobb mód kétségkívül a kísérlet. Kísérleti fogásokkal kell azt az összetett csomót szétbontanunk, a melyet a természet kutatásaink elé ad és ennek lehetõleg megtisztított elemeit gonddal kell tanulmányoznunk; például a fehér természetes fényt a hasáb segítségével egyszínû fénysugarakra bontjuk s a sarkító segélyével sarkított fénysugarakká változtatjuk át.

Sajnos, ez nem mindig lehetséges, de nem is mindig elegendõ; néha bizony szükséges, hogy az ész megelõzze a tapasztalatot. Erre nézve csak egy példát említek meg, a mely engem mindig élénken érintett.

Ha a fehér fényt szétbontom, a színkép egy kis részét elszigetelhetem, de bármilyen kicsiny is e rész, bizonyos szélessége mindég lesz. Ugyanígy a természetes, úgynevezett egyszínû fénynyalábok is rendkívül vékony sugarat adnak, de a mely még sem végtelenül vékony. Feltehetõ, hogy valamely kísérleti módon tanulmányozva a természetes fény sajátságait, egyre keskenyebb színkép-sugárnyalábbal dolgozva és úgyszólván egészen a határig menve, eljutunk végre oda, hogy megismerjük a szigorúan egyszínû fény sajátságait.

Ez azonban nem fog egész szigorúan így bekövetkezni. Felteszem, hogy az ugyanazon fényforrásból kiinduló két fénysugarat két egymásra merõleges síkban sarkítják és hogy õket azután ugyanabba a sarkítási síkba hozzák és végül megkísérlik velük az interferenczia jelenségét elõállítani.

Ha a fény *szigorúan* egyszínû lenne, akkor a két sugár interferálna; ámde a mi csak közelítõleg egyszínû fénysugaraink ilyen körülmények között nem interferálnak és pedig akkor sem, ha a sugarak akármilyen vékonyak. Hogy a jelenség beálljon, e sugaraknak több milliószor vékonyabbaknak kellene lenniök, mint a legvékonyabb ismert sugárnak[18].

Itt e szerint a határhoz való átmenetben csalatkoztunk; az észnek a kísérlet elõtt kellett járnia s ha azt sikerrel teszi, annak oka az, hogy az egyszerûség ösztöne vezeti.

Az elemi jelenség ismerete arra képesít bennünket, hogy a feladatot egyenletben írhassuk fel, csak az marad még hátra, hogy az összetett, de megfigyelt és beigazolható tényt az egyenletbõl leszármaztassuk. Ezt hívják integrálásnak, ám ez a mathematikus feladata.

Azt kérdhetnõk, hogy a fizikai tudományokban az általánosítás miért használja a mathematikai alakot. Ennek az okát most könnyen felismerhetjük; nemcsak azért van ez így, mert számbeli törvényeket kell kifejeznünk, hanem azért is, mert a megfigyelhetõ jelenség nagyszámú elemi jelenségek összetevésébõl állott elõ, melyek egymás közt mindannyian hasonlók; így azután a differencziális egyenletek egészen természetes úton kerülnek bele az elméletbe.

Nem elegendõ az, hogy minden elemi jelenség egyszerû törvényeknek hódol, hanem hogy mindazok, a melyeket össze akarunk kapcsolni, ugyanazoknak a törvényeknek legyenek alávetve. Csak ilyenkor lehet a mathematika közbenjárása hasznos, mert a mathematika valóban megtanít bennünket a hasonlónak a hasonlóhoz való kapcsolására. Czélja valamely kapcsolás eredményének kitalálása, a nélkül, hogy szükségük lenne ez összetevést elemenkint külön elvégezni. Ha ugyanazt mûveletet többször meg kell ismételnünk, akkor az által kerülhetjük el a megismétlést, hogy az indukció egy bizonyos módjával elõre ismerhetjük fel az eredményt. Ezt fennebb, mathematikai okoskodás természetérõl szóló fejezetben már megmagyaráztam.

Ennek feltétele azonban az, hogy mindeme mûveletek egymás közt hasonlók legyenek; ha ez nem teljesül, akkor természetesen be kell érnünk azzal, hogy egyiket a másik után valósággal elvégezzük és a mathemalika ekkor fölöslegessé válik.

E szerint a fizikus tanulmányozta anyag közelítõleg egynemû volta folytán jöhetett létre a mathematikai fizika.

A többi természettudományokban ezek a föltételek: egynemûség, a távolesõ részek viszonylagos függetlensége, az elemi jelenségek egyszerûsége már nem találhatók meg; e természettudományok búvárai tehát kénytelenek az általánosításnak más módjait igénybe venni.

TIZEDIK FEJEZET.

A mai fizika elméletei.

A fizikai elméletek jelentõsége.

A tudományokkal nem foglalkozó emberek rendszerint meglepõdéssel tapasztalják, hogy a tudományos elméleteknek mily nagyrésze csak átmeneti jellegû. Látják, hogy néhány évi virágzás után lassacskán elhagyják õket; és látják, hogyan halmozódnak a romokra új romok; elõre látják, hogy azok az elméletek, melyek ma divatban vannak, rövid idõn belül teljesen feledésbe fognak menni, és ebbõl aztán azt következtetik, hogy az elméletek tulajdonképpen teljesen hiábavalók. Ezt nevezik azután *a tudomány csõdjének.*

Kételkedésük azonban felszínes; nem adnak maguknak: számot a tudományos elméletek céljáról és szerepérõl, mert különben beláthatnák, hogy ezek a romok mégis csak jók lehetnek valamire.

Semmi sem látszott szilárdabbnak, mint *Fresnel* elmélete, a mely a fényt az éter rezgéseinek tulajdonítja. Mindazonáltal, manapság szívesebben alkalmazzák *a Maxwell*-féle elméletet. Vajjon azt akarjuk-e ezzel mondani, hogy *Fresnel* munkája hiábavaló volt? Nem, mert *Fresnel* célja nem annak a kutatása volt, vajjon létezik-e valósággal az éter, vajjon atomokból áll-e, vagy sem, s vajjon ez atomok valóban mozognak-e ilyen vagy olyan értelemben. *Fresnel* célja volt az optikai jelenségeknek elõre való megállapítása, meghatározása.

Ámde erre *a Fresnel*-féle theoria ma éppen olyan alkalmas, mint *Maxwell* elõtt volt. Adifferenciális egyenletek mindig helyesek; ugyanazzal az eljárással mindig integrálhatók, s ezen integrálás eredményei mindíg megtartják teljes értéküket.

Nem szabad azonban azt állítani, hogy a fizikai elméleteket ilyen módon a gyakorlati szabályok egyszerû szerepére sülyesztjük; ezek az egyenletek vonatkozásokat fejeznek ki, és ha az egyenletek helyesek maradnak, ez annyit jelent, hogy az általuk kifejezett vonatkozások megtartják valódiságukat. Megtanítanak bennünket, éppen úgy mint elõbb, arra, hogy bizonyos tárgyak között bizonyos vonatkozás létezik; csakhogy ezt a dolgot mi elõbb *mozgásnak* neveztük, ma pedig *elektromos áramnak* nevezzük. Ám ezek az elnevezések csak olyan képek, melyeket *mi* helyeztünk a valódi tárgy helyére; magukat ezeket a tárgyakat a természet örökre rejtve fogja tartani elõttünk. A valódi vonatkozások ezek között a valódi tárgyak között ez az egyetlen valóság, melyet mi egyáltalában elérhetünk és ennek egyetlen feltétele az, hogy ugyanazok a vonatkozások, melyek e tárgyak között fennállanak, álljanak fenn ama képeink között is, melyeket mi kényszerûségbõl raktunk a tárgyak helyébe. Ha ezek a vonatkozások egyszer már ismeretesek elõttünk, akkor már egészen közömbös, ha az egyik képet kényelem szempontjából más képpel cseréljük fel.

Hogy ilyenféle idõnkint ismétlõdõ jelenség (például valamely elektromos rezgés) csakugyan bizonyos atom rezgésének a következménye-e, a mely atom valóban inga módjára ilyen vagy amolyan mozgást végez, az nem bizonyos, de nem is érdekes. Azt azonban, hogy az elektromos rezgés, az inga mozgása, és valamennyi szakaszos jelenség között szorosabb kapcsolat áll fenn, a mely valamely mélyebb valóság következménye; hogy ez a kapcsolat, ez a hasonlóság, vagy talán inkább párvonalasság a legapróbb részletekig is folytatódik, és hogy az általánosabb elveknek, az energia elvének meg a legkisebb mûködés elvének a következménye: ezt biztosan állíthatjuk; ebben már olyan igazságunk van, a mely ugyanaz marad, ha bármily más, nekünk alkalmasnak látszó öltözetekbe burkoljuk.

Számos elméletet ajánlottak a színszóródás magyarázatára; a legelsõk tökéletlenek voltak s az igazságnak csak töredékét foglalták magukban. Azután jött *a Helmholtz*-féle elmélet; ezt is többféleképpen módosították, sõt maga megalapítója is késõbb olyan elméletet gondolt ki, a mely *Maxwell*-féle elveken alapszik. De nevezetes dolog az, hogy *a Helmholtz* után következõ összes tudósok ugyanazon egyenletekhez jutottak el, bár látszólag egymástól egészen távol álló alapföltevésekbõl indultak ki. Hajlandó volnék azt mondani, hogy ezek az elméletek valamennyien egyenlõen igazak, nemcsak azért, mert segítségükkel ugyanazon jelenségeket láthatjuk elõre, hanem azért is, mert egy valóságos vonatkozást tüntetnek elõ az elnyelés és a szabályellenes színszórás között. A mi ezen elméletek alapfeltevéseiben igaz, azt valamennyi szerzõ elméletében felleljük. Ez pedig annak az állítása, hogy bizonyos dolgok között ilyen vagy amolyan vonatkozás áll fenn, a mely dolgokat az egyik így, a másik amúgy nevez el.

A gázok kinetikai elmélete sok ellenvetésre adott alkalmat, a melyekre nehéz lenne megfelelni, ha itt ezen elméletben feltétlen igazságot akarnánk látni; mindazonáltal ezek az ellenvetések nem gátolták meg ezen elméletet abban, hogy hasznos legyen, különösen az által, hogy igaz vonatkozást tárt elénk, a mely nélküle mélységesen el lett volna rejtve: az ozmózis nyomásnak a gáznyomáshoz való viszonyát.[20] Ilyen értelemben az elméletet helyesnek mondhatjuk.

Ha a fizikus oly két elméletnek egymással való ellenmondását állapítja meg, a mely neki egyaránt becses, akkor így okoskodik: Ne nyugtalanítson ez bennünket, hanem a láncz két végét tartsuk még akkor is erõsen, ha a lánczszemek elõttünk rejtve maradnak is. A zavarba hozott theológusra valló ezen érv nevetségesnek látszanék, ha a fizikai elméleteknek olyan értelmet tulajdonítanánk, mint a hozzá nem értõ emberek: ellenmondás esetén legalább is az egyiket hamisnak kell tartanunk. Másképpen áll azonban a dolog, ha azt keressük, a mit bennük valóban keresnünk kell. Megtörténhetik, hogy ezek az elméletek egyik vagy másik vonatkozást helyesen tárnak fel és hogy az ellenmondás csak azokban a képekben rejlik, a melyekbe mi a valóságot öltöztettük.

Ha valaki azt mondaná, hogy mi ezáltal a tudósnak hozzáférhetõ területet nagyon megszorítjuk, ezt felelném reá: Azok a kérdések, a melyeket mi elzárunk és melyeket önök sajnálnak, nemcsak megoldhatatlanok, hanem csalóka és minden értelem nélküli kérdések.

Némely filozófus azt állítja, hogy az egész fizikát meg lehet magyarázni az atomok kölcsönös ütközése alapján. Ha ezzel egyszerûen azt akarja mondani, hogy a fizikai jelenségek között ugyanazok a vonatkozások állanak fenn, mint a nagyszámú golyók kölcsönös ütközésénél, akkor nagyon jó dolgot állít; ez igazolható és talán még igaz is. Ámde õ többet akar mondani és mi azt hiszszük, hogy megértjük õt, mert tudni véljük, hogy az ütközés önmagában véve tulajdonképpen micsoda; és pedig honnan? Egyszerûen onnan, hogy tekejátékot gyakran végignéztünk. Érthetõ-e az, hogy az Istennek, mikor munkáját szemügyre veszi, ugyanolyan érzetei vannak-e mint nekünk, a mikor egy tekejátszmát végignézünk? Ha ama filozófus állítását nem akarjuk ilyen különös értelemmel felruházni és ha annál kevésbé akarunk azzal a szûk, de egyedül helyes értelemmel megelégedni, a melyet éppen az imént fejtettem ki, akkor annak az állításnak semmi értelme nincs.

Az ilyen természetû föltevéseknek csak mint hasonlatoknak van értelmük. A búvár éppen oly kevéssé lehet meg nélkülük, mint a költõ a hasonlat nélkül, de sohasem szabad elfelejtenie, hogy milyen értékük van. Hasznosak lehetnek, ha az értelmet kielégítik és nem lesznek ártalmasak, feltéve, hogy közömbös föltevések.

Ezek a megfontolások magyarázzák meg azt, hogy bizonyos elméletek, melyekrõl azt hiszik, hogy a tapasztalat által teljesen meg vannak czáfolva és végképpen megdõltek, hamvaikból ismét kikelnek, hogy új életet kezdjenek. Ez azért van így, mert igazi vonatkozásokat fejeznek ki; és ugyane vonatkozásokat fejezik ki még akkor is, mikor azt hittük, hogy ilyen vagy amolyan oknál fogva eme vonatkozásokat más nyelven kell kifejeznünk. Ilyenformán megtartották úgyszólván lappangó életüket. Mintegy tizenöt éve mily nevetségesnek, együgyûnek tartották azt a *Coulomb*-féle elektromos folyadékok elavult játékát. És ime, mégis feltámadott és felszínre került újra az *elektrónok* neve alatt.

Ezek a valamilyen állandó módon elektromossá tett molekulák, vajjon miben különböznek *Coulomb* elektromos molekuláitól? Igaz ugyan, hogy az elektrónoknál az elektromosságot, bár csekély tömegû, de mégis valamelyes anyaghoz kötve gondoljuk: más szóval, az elektrónoknak tömegük is van (sõt ma még ezt is kezdik kétségbe vonni), de *Coulomb* sem képzelte el az õ folyadékait tömeg nélkül válóknak, vagy ha tette is, minden esetre sajnálattal tette. Vakmerõség volna másrészrõl azt állítani, hogy az elektrónokba vetett mai hitünk idõvel nem fog megváltozni; éppen ezért nem kevésbé érdekes erre a váratlan újjászületésre figyelmeztetni.

A legmeglepõbb példa azonban *a Carnot* féle elv.[21]

Carnot ezt az elvet hamis feltevésekbõl kiindulva állapította meg. Mikor felfedezték, hogy a hõ nem megsemmisíthetetlen, hanem munkává átalakítható, teljesen elvetették ezeket az õ eszméit. Azután *Clausius* visszatér ezen eszmékre s az elvet véglegesen gyõzelemre segíti. *Carnot* elmélete eredeti alakjában a valóságos vonatkozások mellett még más nem pontos vonatkozásokat is tartalmazott, a régi eszmék maradványait; de ezeknek a jelenlétele a többiek valódiságára nem volt hatással: *Clausiusnak* csak el kellett távolítania ezeket a maradványokat, mint a hogy az elhalt ágakat lenyesik.

Az eredmény a thermodinámika második fõtétele volt. Mindig ugyanazon vonatkozásokról volt szó, jóllehet legalább látszólag, ezek a vonatkozások nem ugyanazon tárgyak között állottak fenn. Ez elegendõ volt arra, hogy az elv megtartsa érvényességét. Magának *Carnotnak az* okoskodásai nem járták le magukat; annak idején ez okoskodásokat helytelen anyagra alkalmazták; alakjuk azonban, tehát a lényeg, helyes maradt.

Az, a mit az imént elmondottam, egyszersmind az általános elvek szerepét is megmagyarázza, mint a milyenek a legkisebb mûködés elve vagy az energia megmaradásának az elve.

Ezek az elvek nagyon becsesek, úgy jutottak hozzájuk, hogy kutatták, hogy mi a közös a számos fizikai törvény kifejezésében; végtelen számú megfigyelések leszûrt igazsági ezek az elvek.

Magának ezen általánosságnak azonban oly következménye van, a melyre az olvasó figyelmét a nyolczadik fejezetben már felhívtam: ezek az elvek már nem igazolhatók. Mivel az energia általános fogalmi meghatározását nem adhatjuk meg, az energia megmaradásának az elve egyszerûen csak annyit jelent, hogy létezik *valami,* a mi állandó marad. Ámde bármilyenek legyenek is azok az újabb képzeteink, melyeket a jövõ kísérleteitõl a világra vonatkozólag várhatunk, az az egy elõre is bizonyos, hogy lesz valami, a mi állandó marad, s a mit mi *energiának* nevezhetünk.

Annyit akar-e ez jelenteni, hogy az elvnek magának semmi értelme nincs és hogy az egész nem más, mint azonossági állítás? Semmi szín alatt; ez az elv annyit jelent, hogy azok a különbözõ dolgok, a melyeket mi *energiának* nevezünk, valamelyes valóságos rokonságban vannak egymással; és az elv ennek a közöttük fennálló vonatkozásnak valóságos létezését állítja. Ha azonban az elvnek van valamely meghatározott értelme, akkor téves is lehet; valószínûleg nincs jogunk az alkalmazását határtalanul kiterjeszteni, habár már elõre bizonyos, hogy a szó szoros értelmében véve igazoltnak fogjuk találni; hogyan tudjuk meg, hogy jogos kiterjeszthetõségének határát már elérte? Egyszerûen onnan, hogy az elv már megszûnik számunkra hasznosnak lenni, azaz már nem képesít bennünket arra, hogy az új jelenségeket csalódás nélkül elõre lássuk. Ilyen esetben bizonyosak vagyunk benne, hogy az elvben kimondott vonatkozás már nem a valóságos, mert ellenkezõ esetben az elv még termékeny lenne; a kísérlet ilyen módon elítélné az elv újabb kiterjesztését, anélkül, hogy vele közvetlenül ellenmondásba keverednék.

A fizika és a mechánikai szerkezet.

A legtöbb elméleti fizikus szereti a mechánikából vagy a dinámikából vett magyarázatokat. Közülük néhányan ki volnának elégítve, ha az összes jelenségeket a molekulák mozgásaiból magyarázhatnák meg, melyek egymást bizonyos törvények szerint vonzzák. Mások többet kívánnak; a távolból való vonzásokat egészen ki akarják küszöbölni ; molekuláiknak egyenes vonalú pályát kell követniök, a melybõl csak ütközések folytán téríthetõk el. Ismét, mások, mint például *Hertz*, az erõket is kiküszöbölik, de felteszik, hogy molekuláik hasonló geométriai kapcsolatokkal függenek egymással össze, mint például a mi csuklós mechánikai rendszereink; ezek a tudósok a dinámikát így a kinematika bizonyos fajára akarják visszavezetni.

Egyszóval, a természetet mindnyájan be akarják kényszeríteni valamely mintába, a mely nélkül szellemük nem lenne kielégítve. De vajjon elég hajlékony lesz-e a természet erre a czélra?

A kérdést a *Maxwell*-féle elmélet kapcsán a tizenkettedik fejezetben fogjuk tárgyalni. Mindenkor, ha az energia megmaradásának elve és a legkisebb mûködés elve ki van elégítve, akkor, amint látni fogjuk, nemcsak *egy* mechánikai magyarázat lehetséges, hanem végtelen sok. A *Königs*-féle jól ismert, a csuklós rendszerekrõl szóló tétel alapján bebizonyítható, hogy mindent végtelen sokféle módon lehet megmagyarázni *a Hertz-féle* szilárd kapcsolatokkal vagy még középponti erõkkel is. Kétségkívül éppen olyan könnyû szerrel bebizonyítható, hogy minden megmagyarázható egyszerû ütközésekkel is.

E czélból tulajdonképpen nem szükséges megelégednünk a rendes anyaggal, azzal, a mely éppen közvetlenül érzékeink alá esik s a melynek a mozgását közvetlenül szemléljük. Vagy felteszszük, hogy ez a közönséges anyag atomokból áll, a melyeknek belsõ mozgásai elõttünk rejtve maradnak, míg érzékeink számára csak az egésznek helyváltozásai hozzáférhetõek. Vagy pedig ki fogunk gondolni valami rendkívül ritka folyadékot, a milyenek *éter* vagy más név alatt a fizikai elméletekben mindig olyan nagy szerepet játszottak.

Sokszor még messzebb mennek, s az étert az egyedüli õsanyagnak, sõt sokszor az egyedüli valóságos anyagnak tekintik. A legmérsékeltebbek úgy tekintik a közönséges anyagot, mintha sûrített éter volna s ebben nincs is semmi idegenszerû. Mások a közönséges anyag jelentõségét még lejebb szállítják, s nem látnak benne mást, mint az éter szinguláritásainak mértani helyét.[22] Például *Lord Kelvin* szerint az, a mit mi *anyagnak* nevezünk, csak azoknak a pontoknak a helye, a hol az éter forgatagszerû mozgásokat végez. *Riemann* szerint az anyag olyan pontoknak a helye lenne, a hol az éter folytonosan megsemmisül. Más újabb szerzõk mint *Wiechert* és *Larmor* szerint, az anyagi pontokban az éter igen különös természetû csavarásszerû hatásnak van alávetve. Ha e nézõpontok valamelyikére helyezkedünk, kérdem, hogy mi jogon terjesztik ki az éterre azon ürügy alatt, mintha az valóságos anyag volna, azokat a mechánikai sajátságokat, a melyeket csak a közönséges anyagon (azaz e felfogások szerint hamis anyagon) észleltek?

A régi folyadékokat, a. hõ, elektromosság stb. folyadékait elvetették, a mint rájöttek, hogy a hõ nem megsemmisíthetlen. De elvetették volna ezeket még más okból is. Az által, hogy anyagi tulajdonsággal ruházták fel õket, úgyszólván egyéniségüket hangsúlyozták s ezáltal mély szakadékszerû határt vontak köréjük. E mélységeket ismét ki kellett tölteniök, mikor a természet egysége iránti érzék egyre erõsebb lett és mikor azokat a belsõ rokonságokat felfedezték, a melyek a természet minden részét egymáshoz fûzik.

A régi fizikusok, szaporítva e folyadékok számát, nemcsak felesleges dolgokat teremtettek, de ezzel felbontották a valóságos kapcsolatokat is.

Nem elegendõ az, hogy valamely elmélet ne állítson hamis vonatkozásokat, szükséges még az is, hogy az igazi vonatkozásokat el ne födje.

S a mi éterünk vajjon csakugyan létezik-e?

Tudjuk, hogy az éterben való hit honnan ered. Ha a fény valamely távoli csillagból több év alatt kerül el hozzánk, bizonyos idõpontban már nincsen a csillagon, de még nincsen a Földön; mivel azonban szükséges, hogy valahol legyen, valamely anyagot tételezünk fel, mely úgyszólván szállítja a fényt.

Ugyanezt a gondolatot inkább mathematikai és elvont alakban is kifejezhetjük. Mi az anyagi molekulák szenvedte változásokat veszszük észre; látjuk például, hogy fotográfozó lemezünk olyan jelenségek hatása alatt változik, a melyek színtere több évvel ezelõtt valamely csillag izzó tömege volt. A közönséges mechánikában azonban a tanulmányozott rendszer minden idõpontbeli állapota csakis valamely közvetetlenül elõbbi állapotától függ; a rendszer így eleget tesz bizonyos differencziális egyenleteknek. Ha ellenben az éterben nem hiszünk, a világegyetem anyagi állapota nemcsak a közvetlen megelõzõ állapottól, hanem sokkal régebbi állapotoktól is függ; a rendszer véges különbségi egyenleteknek tenne eleget. Hogy a mechánika általános törvényeinek eme csorbítását elkerüljük, kitaláltuk az étert.

Ez azonban még csak arra kényszerítene bennünket, hogy a bolygók közötti üres teret töltsük ki éterrel, de arra nem, hogy az étert az anyagi közegek belsejébe is beleképzeljük. *Fizeau* kísérlete[23] még tovább megy. A mozgásban lévõ vizet vagy levegõt átható fénysugarak interferencziája révén ez a kísérlet két különbözõ közeget látszik elárulni, melyek egymást kölcsönösen áthatják és egymáshoz képest mégis eltolódnak. Azt hihetné az ember ennek alapján, hogy az étert már-már az ujjunkkal tapinthatjuk.

Olyan kísérleteket is kigondolhatunk, melyek az étert hozzánk még közelebbi látszólagos érintkezésbe hozzák. Tegyük fel, hogy a *Newton*-féle hatás és visszahatás egyenlõségének az elve nem igaz többé, ha magára az anyagra alkalmazzuk és hogy ezt észre tudtuk venni. Az összes anyagi molekulákra ható összes erõk geométriai összege ezen esetben nem zérus többé. Ha tehát az egész mechánikát nem akarjuk megváltoztatni, be kell hoznunk az étert, hogy ezt a hatást; melyet az anyag elszenvedni látszik, az anyagnak valami másra gyakorolt hatása ellensúlyozza.

Vagy pedig felteszem azt, hogy felismerték, hogy a fény- és elektromos jelenségekre a Föld mozgása hatást gyakorol. Arra a következtetésre juthatnánk, hogy ezek a jelenségek nemcsak az anyagi testek viszonylagos mozgását tárhatnák föl elõttünk, hanem abszolutnak látszó mozgásaikat is: Megint szükségünk van az éter létezésére, hogy ezek az úgynevezett abszolut mozgások ne az üres térre vonatkoztatott helyváltozások legyenek, hanem hogy a helyzetváltoztatások valamely meghatározott dologra vonatkozzanak.

Vajjon eljutunk-e valaha idáig? Nekem nincs hozzá reménységem, mindjárt megmondom miért, de azért a dolog mégsem oly képtelen, hiszen mások tápláltak hasonló véleményeket.

Például ha *a Lorentz*-féle elmélet, melyrõl késõbb a tizenharmadik fejezetben részletesen fogok beszélni, helyes lenne, akkor a *Newton*-féleelv *magára az anyagra* nem lenne alkalmazható, s az így elõálló különbség nem állana nagyon messze a kísérleti kimutatás lehetõségétõl.

Másrészrõl számos vizsgálatot végeztek már a Föld mozgásának a hatására vonatkozólag.

A kísérletek e hatást egyetlen esetben sem mutatták. Ámde ezeket a kísérleteket azért végezték, mert az eredmény felõl elõre nem voltak bizonyosak és mert az uralkodó elméletek szerint e kiegyenlítés csak közelítõ volt, tehát volt remény arra, hogy szabatos módszerekkel a hatás valóban kimutatható.

Én azt hiszem, hogy az ilyen reménység csak ábránd; az sem lenne kevésbé különös, ha valaki bebizonyítaná, hogy az ily irányban elért siker bizonyos tekintetben új világot nyitna meg elõttünk.

És most kissé el kell térnem a tárgytól; valóban meg kell magyaráznom, hogy *a Lorentz*-féleelmélet ellenére miért nem hiszem, hogy akár a legpontosabb megfigyelések is mást tárhatnának elénk, mint az anyagi testek viszonylagos helyváltozásait. Kísérleteket végeztek az elsõrendû tagok hatásának megismerése czéljából; az eredmény negatív volt; vajjon a véletlennek tulajdonítsuk-e ezt? Senki sem gondolt ilyesmire; általános magyarázatot kerestek és *Lorentz* megtalálta, bebizonyítván, hogy az elsõrendû tagoknak egymást kölcsönösen, eredményükben meg kell semmisíteniök, de ugyanez már nem mondható másodrendû tagokról. Erre ismét még pontosabb kísérleteket végeztek, ezek sem mutatták a keresett hatást, a mit még kevésbbé lehet a véletlennek betudni. Magyarázatra volt szükség; akadt is magyarázat; akad mindig, hiszen a föltevésekben soha sincsen hiány.

Ez sem elég; ki ne érezné, hogy a véletlennek ilyen módon túlnagy szerepet engedünk át? Avagy nem véletlen-e az a váratlan összetalálkozás, hogy valamely körülmény éppen a megfelelõ idõben jön közbe, hogy megsemmisítse az elsõrendû tagokat; és hogy egy másik, az elõbbitõl merõben különbözõ, de éppen olyan szerencsés körülmény, a másodrendû tagokat semmisíti meg. A dolog nincs úgy; úgy az elsõ, mint a másodrendû tagok megsemmisülésére ugyanazt a magyarázatot kell lelnünk s akkor gondolhatjuk azt is, hogy ez a magyarázat a magasabb rendû tagokra éppen úgy érvényes, s hogy az összes tagoknak eme kölcsönös megsemmisülése feltétlen és szigorú.

A tudomány mai állapota.

A fizika fejlõdésének történetében egymással ellentett két irányt különböztethetünk meg. Egyrészrõl idõnként újabb kapcsolatokat fedeznek fel azok között a tárgyak között, melyek egymástól örökre távol állóknak látszottak; a szétszórt tények már nem idegenek egymásra nézve és oda törekszenek, hogy egy hatalmas egészszé alakuljanak. A tudomány az egyszerûség és az egységesség felé halad.

Másrészt az újabb megfigyelések e közben újabb jelenségeket tárnak elénk; sokáig kell helyre várakozniok és sokszor le kell bontanunk az épületnek egy részét, hogy helyük legyen. Azokban az ismert jelenségekben is, a hol a mi tökéletlen érzékszerveink még egyszerûséget tüntetnek fel, napról-napra újabb változatos részleteket veszünk észre; a mit egyszerûnek hittünk, összetetté lesz és a tudomány az összetettség és a bonyolódottság felé látszik haladni.

A két ellentett áramlat közül, melyeknek hol egyike, hol a másika tolul elõtérbe, melyik fog végleg gyõzedelmeskedni? Ha az elõbbi, akkor a tudomány lehetséges; ám ezt a priori semmi sem bizonyítja és van okunk reá, hogy attól tartsunk, hogy miután hiába törekedtünk belekényszeríteni a természetet a mi egység-eszményünkbe, új gazdagságunk növekvõ árama elsodor bennünket és le kell mondanunk a jelenségek osztályozásáról és egység-eszménk elhagyásával a tudományt a tények számtalan eseteinek leltározására kell majd lealacsonyítanunk.

Erre a kérdésre nem felelhetünk: Mást nem tehetünk, mint hogy megfigyeljük a mai tudomány állását és összehasonlítjuk a tegnapiéval. Ebbõl a vizsgálatból aztán kétségkívül alkothatunk magunknak némi sejtelmet.

Ötven évvel ezelõtt rendkívüli reményeket tápláltak. Az energia megmaradása elvének és az energia átalakulásának felfedezése nyilvánvalóvá tette az erõ egységét. Megtudtuk belõle, hogy a hõjelenségek molekula-mozgásokkal magyarázhatók. Nem tudták ugyan pontosan, hogy e mozgások természete milyen, de nem kételkedtek benne, hogy mielõbb meg fogják tudni. A fényre nézve a kérdés látszólag sikeres megoldást nyert. Az elektromosságra vonatkozólag kevesebbet lehetett elérni. De már az elektromosság jelensége szorosan a mágnességéhez fûzõdött, s ez jelentékeny és döntõ lépés volt az egységesség felé. De vajjon az elektromosság a maga részérõi hogyan léphet be az általános egységbe, hogyan illeszkedhetik bele a mindenség szerkezetébe? Errõl fogalmuk sem volt. De hogy ez lehetséges, azt senki kétségbe nem vonta, sõt határozottan hitték a dologban. Az anyagi testek molekuláris sajátságait illetõleg ez az egyesítés még könnyebbnek látszott, bár a részletekét sûrû köd takarta. Szóval messzemenõ és élénk, ámde hiu remények voltak ezek.

Lássuk most a mai állapotokat.

Mindenekelõtt az elsö haladás az óriási lépés: Az elektromosság és a fény egymáshoz való vonatkozásai ismertekké váltak, a fény, az elektromosság és a mágnesség elõbb elkülönített három birodalma ma egyet alkot, s ez az összeolvadás végérvényesnek látszik.

Igaz, hogy ezek a vívmányok némi áldozatot is kívántak. A fényjelenségek az elektromos jelenségek különös eseteivé váltak; addig, a míg elszigetelve állottak, könnyû volt õket olyan mozgás-jelenségekkel megmagyarázni; melyekrõl azt hittük, hogy minden részletükben ismeretesek; minden jól ment, a míg a fény egyedül volt. Hogy azonban a magyarázat elfogadható legyen; ma már az is szükséges, hogy az az egész elektromosság birodalmára is kiterjeszthetõ legyen. Ámde ez már nem megy minden nehézség nélkül.

Az elméletek közül még a *Lorentz*-féleelégít ki minket legjobban, a mely elmélet, mint ahogyan az utolsóelõtti fejezetben látni fogjuk, az elektromos áramot kicsiny elektromozott részecskék mozgásával magyarázza. Ez kétségtelenül a legjobban foglalja össze az ismert tényeket, ez; tünteti elõ a legtöbb valódi vonatkozást, s ennek lehet majd a legtöbb nyomát fellelni a végleges összefoglaló elméletben. De *Lorentz* elméletének is van egy súlyos hibája, a melyrõl fennebb már beszéltem: ellenmondásban áll a *Newton*-féleelvvel, a hatás és visszahatás egyenlõségének az elvével, vagy helyesebben *Lorentz* szerint ez az elv egyedül magára az anyagra nem alkalmazható. Hogy ebben az esetben is helyes legyen az elv, az éternek az anyagra gyakorolt hatását is számba kellene venni, nemkülönben az anyagnak az éterre gyakorolt visszahatását. De addig, a míg újabb tapasztalatok nem merülnek fel, valószínûnek tarthatjuk, hogy a dolgok nem így folynak le.

De akárhogy állanak is a dolgok *Lorentz* munkái következtében: *Fizeau* eredményei a mozgó testek fénytanára vonatkozólag, a rendes és a rendellenes színszóródás, meg a fény-elnyelés törvényei oly módon fûzõdnek egymáshoz és az éter más sajátságaihoz, hogy ezen kapcsolatok kétségkívül nem szakadnak el többé. Ime a *Zeemann*-féle új jelenség[24] milyen könnyû szerrel lelte meg kész helyét a rendszerben, sõt még a fény sarkítási síkjának *Faraday*-félemágneses elforgatását[25] is segítette ez az elmélet a rendszerbe beilleszkedni, a mely jelenség *Maxwell* törekvéseinek is ellenállott. Hogy mindez mily könnyen sikerül, eléggé bizonyítja, hogy *a Lorentz*-féleelmélet nem mesterkélt, romlásra hivatott munka. Valószínû, hogy módosításra szorul, de nem fog romba dõlni.

De *Lorentz*-nek nem volt más szándéka, mint az, hogy elméletével a mozgó testek egész fénytanát és elektrodinámikáját egy egészszé egyesítse; nem volt szándékában e jelenségek mechánikai magyarázatát megadni.

Larmor már tovább ment, megtartva *Lorentz* elméletének a lényegét, úgyszólván telítette ezt *Mac-Callagh-nak* az éter mozgási irányaira vonatkozó nézeteivel. Szerinte az éter sebessége ugyanolyan irányú és nagyságú, mint a mágnességi erõ, e sebesség tehát meghatározható, mert hiszen a mágnességi erõ kísérleti úton lemérhetõ. Bármilyen szellemes is ez a kísérlet, *Lorentz* elméletének a hibái mégis fennmaradnak, sõt súlyosbodnak. A hatás nem egyenlõ a visszahatással, *s Lorentz* elméletébõl nem tudtuk meg, hogy melyek az éter mozgásai; e bizonytalanság következtében szerencsére olyannak vehettük fel azokat, mint a melyek az anyag mozgását kiegyenlítve, ezen a réven a hatás és ellenhatás közötti egyenlõséget visszaállítják. *Larmor* szerint ismerjük az étermozgásokat és megállapíthatjuk, hogy a kiegyenlítõdés nem történik meg.

Vajjon ha *Larmor* kísérlete az én felfogásom szerint nem sikerült, ez azt akarja-e jelenteni, hogy a mechánikai magyarázat lehetetlen? Szó sincs róla. Fennebb már mondottam, hogy a mint valamely jelenség az energia elvének és a legkisebb mûködés elvének engedelmeskedik, végtelen sokféle mechánikai magyarázatot enged meg; ez tehát alkalmazható a fénytani és az elektromos jelenségekre is.

De ez még nem elegendõ. Arra nézve, hogy valamely mechánikai magyarázat jó legyen, kell, hogy egyszerû legyen; szükséges, hogy az összes lehetõ magyarázatok közül más okunk is legyen elfogadására, mint az, hogy egyáltalában választanunk kellett. Ámde olyan elméletünk, a mely e feltételnek eleget tesz, tehát használható is valamire, egyelõre nincs, de van-e okunk e miatt panaszra? Ha panaszkodunk, elfelejtjük a kitûzött czélt, mert nem a szerkezet az igazi, az egyedüli czél, hanem az egységesség.

Törekvéseinket egy kissé mérsékelnünk kell, ne fogjunk egyelõre mechánikai magyarázat megfogalmazásába, hanem elégedjünk meg annak kimutatásával, hogy mindig tudnánk magyarázatot találni, ha akarnánk. E tekintetben a megoldás sikerült, mert az energia megmaradásának az elve mindig csak megerõsítést nyert; egy másik elv is csatlakozott még hozzá, a legkisebb mûködés elve, mely a fizikában használható alakra hozható. Ez is egyre csak megerõsítést nyert, legalább is a megfordítható folyamatokra nézve, melyek *Lagrange* egyenleteinek, azaz a mechánika általános törvényeinek megfelelnek.

A meg nem fordítható jelenségek sokkal rakonczátlanabbak. De még ezek is rendezõdnek, s úgy látszik, mintha szintén az egységesség felé törekednének. *Carnot* tétele vetett rájuk világot. A thermodinámika sokáig csak a testek kiterjedésével és halmazállapotuk változásának vizsgálatára szorítkozott. Egy idõ óta sokkal merészebb lett és birodalmát jelentékenyen kiterjesztette. Tõle kaptuk a galvánelemek és a hõelektromos jelenségek elméletét. Nincs a fizikának olyan része, a melyet ki ne kutatott volna, sõt még a chemiába is behatolt. Mindenütt ugyanazok a törvények uralkodnak, s mindenfelé megleljük *Carnot* tételét, bár különbözõ álarczok alatt; mindenütt felleljük az entrópiának ama bámulatosan elvont fogalmát, a mely éppen olyan általános, mint akár az energiáé, s úgy látszik, éppen úgy mint ez, valami valósággal létezõt takar. Egy ideig úgy látszott, hogy a sugárzó hõ a *Carnot-féle* elvnek nem felel meg; újabban láttuk, hogy mégis csak ugyanezen törvényeknek hódol.

Ilyen módon újabb hasonlóságok nyomára jöttünk, a melyek gyakran egészen a részletekig követhetõk; az ohmikus ellenállás a folyadékok szívósságához hasonlít, míg a hiszterézis (utóhatás) inkább a szilárd testek surlódásához. A surlódás mindenesetre általános mintája a legkülönbözõbb megfordíthatatlan jelenségeknek; valódi és mélyremenõ rokonság ez.

E jelenségekre is kerestek tulajdonképpeni mechánikai magyarázatot. De e jelenségek erre nem alkalmasak. Hogy mechánikai magyarázatot találhassunk, azt kellene feltenni, hogy a megfordíthatatlanság csak látszólagos, hogy az elemi jelenségek megfordíthatók és a dinámika ismert törvényeit követik. De ez elemek igen számosak és egyre jobban és jobban összekeverednek oly módon, hogy a mi kevéssé éles szemûnk elõtt az egész egyformának fog látszani, oly módon, mintha minden változás ugyanazon értelemben haladna tovább, a visszatérés minden reménye nélkül. A színleges megfordíthatatlanság e szerint csak a nagy számok törvényének egyik eredménye.

Csak az olyan lény, mely rendkívül finom érzékekkel rendelkezném, mint *Maxwell* képzelt démonja,[26] tudná csak kibogozni ezt a megoldhatatlan csomót, s a világrendszert bírhatná visszafordulásra.

Ez a felfogás, mely a gázok kinetikai elméletéhez kapcsolódik, igen nagy munkát igényelt és végeredményében nem volt valami termékeny, de a jövõben még termékeny lehet. Hogy vajjon nem vezet-e ellenmondásokra és hogy vajjon a dolgok valóságos természetével összhangban van-e, annak vizsgálata nem ide való.

Említsük meg mindenesetre *Gouy*-nek *a Brown*-félemozgásra[27] vonatkozó eredeti nézeteit. E búvár szerint ez a különös mozgás nem volna alávetve a *Carnot*-féleelvnek. A gerjesztett részecskék sokkal kisebbek, mint a fennebb említett összebogozott csomók szemei; tehát e szerint képesek lennének ezeket a csomókat kioldani, s ez által a világ folyását ellenkezõ irányba terelni.

Az ember ebben mintegy látni véli *Maxwell* démonját munkájában.

Végeredményben a régóta ismert jelenségek egyre jobban és jobban osztályozhatók, de jönnek az újak is és követelik a helyeiket; a legtöbb közülök, mint a *Zemann*-féle meg is lelte rögtön a magáét.

Ám itt vannak a kathod-sugarak, az X-sugarak, az uránium és a rádium sugarai. Egy egész új világ, melyet senki nem sejtett. Milyen váratlan vendégeket kell elhelyeznünk!

Ma még senki nem láthatja elõre azt a helyet, melyet el fognak foglalni. De nem hinném, hogy az általános egységet zavarni fognák; sokkal inkább hiszem, hogy azt ki fogják egészíteni. Valóban egyrészrõl ezen új jelenségek[*] a lumineszczenczia[28] jelenségeivel látszanak összefüggésben lenni, nemcsak fluoreszczencziát okoznak, hanem gyakran ugyanolyan körülmények között jönnek létre, mint a fluoreszczenczia.

Úgy látszik, hogy azzal az okkal is rokonságban állanak, a mely az ibolyántúli fény hatására az elektromos szikrát megindítja.

Végül és fõképpen azt hiszik, hogy ezekben a jelenségekben megtalálták a valóságos iónokat, a melyek itt hasonlíthatatlanúl nagyobb sebességgel mozognak, mint az elektrolitokban.

Mindez még meglehetõs határozatlan, de egykor tisztázódni fog.

A foszforeszczenczia, továbbá a fénynek az elektromos szikrára való hatása a fizikának kissé félreesõ zugai, a búvároktól meglehetõsen elhanyagolt területek. Most remélhetjük, hogy új út épül, a mely eme területeknek az általános tudománynyal való összekapcsolását megkönnyíti.

Nemcsak új jelenségeket fedezünk fel, hanem azokban; a melyeket már ismerteknek vélünk, váratlan új nézõpontok nyílanak.

A szabad éterben a törvények megõrzik fenséges egyszerûségüket, de a tulajdonképpeni anyag mindig összetettebbnek és összetettebbnek látszik; mindaz, a mit errõl mondanak, csak megközelítõ, képleteink minden pillanatban újabb tagokat követelnek.

Ámde azért a kereteink nem törtek össze; azok a vonatkozások, melyeket a látszólag egyszerû tárgyak között felismertünk, akkor is épségben maradnak közöttük, mikor összetettségüket megismerjük, és egyedül ez fontos. Habár egyenleteink egyre bonyolódottabbak lesznek, hogy a természet összetettségéhez minél jobban hozzásimuljanak, ám azért semmi sem változott meg azon összefüggésekbõl, melyek segélyével ezen egyenleteket egymásból levezethetjük. Egyszóval ezen egyenletek alakja megmaradt.

Vegyük fel példának a fény visszaverõdése törvényeit. *Fresnel* egyszerû és csábító elméletével, melyet a tapasztalat is megerõsíteni látszott, levezette e törvényeket. Azóta újabb tökéletesebb vizsgálatok azt mutatták, hogy ez az igazolás csak megközelítõ; az újabb vizsgálatok mindenütt az elliptikus sarkítás nyomait árulták el. Ámde az elsõ megközelítésre támaszkodva, azonnal meglelték e rendellenesség okát, a mely fénytani szempontból különbözõ két közeg közös határán fellépõ átmeneti réteg jelenlételének folyománya; e szerint a *Fresnel*-féle elmélet lényegében továbbra is megmaradt.

De azért bizonyos megfontolás elõl még sem zárkózhatunk el: mindezek a vonatkozások észrevétlenek maradtak volna, ha kezdetben sejtelmünk lett volna ama tárgyaknak összetett voltáról, a melyeket összekapcsolnak. Régen megmondották már: Ha *Tycho*-nak tízszer pontosabb mûszerei lettek volna, soha sem akadt volna sem egy *Kepler,* sem egy *Newton*, sem nem keletkezhetett volna a csillagászat. Valamely tudományra nézve szerencsétlenség, ha oly késõn születik, mikor a megfigyelõ eszközök már amúgy is nagyon tökéletesek. Így vagyunk ma a fizikai chemiával. Megalapítói vizsgálataikban a harmadik és a negyedik tizedessel is törõdnek; szerencsére õk erõshitû emberek.

Minél jobban ismerjük az anyag sajátságait, annál inkább látjuk a folytonosság uralmát. *Andrews* és *Van der* Waas[29] munkái óta tudjuk, hogyan történik az átmenetel a cseppfolyós halmazállapotból a gázállapotba és tudjuk, hogy ez az átmenet nem következik be hirtelenül. Hasonlóképpen azután nincsen válaszfal e szilárd és a cseppfolyós állapot között sem, s egy nem régen tartott kongresszus nyomtatott jelentéseiben látni lehetett, egy oly dolgozat mellett, a mely a folyadékok szilárdságáról szólott, egy másik értekezést, a mely a szilárd testek folyósságával foglalkozott.[30]

Ilyen irányzatok között kétségkívül elvész az egyszerûség; valamely jelenséget elõbb néhány egyenes vonalból álló képben ábrázoltak, ma már ezeket az egyeneseket többé-kevésbbé összetett természetû görbével kell egymásba átvezetnünk. Pótlásúl így sokat nyer az egységesség. Ezek az egymástól elhatárolt jelenségcsoportok kipihentették ugyan az elmét, de nem elégítették ki.

Végre a fizikai módszerek újabb területet hódítottak meg, a chémia birodalmát. Megszületett a fizikai chémia. Fiatal tudomány ez még, de már is látszik, hogy képesek leszünk vele összekapcsolni egyes jelenségeket, mint a milyenek az elektrolizis, az ozmozis, az iónok mozgása. Mit következtessünk ebbõl a rövid bemutatásból?

Végeredményben az egységességhez közelebb jöttünk; nem ment ugyan olyan gyorsan, mint a hogy ötven év elõtt hitték, nem is követték mindig az elõre sejtett útat, de végeredményben mégis igen nagy területet nyertünk.

**Poincaré* e jelenségek létezését nagy valószin séggel megjósolta. *A fordító.*

TIZENEGYEDIK FEJEZET.

A valószínûség-számítás.

Kétségkívül mindenkit meg fog lepni, hogy e helyen a valószínûség-számításra vonatkozó meggondolásokat talál. Mi köze ennek a fizikai tudományok módszereihez?

És mégis, a filozófus elõtt, a ki a fizika fölött elmélkedni akar, egészen természetesen merülnek fel ama kérdések, melyeket magam is csak felvetek, de meg nem oldok.

Annyira, hogy már a megelõzõ két fejezetben is többször kellett használnom a "valószínûség" és "véletlen" szavakat.

Éppen fentebb mondtuk, "hogy az elõrelátható események legfeljebb csak valószinûek lehetnek." És bármennyire alaposan indokoltnak is lássék az elõrelátásunk, még sem lehetünk benne *teljesen* bizonyosak, hogy a tapasztalat igazolni fogja-e következtetéseinket. Avalószínûség azonban gyakran oly nagy, hogy ezzel a gyakorlatban megelégedhetünk.

És valamivel alább hozzátettem: "Lássuk, hogy az egy- szerûségbe vetett hitünk milyen szerepet játszik általánosításainkban?"

"Valamely egyszerû törvényt, az egyes esetek egész során át igaznak találtunk; vonakodni fogunk azt hinni, hogy emez oly sokszor ismétlõdõ igazolás a véletlen egyszerû játéka . . ."

Ilyenformán számos esetben a fizikus ugyanolyan helyzetbe jut, mint a játékos, ki esélyeit mérlegeli. Valahányszor a fizikus indukczió útján jut el következtetéseihez, többé-kevésbbé tudatosan alkalmazza a valószínûség-számítást.

Éppen ezért kell kissé félbeszakítanunk a természettudományok módszereinek tanulmányozását, hogy valamivel jobban megvizsgálhassuk, mennyit ér e számítási mód és mennyiben megbízható.

Már maga a név: valószínûség-számítás, látszólagos képtelenség, mert a valószínûség a bizonyossal szemben olyasvalami, a mit nem tudunk; hogyan lehet már most azt, a mit nem tudunk, kiszámítani? Mégis sok kiváló tudós foglalkozott e számítással és tagadhatatlan, hogy a tudomány némi hasznot húzott belõle.

Hogyan magyarázhatjuk meg e látszólagos ellenmondást? Fogalmilag meghatározott dolog-e a valószínûség? Meg lehet-e egyáltalában határozni? És ha nem lehet, ki mer segítségével következtetéseket vonni? Mondhatnók, hogy a meghatározás igen egyszerû: Valamely esemény valószínûsége nem más, mint az ezen eseményre nézve kedvezõ esetek számának viszonya az összes eshetõségek számához.

Azonban már egy egyszerû példa meggyõz bennünket arról, hogy e fogalmi meghatározás mennyire tökéletlen: Elvetek két koczkát, mennyire valószínû az, hogy a két koczka közül legalább is az egyik "hat"-ra esik? Minden koczka hat számjegyre eshetik; az összes lehetõ esetek száma $6 \times 6 = 36$; a kedvezõ esetek száma 11; a valószínûség tehát $\frac{11}{36}$.

Ez a helyes megoldás; de vajjon nem éppen oly joggal mondhatnám-e azt is, hogy a két koczkán feldobott számok $\frac{6 \times 7}{2}$ =21 különbözõ kombinácziót alkothatnak? Ezen kombinácziók közül 6 kedvezõ; a valószínûség tehát $\frac{6}{21}$.

Miért jogosultabb az elsõ eljárás a lehetõ esetek számítására, mint a második? Meghatározásunk erre nézve semmi felvilágosítást nem ád. Ezért aztán így egészítették ki e meghatározást: ". . . az összes eshetõségek számához, feltéve, hogy ezen esetek egymás között egyenlõen valószínûek". De ezzel aztán oda jutottunk, hogy a valószínûség fogalmát valószínûséggel határozzuk meg.

De meg honnan tudnók, hogy két lehetõ eset egyenlõen valószínû? Vagy ebben eleve megállapodunk?

Ha minden egyes feladat megoldását a megállapodásnak nyílt megfogalmazásával kezdjük, akkor minden jól megyen és csak a számtan és algebra szabályait kell követnünk, és így számításunk végéhez fogunk eljutni, a nélkül, hogy eredményûnkben kételkedni lehetne. Ámde, ha adatainkat fel akarjuk használni, ki kell elõbb mutatnunk, hogy megállapodásunk jogosult volt és így ismét ugyanazon nehézséggel találkozunk, melyet éppen kerülni akartunk.

Mondhatnók, hogy az egészséges emberi értelem elegendõ, hogy bennünket arra tanítson, hogy mely megállapodás vezet czélhoz?

*Bertrand*nak *a* következõ egyszerû feladatban telt öröme: "Mekkora a valószínûsége annak, hogy valamely adott körben meghúzott húr nagyobb legyen, mint a körbe beírható egyenlõ oldalú háromszög egyik oldala?"

A híres mathematikus egymásután két megállapodást fogadott el, melyek mindegyike a józan ész szempontjából egyformán jogosultnak látszott; az egyikkel a valószínûséget $\frac{1}{2}$-nek, a másikkal $\frac{1}{3}$-nak találta. Úgy látszik, hogy mindezekbõl az következik, hogy a valószínûség-számítás haszontalan tudomány s hogy nem lehet megbíznunk ama homályos ösztönben, melytõl azt kívántuk, hogy megállapodásainkat igazolja és melyet az imént egészséges emberi értelemnek neveztünk.

De ezt az ítéletet nem írjuk alá; a homályos sejtelmeket nem mellõzhetjük, nélküle a tudomány lehetetlen lenne, nélküle a természet törvényeit nem fedezték volna fel s a felfedezett törvényeket sem tudták volna hasznosítani. Vagy van-e jogunk a *Newton*-féletörvényt kimondani? Bizonyára; számos megfigyelés mellette bizonyít; de ez a körülmény nem csupán a szerencsés véletlen játéka-e? Hogyan tudhatjuk, hogy az évszázadok óta uralkodó törvény még a legközelebbi évben is igaz lesz? Ezen ellenvetésre csak azt felelhetjük, hogy ez "nagyon valószínûtlen".

De tegyük fel, hogy a törvény érvényes: ennek alapján a Jupiter helyét egy évvel elõre kiszámíthatom. Joggal mondhatom ezt? Ki áll jót érte, hogy valamely rendkívüli sebességgel mozgó óriási tömeg nem fog-e a közel jövõben Naprendszerünk közelségében elhaladni és nem fog-e benne elõre nem látott változásokat okozni ? Erre is csak azt felelhetjük, hogy "ez ugyancsak kevéssé valószínû".

Igy fogva fel e körülményeket, az összes tudományok tulajdonképpen a valószínûség-számításnak öntudatlan alkalmazásai volnának ; ha tehát e számolási módszert elítéljük, elítéljük vele együtt az egész tudományt.

Kevésbé fogok most foglalkozni azokkal a tudományos feladatokkal, melyeknél a valószínûség-számítás szerepe világosabban kitûnik. Elsõsorban ilyen a közbeiktatás feladata, melynél, ha valamely függvénynek bizonyos számú értékei ismeretesek, a közbenesõ értékeket keressük.

Hasonlóképpen megemlítjük még az észlelési hibák híres elméletét, a melyre késõbb még visszatérünk; a gázok kinetikai elméletét, a mely jól ismert feltevés szerint minden gázmolekula pályája nagyon bonyolult, s a melynél mégis a nagy számok hatása folytán az átlagos, de egyedül megfigyelhetõ jelenségek egyszerû törvényeknek hódolnak, a minõk *Mariotte és Gay-Lussac* törvényei.

Mindezek az elméletek a nagy számok törvényein alapúlnak, a melyeket a valószínûség-számítás, kétségkívül saját romjai alá temetne. Ez elméletek azonban kevésbbé általános érdekûek és eltekintve a közbeiktatástól, könnyen rászánhatnánk magunkat feláldozásukra.

De mint a hogy fennebb is mondottam, nemcsak ezekrõl a részleges áldozatokról lenne szó, hanem az egész tudomány jogosultsága kétségbe lenne vonható.

Igaz hogy valaki azt mondhatná: "Tudatlanok vagyunk és mégis cselekedünk. Nincs idõnk egy olyan vizsgálat végzéséhez, a mely tudatlanságunk megszüntetésére elegendõ lenne (az ilyen vizsgálat különben végtelen hosszú idõbe kerülne). Határoznunk kell eszerint a szükséges ismeretek nélkül, bíznunk kell a jó szerencsében és haladnunk olyan szabályok szerint, a melyekben nem nagyon bízunk. Ha valamit tudok, az nem annyit jelent, hogy az a dolog igaz, hanem hogy rám nézve a legczélszerûbb úgy cselekedni, mintha igaz volna." Avalószínûség-számítás és következésképpen a tudomány ez esetben csak gyakorlati értékû lenne.

Sajnos, ez úton a nehézség nem szünik meg: A játékos meg akar kisérelni egy játszmát és tõlem kér tanácsot. Ha megteszem kívánságát, akkor a valószínûség-számítás elvei sugallata szerint fogom a tanácsot megadni, de a sikerrõl azért nem állok jót. Ezt nevezem *alanyi valószínûségnek.* Ez esetben beérhetjük azzal a magyarázattal, melyet az imént vázoltam. De tegyük most fel azt, hogy a játékot egy megfigyelõ észleli, a ki a játszma minden fordulatát feljegyzi, és felteszszük még, hogy a játszma sokáig eltart; a mikor jegyzetei alapján a tényeket végigtekinti, megállapítja, hogy az események számszerint a valószínûség-számítás szabályai szerint következtek be. Ezt nevezem *tárgyi valószínûségnek,* melyet a továbbiakban meg kellene magyaráznom.

Számos biztosító társaság alkalmazza a valószínûség-számítás szabályait és a részvényeseiknek osztalékot juttatnak, melyeknek a tárgyi létezését senki nem vonhatja kétségbe. Ezeknek az osztalékoknak a magyarázatára nem elegendõ a tudatlanságunkra és a cselekvési szükségünkre hivatkozni.

A feltétlen kételkedés e szerint nincs helyén; lehetünk bizalmatlanok, de azért egészében ne kárhoztassunk semmit; a kérdés megvitatásra szorul.

I. A valószínûségi feladatok osztályozása.

A valószínûség kapcsán felmerülõ feladatok osztályozásánál különbözõ nézõpontokból indulhatunk ki; de mindenekelõtt *az általánosság szempontjából.* Fennebb mondottam, hogy a valószínûség a kedvezõ esetek számának viszonya a lehetséges esetek számához. Az, a mit jobb kifejezés hiján általánosságnak nevezek, a lehetséges esetek számával nõni fog. Ez a szám véges lehet. Így például, ha a koczkajátékot vesszük, az összes lehetséges esetek száma 36. Ez az általánosságnak elsõ foka.

Ha azonban pl. azt kérdezzük, hogy valamely kör belsejében fekvõ pontnál mi annak a valószínûsége, hogy e pont az ezen körbe írott négyzetben feküdjék, akkor annyi lehetséges eset van, a hány pont van a körben, azaz végtelen sok. Ez az általánosság második foka. Az általánosítás azonban még fokozható. Azt is kérdhetjük, hogy mi a valószínûsége annak, hogy egy függvény valamely adott feltételnek eleget tegyen ; akkor annyi lehetséges eset van, a mennyi különbözõ függvényt csak elképzelhetünk. Ez az általánosság harmadik foka, a melyre például akkor emelkedünk, ha véges számú megfigyelések alapján a legvalószínûbb törvényt akarjuk kitalálni.

Egészen más nézõpontból is indulhatunk ki. Ha nem lennénk tudatlanok, nem léteznék valószínûség, csak a biztosságnak jutna hely; ám a mi tudatlanságunk nem lehet feltétlen, mert akkor még kevésbbé léteznék valószínûség; valami kis világosság mégis csak kell ahhoz, hogy még csak ehhez a bizonytalan tudáshoz is eljussunk. Ily módon a valószínûségi feladatok a mi tudatlanságunk nagyobb vagy kisebb mélysége szerint is osztályozhatók.

Már a mathematikában is lehet valószínûségi feladatokat felvetni. Mekkora a valószínûsége annak, hogy a táblázatból találomra kiválasztott logaritmus ötödik tizedes számjegye kilencz legyen? Habozás nélkül felelhetünk, hogy ez a valószínûség: $\frac{1}{10}$. Itt a feladat összes adatainak birtokában vagyunk; ki tudnók számítani a mi logaritmusunkat, anélkül, hogy a logaritmus-táblánkat igénybe vennõk, csak nem veszünk hozzá magunknak fáradságot. Ez a tudatlanság elsõ foka.

A fizikai tudományokban jóval nagyobb a tudatlanságunk. Valamely adott pillanatban a rendszer állapota két dologtól függ. Kezdeti állapotától, meg attól a törvénytõl, a mely szerint ez az állapot változik. Ha ezt a törvényt, meg ezt a kezdeti állapotot egyszerre ismernõk, csak a mathematikai feladat lenne megoldandó, és visszaesnénk a tudatlanság elsõ fokára.

Gyakran megtörténik azonban, hogy ismerjük a törvényt és nem ismerjük a kezdeti állapotot. Azt kérdjük például, hogy milyen a kicsiny bolygók jelen eloszlása; tudjuk, hogy ezek mindig *Kepler* törvényeit követték, de nem tudjuk, milyen volt kezdeti eloszlásuk.

A gázok kinetikai elméletében felteszik, hogy a gázmolekulák egyenesvonalú pályákat írnak le és hogy a rugalmas testek ütközéseinek törvényeit követik; mivel azonban kezdeti sebességeikrõl mit sem tudunk, jelenlegi sebességeiket sem ismerjük.

Egyedül a valószínûség-számítás képesít bennünket arra, hogy elõre meglássuk azon átlagos jelenségeket, a melyek e sebességek összegezésének eredményei. Ez a tudatlanság második foka.

Végül az is lehetséges, hogy nemcsak a kezdeti feltételek, hanem maguk a törvények is ismeretlenek; így jutunk a tudatlanságunk harmadik fokához és általánosságban ilyen esetben valamely jelenség valószínûségére nézve mit sem állíthatunk. Gyakran megesik, hogy nem a törvény többé-kevésbé tökéletes ismerete alapján igyekszünk elõre megmondani valamely jelenséget, hanem hogy a jelenséget ismerjük és a törvényt akarjuk kitalálni, tehát a helyett, hogy az okokból jelenségeiket akarnánk leszármaztatni, a jelenségekbõl akarunk következtetni az okokra. Ezeket a feladatokat nevezzük az *okok valószínûsége* feladatának; tudományos alkalmazások szempontjából ezek a legérdekesebbek.

Egy úrral, a kit föltétlenül becsületesnek ismerek, *écarté-t* játszom; õ következik; mi a valószínûsége annak, hogy királyt fog húzni? Ez $\frac{1}{8}$; ez az eseményekben nyilatkozó *hatás* valószínûségének egy feladata. Egy másik úrral játszom most, a kit nem ismerek; 10 eset közül 6-szor királyt húzott; mekkora annak a valószínûsége, hogy ez az úr hamis játékos? Ez az *okok* valószínûségének egy feladata.

Észrevehetjük, hogy a kísérleti módszernek ez a leglényegesebb feladata. Az *x*-nek n értékét figyeltem meg és az *y*-nak hozzátartozó értékeit; megállapítottam, hogy az utóbbiaknak az elõbbiekhez való viszonya észrevehetõleg állandó. Ez az esemény. Mi az oka?

Valószínû-e az, hogy oly törvény áll fenn, amely szerint az *y* az *x*-szel arányos, és hogy a kis eltérések a megfigyelési hibáknak tulajdonítandók? Olyan természetû kérdés ez, a melyet minduntalan fel kell vetnünk és a melyet öntudatlanul mindig megoldunk, valahányszor tudománynyal foglalkozunk.

Most a feladatok ezen különbözõ osztályait akarom áttekinteni, különös tekintettel arra, a mit fennebb alanyi és tárgyi valószínûségnek neveztem.

II. A valószínûség a mathematikai tudományokban.

A kör négyszögesítésének lehetetlensége 1883 óta be van bizonyítva;[31] de jóval ezen nemrég lefolyt esztendõ elõtt a mathematikusok e feladat megoldhatatlanságát annyira "valószínû"-nek tartották, hogy az Académie des Sciences minden vizsgálódás nélkül visszavetette a négyszögesítést tárgyaló értekezéseket, melyeket - sajnos - elég nagy számban küldött be évrõl-évre néhány szerencsétlen bolond.[*]

Vajjon igaza volt-e az Académie-nek? Föltétlenül; egészen jól tudta, hogy így cselekedve egyáltalán nem koczkáztatja azt, hogy evvel valamely komoly felfedezést elnyom. Igazát azért nem tudta volna bebizonyítani, de jó1 tudta, hogy az érzéke nem csalja meg. Ha valaki az akadémikusokat megkérdezte volna, azt felelték volna neki: "Összehasonlítottuk annak a valószínûségét, hogy valamely ismeretlen tudós megtalálta azt, a mit olyan hosszú idõ óta hiába keresnek, annak a valószínûségével, hogy e világon egy bolonddal több van a második valószínûséget nagyobbnak találtuk". Igen helyes okoskodás ez, de nem mathematikai, hanem tisztán lélektani természetû.

Ha azután valaki a kérdéseivel még tovább zaklatta volna õket, így folytatták volna: "Miért akarjátok minden áron, hogy valamely transzczendens függvénynek[32] egy bizonyos értéke algebrai szám legyen ; ha π valamely algebrai egyenlet gyöke lenne, miért kell annak a gyöknek a *sin* 2 x függvény periodusával azonosnak lennie, s miért nem azonosak vele ugyanezen egyenlet többi gyökei?" Egy szóval hivatkoztak volna a kielégítõ ok elvére, ennek leghatározatlanabb alakjára.

De vajjon mit tudtak ebbõl az elvbõl következtetni? Legfeljebb egy alkalmas szabályt, idejük miként való felhasználására, a melyet így nagyobb haszonnal fordíthattak rendes munkájok végzésére, mint e fáradságos, kalandos észtornák olvasgatására, melyek csak jogos bizalmatlanságot keltettek bennük. Ámde annak, a mit fennebb tárgyi valószínûségnek neveztem, ezen elsõ feladathoz nincsen semmi köze.

Másképpen állunk a következõ második feladattal. Vegyük szemügyre az elsõ 10.000 logaritmust valamely táblában. E 10.000 logaritmus közül találomra kiválasztok egyet; mi a valószínûsége annak, hogy a harmadik tizedese páros szám lesz-e? Habozás nélkül felelhetjük $\frac{1}{2}$, és valóban, ha e 10.000 szám harmadik, tizedeseit végignézzük, igen közelítõleg ugyanannyi páros, mint páratlan számot fogunk közöttük találni.

Vagy ha így jobban tetszik, írjunk fel 10.000 számot, a mely a mi 10.000 logaritmusunknak megfelel; e számok mindegyike legyen *+ 1-gyel* egyenlõ, ha a megfelelõ logaritmus harmadik tizedese páros szám *és -1-gyel* egyenlõ az ellenkezõ esetben. Képezzük azután e 10.000 szám számtani középértékét.

Habozás nélkül azt mondanám, hogy e 10.000 szám középértéke valószínûleg zérus, és ha a számításokat valóban elvégzem, igazolhatnám, hogy e középérték csakugyan igen kicsiny.

Ámde még ez az igazolás is fölösleges. Szigorúan bebizonyíthatnám, hogy ez a középérték kisebb, mint 0·003. Hogy ehhez az eredményhez jussunk, elég hosszadalmas számításokra van szükség, a melyeknek itt helyük nincs; ezért arra szorítkozom csak, hogy megemlítsem azt a közleményemet, a melyet a *Revue générale des sciences* 1899 ápr. 15-iki számában tettem közzé. E helyen csak a következõ körülményre akarok figyelmeztetni: E számításban csak két tényre kellett támaszkodnom, ugyanis arra, hogy a logaritmusnak úgy az elsõ, mint a második differencziálhányadosa a tekintetbe vett közben bizonyos meghatározott, véges határok között marad.

Ebbõl az a fontos következtetés vonható le, hogy e jelzett tulajdonság nemcsak a logaritmusra nézve helyes, hanem érvényes bármely folytonos függvényre nézve is, mert az összes folytonos függvények differenczálhányadosai véges határok között maradnak.

Errõl az eredményrõl már elõre meg voltam gyõzõdve; elõször is azért, mert hasonló jelenségeket más folytonos függvényeknél is megfigyeltem; másrészt azért is, mert magamban, többé-kevésbbé öntudatlanul és tökéletlenül, elvégeztem ama megfontolásokat, melyek az említett egyenlõtlenségekre vezettek; olyanformán, mint a hogy a gyakorlott számoló valamely szorzás végrehajtása elõtt már eleve megítélheti azt, "hogy a szorzás eredménye körülbelül ennyi".

Mivel azonban az, amit én belsõ szemléletemnek neveztem, nem más, mint valódi következtetések tökéletlen vázlata, meg fogjuk érteni, hogy a tapasztalat miért erõsítette meg azt, a mit elõre láttam, és hogy a tárgyi valószínûség miért volt az alanyi valószínûséggel összhangban.

Harmadik példa gyanánt a kõvetkezõ feladatot választom:

Valamely *u* számot találomra választottunk, *n*pedig egy adott, igen nagy egész szám; mekkora a sin*nu* valószínû értéke? Ennek a feladatnak magában véve semmi értelme nincs. Hogy értelmet adjunk neki, elõbb egy megállapodásra van szükségünk; *megállapodásunk* legyen az, hogy annak a valószínûsége, hogy az *u* szám az a és az *a + d a* között fekszik, ϕ *(a) d a*-val egyenlõ, arányos tehát a végtelén kicsiny *d a* köz nagyságával és egyenlõ ennek a ϕ *(a)* függvénynyel való szorzatával, mely csak *a-tól* függ. Ezt a függvényt tetszésem szerint választom, de folytonosnak veszem fel. Minthogy sín*nu* értéke akkor is ugyanaz marad, ha *u* 2π-vel növekszik, feltehetem az általánosság korlátozása nélkül, hogy *u* a *O* és a 2π között fekszik, és így ahhoz a feltevéshez jutok, hogy ö *(a)* szakaszos függvény, melynek a szakasza 2π.

A keresett valószínû érték egyszerû integrállal kifejezhetõ, és nem nehéz bebizonyítani, hogy ez az integrál kisebb mint:

$$\frac{2\pi M_k}{n^k},$$

ahol M_k a ϕ *(u)* függvény *k*-ik differencziál-hányadosának legnagyobb értékét jelenti. Ebbõl látszik, hogy ha ez a *k*-adik differencziál-hányados véges, és ha az *n* végtelenül növekszik: valószínûségünk a *O*-hoz közeledik; még pedig gyorsabban, mint az

$$\frac{1}{n^{k-1}}$$

Eszerint, a sín*nu* valószínû értéke, ha *n* értéke igen nagy, zérus; ezen érték meghatározása végett megállapodásra volt szükségem; ám bármilyen ez a megállapodás, az eredmény mindig csak ugyanaz lesz. Csak jelentéktelen megszorításokat alkalmaztam akkor, mikor felvettem, hogy a ϕ *(a)* függvény folytonos és szakaszos és ezen feltevések annyira természetesek, hogy kérdezhetnõk, miként lehetne ezeket egyáltalában kerülni.

A három elõzõ példa vizsgálata, a melyek egymás között minden nézõpontból annyira különbözõek, egyrészrõl annak a szerepét ismerteti meg velünk, a mit a filozófusok az *elegendõ ok elvének* neveznek, másrészt annak a ténynek a fontosságát mutatja; hogy bizonyos tulajdonságok az összes folytonos függvényekre nézve közösek. A valószínûség tanulmányozása a fizikai tudományokban ugyanerre az eredményre fog vezetni.

III. A valószínûség a fizikai tudományokban.

Elérkezünk most azokhoz a feladatokhoz, a melyekrõl fenn azt mondottam, hogy a másodfokú tudatlanságra vonatkoznak, tehát ama feladatokhoz, a hol a törvényt ismerjük, de a rendszer kezdeti állapotát nem ismerjük. Igen számos példát sorolhatnék fel, de csak egynek fejtegetésére szorítkozom: milyen az Állatkörön a kis bolygóknak jelenlegi valószínû eloszlása?

Tudjuk, hogy a bolygók *Kepler* törvényeit követik; sõt a nélkül, hogy a feladat természetét legkevésbé is megváltoztatnók, azt is felvehetnénk, hogy mindegyiknek pályája köralakú, és egy és ugyanazon síkban fekszik; és hogy errõl tudomásunk is van. Viszont a kezdeti eloszlásukról mit sem tudunk. Mégis habozás nélkül azt állítjuk, hogy ez az eloszlás ma körülbelül egyenletes. Miért tehetjük ezt?

Legyen b valamely kis bolygónak a hosszúsága a kezdeti idõpontban, azaz a $t = O$ idõben; a legyen a sebességének középértéke, akkor hosszúsága a mostani idõpontban, azaz a t idõben, $at + b$ lesz. Ha azt mondjuk, hogy a jelen eloszlás egyenletes, az annyit jelent, mintha azt mondanók, hogy az $at + b$ sokszorosai szinuszainak és koszinuszainak középértékei zérussal egyenlõk. Miért állítjuk ezt?

Ábrázoljunk minden kis bolygót valamely síknak egy pontjával, melynek koordinátái éppen a és b. Mindezek az ábrázoló pontok a sík bizonyos részében fognak feküdni, de mivel számuk nagyon nagy, a megfelelõ részek egészen tele lesznek szórva pontokkal. Mást nem tudunk e pontok eloszlásáról.

Mit teszünk, ha a valószínûségszámítást ilynemû kérdésre akarjuk alkalmazni? Mi a valószínûsége annak, hogy egy vagy több pont a síknak egy bizonyos részében feküdjék? Tudatlanságunkban kénytelenek leszünk egy önkényes föltevéssel élni.

Hogy e föltevés természetét megmagyarázzam, engedje meg az olvasó, hogy a mathematikai képlet alkalmazása helyett egy durva, de legalább kézzelfogható képet használhassak. Képzeljük el, hogy síkunk felszínét egy képzelt anyaggal borítottuk be, melynek sûrûsége változó, de a mely változás folytonos jellegû. Megállapodunk most abban, hogy a síknak egy bizonyos részén fekvõ ábrázoló pontok valószinû száma, az e helyen található képzelt anyag menynyiségével arányos. Ha azután a síknak egymással egyenlõ kiterjedésû két részét veszszük, akkor a valószínûségek arra nézve, hogy valamely kis bolygónk ábrázoló pontja az egyik vagy a másik részben feküdjék, úgy viszonylanak egymáshoz, mint a képzelt anyag átlagos sûrûsége az egyik vagy a másik helyén.

Ime két eloszlásunk van; az egyik valóságos, a hol az ábrázoló pontok száma nagyon nagy; a pontok sûrûn fekszenek, de azért egymástól el vannak választva, mint a molekulák az anyagban az atomföltevés szerint; a másik, a hol az ábrázoló pontjainkat valamely képzelt folytonos anyaggal helyettesítettük, távol áll a valóságtól.

Errõl az utóbbiról jól tudjuk, hogy nem felel meg a valóságnak, de tudatlanságunk arra kényszerít bennünket, hogy mégis elfogadjuk.

Ha az ábrázoló pontok valóságos eloszlásáról lenne valamelyes fogalmunk, akkor úgy rendezkedhetnénk be, hogy valamely adott kiterjedésû síkrészben a folytonosnak képzelt anyag sûrûsége közelítõleg arányos legyen az ábrázoló pontok számával, vagy ha úgy tetszik, az ezen síkrészben foglalt atomok számával. Ámde ez lehetetlen és tudatlanságunk oly nagy, hogy ez bennünket arra kényszerít, hogy azt a függvényt, a mely képzelt anyagunk sûrûségét meghatározza, önkényesen válaszszuk. Csak egy föltevésre lesz szûkségünk, a mely elõl nem igen térhetünk ki, fel kell tudniillik tennünk azt, hogy ez a függvény folytonos. Mint a hogy látni fogjuk, ez elegendõ arra, hogy egy következtetést vonhassunk.

Valamely t pillanatban milyen a kis bolygók valószínû eloszlása? Vagy pedig: mi a valószínû értéke a t pillanatban a hosszúság szinusznak, azaz a mi sin $(a\, t + b)$ kifejezésünknek. Kezdetben egy önkényes megállapodást tettünk, de ha ezt elfogadjuk, ez a valószínû érték teljesen meg van határozva. Bontsuk fel a síkot területelemekre. Vizsgáljuk meg a sin $(at + b)$ értékét emez elemek mindegyikének középpontjában; sokszorozzuk ezt az értéket ezen elem területével s azzal a sûrûséggel, a mely ama képzelt anyagénak e helyen megfelel, azután képezzük a sík összes elemeire nézve ezen szorzatoknak az összegét. Ez az összeg lesz a meghatározás szerint az a valószínû középérték, a melyet kerestünk, a melyet itt így egy kettõs integrállal fejezünk ki.

Elsõ pillantásra azt gondolnók, hogy ez a középérték azon ϕ függvényének a megválasztásától függ, a mely a képzelt anyag sûrûségét meghatározza; és mivel ez a függvény tetszés szerinti, ennek önkényes megválasztása által bármilyen középértékhez eljuthatnánk. Ámde éppen nem így áll a dolog.

Egyszerû számítás megmutatja, hogy kettõs integrálunk nagyon gyorsan fogy, ha t növekszik.

E szerint eleinte nem igen tudtam, hogy milyen föltevést tegyek a kezdeti eloszlás valószínûségét illetõleg; ámde bármilyen föltevéssel élek is, az eredmény mindig ugyanaz lesz, s ez az, a mi kisegít a választás kételyeibõl.

Bármilyen is a ϕ függvény, a középérték zérushoz közeledik, ha t nõ és mivel a kis bolygók bizonyára igen nagy számú keringést tettek meg, azt állíthatom, hogy ez a középérték csak igen kicsiny lehet.

Úgy választhatom ϕ-t, a hogy akarom, de egy megszorítás mindig marad: a függvénynek folytonosnak kell lennie; és valóban az alanyi valószínûség álláspontjából valamely nem folytonos függvénynek a választása nem lett volna észszerû; vajjon mi alapja lett volna például annak a feltevésnek, hogy a kezdeti hosszúság pontosan $0°$ lehetne, de hogy értéke $0°$ *és* $1°$között ne lehessen?

A nehézség azonban újra jelentkezik, ha a tárgyi valószínûség álláspontjára helyezkedünk; ha a mi képzelt eloszlásunkból, hol a képzelt anyagot folytonosnak vettük fel, a valóságos eloszlásra térünk reá, a hol ugyanis a mi ábrázoló pontjaink egymástól különített atomok módjára viselkednek.

A sin $(at + b)$ középértéke egyszerûen

$$\frac{1}{n}\sum \sin(at+b)$$

kifejezéssel tüntethetõ fel, a hol n a kis bolygók számát jelenti. A kettõs integrál helyett, a mely folytonos függvényre vonatkozik, az elkülönített egyes tagok összege lép fel. Még sem vonja senki komolyan kétségbe azt, hogy ez a középérték valóban nagyon kicsiny.

Ez onnan van, mert a mi ábrázoló pontjaink igen szorosan vannak egymás mellett, tehát különvált tagjainak összege általában véve kevéssé fog különbözni az integráltól.

Valamely integrál az a határ, a mely felé a tagok összege közeledik, mikor e tagok száma végtelenül nõ. Ha e tagok száma nagyon nagy, akkor az összeg kevéssé fog különbözni a határától, tehát az integrál értékétõl, és az, a mit ez utóbbiról mondtam, magára az összegre is érvényes lesz.

De azért vannak kivételek is. Ha például az összes kis E bolygókra nézve érvényes lenne:

$$b = \frac{\pi}{2} - at$$

akkor a *t* idõben az összes bolygók hosszúsága $\frac{\pi}{2}$ volna és középértékük nyilvánvalóan *1* lenne. E végbõl fel kellene vennünk, hogy a kis bolygók a *t= 0* idõben valamennyien egy különös alakú, igen sûrû menetû csigavonal mentén voltak elhelyezve. Mindenki azt fogja mondani, hogy az ilyen kezdeti eloszlás rendkívül valószínûtlen (és még ha megvalósítva képzeljük is, akkor a ma, például 1900 jan. 1-én, az eloszlás nem lenne egyenletes, hanem néhány évvel késõbben mégis ilyen lenne).

De mégis, miért tartjuk mi ezt a kezdeti eloszlást valószínûtlennek? Ezt meg kell magyaráznunk, mert ha semmi okunk nem lenne ezen körmönfont föltevés elvetésére, minden összeomlanék és az egy adott valóságos eloszlás valószínûségére nézve semmit sem állíthatnánk.

Ismét az elegendõ ok elvére hivatkozunk, a melyre mindig vissza kell térnünk. Felvehetnõk ugyanis, hogy kezdetben a bolygók megközelítõleg egy egyenes vonal mentén voltak eloszolva, azt is, hogy egyenetlenül voltak szétszórva; de úgy látszik, nincsen elegendõ okunk feltenni azt, hogy az ismeretlen végok, a melynek létezésüket köszönik, ilyen szabályos és mégis annyira bonyolódott görbe szerint mûködik, a melyen meglátszik, hogy csakis azért választottuk így, hogy a jelen eloszlás ne legyen egyenletes.

IV. A vörös és a fekete (Rouge et noir).

A szerencsejátékok által felvetett kérdések, pl. a "roulette" kérdései az imént tárgyaltakhoz teljesen hasonlók.

Például egy korong nagyszámú, egymással egyenlõ czikkelyre van beosztva, melyek fölváltva vörösek és feketék. A korong felett mozogható, vele közös tengelyû óramutatót nagy erõvel mozgásba indítunk s az, miután nagyszámú körforgást végzett, a fennemlített czikkelybeosztások egyikénél megáll. Annak a valószínûsége, hogy ez a czikkely vörös, nyilván $\frac{1}{2}$.

A mutató δ szöggel forog el, a mely számos teljes körülfordulást is magában foglal; nem tudom, mekkora a valószínûsége annak, hogy a mutató olyan sebességgel jöjjön mozgásba, hogy ez a szög δ és $\delta + d\,\delta$ közé essék ; de egy megállapodást tehetek. Ugyanis felvehetem azt, hogy ez a valószínûség $\phi\,(\delta)\,d\,\delta$ szorzattal egyenlõ; a mi a $\phi\,(\delta)$ függvényt illeti, ezt egészen önkényes módon választhatom; semmi sincs, a mi választásomat irányíthatná, de természetszerûleg arra a feltevésre jutok, hogy e függvény folytonos.

Legyen az egységnyi sugarú kör kerületén számított vörös vagy fekete osztályrész hossza ε.

A ϕ (δ) *d* δ integrálját ki kell számítanunk, kiterjesztve ezt egyrészt az összes vörös osztályrészekre, másrészt az összes fekete osztályrészekre; hasonlítsuk azután az eredményeket egymással össze.

Vegyünk fel oly 2 ε közt, mely egy vörös és erre következõ fekete osztályrészt foglal magában. Legyen ebben a közben *M és m* a legnagyobb és a legkisebb értéke a ϕ (δ) függvénynek. A vörös osztályzatokra kiterjesztett integrál kisebb lesz, mint Σ *M* ε; a fekete osztályrészekre kiterjesztett integrál nagyobb lesz, mint Σ *m* ε; a különbség e szerint kisebb lesz, mint Σ *(M-m)* ε. Ámde, ha a ö függvényt folytonosnak veszszük fel, és ha másrészrõl az e köz igen kicsiny a mutató által befutott szög teljes értékéhez viszonyítva, akkor *a M-m a* különbség igen kicsiny lesz.

A két integrál közötti különbség e szerint igen kicsiny lesz és a valószínûség $\frac{1}{2}$ -hez igen közel fog állani.
Ebbõl megérthetõ, hogy a nélkül, hogy a ϕ függvényrõl valamit tudnék, úgy járhatok el, mintha a valószínûség $\frac{1}{2}$ lenne. Másrészt megérthetõ, hogy a tárgyi valószínûség álláspontjára helyezkedve, a jelenség szemlélõje a mutató bizonyos számú forgása után miért látta a mutatót körülbelül ugyanannyiszor a vörösön megállani, a hányszor a feketén.

Minden játékos ismeri ezt a tárgyi törvényt; de ez különös tévedéshez vezeti õket, a melyet már gyakran felderítettek, de a melybe õk mindig visszaesnek. Ha például a vörös hatszor egymásután kijött, feketére tesznek; s azt hiszik, hogy biztos tétük van, mert a mint mondják, ugyancsak ritka eset, hogy a vörös hétszer egymásután kijöjjön.

Valósággal azonban a nyeréshez való valószínûségük $1/2$ marad, bár a megfigyelés azt bizonyítja, hogy a vörös hétszer egymásután igen ritkán jön ki; ám az oly sorozat, melyben hat vörös után fekete következik, éppen olyan ritka. A játékosok észrevették e hét vörösbõl álló sorozat ritkaságát, de nem jegyezték meg a hat vörös és egy feketébõl álló sorozat ritkaságát; ennek egyedüli oka az, hogy az utóbbi sorozatok kevésbbé hívják fel a figyelmet.

V. Az okok valószínûsége.

Elérkeztünk így az okok valószínûségének feladataihoz, melyek a tudományos alkalmazás álláspontjából a legfontosabbak. Ha például két csillag az égboltozaton nagyon közel áll egymáshoz, vajjon a tiszta véletlen játéka-e az a látszólagos közelség és vajjon ezek a csillagok, bár közel ugyanabban a látóvonalban fekszenek, a Földtõl valóban nagyon különbözõ távolságra vannak-e és vajjon ennek következtében nagyon messze vannak-e egymástól? Vagy más szóval, valóságos közelségnek felel-e meg az észlelt látszólagos közelség? Ez az okok valószínûségének egy feladata.

Emlékezzünk vissza mindennekelõtt arra, hogy elõbb a hatások valószínûségének minden feladatánál, a melyekkel eddig foglalkoztunk, mindig elõtérbe keltett helyeznünk egy többé-kevésbbé jogosult megállapodást.

És, ha az eredmény a legtöbb esetben bizonyos fokig független volt ezen megállapodástól, az csak bizonyos föltevéseken mult, a melyek segítségével például a nem folytonos függvényeket, vagy bizonyos körmönfont megállapodásokat sikerült *a priori* elvetnünk.

Ha az okok valószínûségével foglalkozunk, némiképpen hasonló dolgokra bukkanunk. Valamely jelenség az *A* ok vagy a *B* ok következtében jöhet létre. A jelenséget megfigyelték, keresik annak a valószínûségét, hogy a jelenség az *A* okból származik. Ez az okok valószínûsége *aposteriori.* Ámde ezt nem tudom kiszámítani, hacsak valamely többé-kevésbbé jogos megállapodás *eleve* meg nem ismerteti velem azt, mekkora annak a valószínûsége *a priori*, hogy az *A* ok mûködésbe lépjen; értem ez alatt az *A* jelenség bekövetkezésének valószínûségét olyas valaki számára, a ki a hatást még nem figyelte meg.

Hogy jobban megértessem magamat, visszatérek az écarté-játék példájára, a melyet fennebb említettem; ellenfelem játszik elõször s királyt húz; mi a valószínûsége annak, hogy õ hamis játékos? A közönségesen tanított képletek $\frac{8}{9}$-et adnak eredményül, a mi ugyancsak meglepõ. Ha azonban e képleteket közelebbrõl vizsgáljuk, észreveszszük, hogy a számítás olyan értelemben történt, *mintha az asztalhoz azzal a meggyõzõdéssel ültem volna le,* hogy az ellenjátékosom éppen úgy lehetne becsületes, mint hamis játékos. Képtelen föltevés ez, mert ennek a tudatában bizonyára nem játszottam volna vele. Ez magyarázza meg azután a belõle volna következtetés képtelenségét is.

Az a priori valószínûségben való megállapodásunk eszerint nem volt jogosult és ennek a következménye az, hogy az *a posteriori* valószínûség kiszámítása helytelen eredményre vezetett. Látjuk tehát, mily nagy a fontossága az elõre tett megállapodásnak; sõt hozzáteszem, hogy e megállapodás nélkül az *a posteriori* valószínûség feladatának semmi értelme sem volna; minden alkalommal szükségünk van ilyen, akár kimondott, akár hallgatag megállapodásra.

Térjünk reá egy tudományosabb jellegû példára. Egy kísérleti törvényt akarok meghatározni; ez a törvény, ha majd ismerni fogom, görbével tûntethetõ fel. Bizonyos számú, különálló megfigyelést végzek, ezek mindegyikét egy-egy ponttal tüntetem fel. A mikor e különbözõ pontokat nyertem, megvonok e pontok között egy görbét, arra törekedve, hogy a pontoktól a lehetõ legkevésbé távolodjam el és hogy görbémnek az alakja e mellett lehetõleg szabályos maradjon, szögleteket ne kapjon, ne legyenek túlságosan kifejezett fordulópontjai és a görbületi sugár ne változzék hirtelen. Ez a görbe a valószínû törvényt fogja feltüntetni és én úgy vélem, hogy a függvénynek nemcsak azon értékeit ismerteti meg velem, melyek a megfigyelt értékek között fekszenek, hanem hogy magukat a megfigyelt értékeket is pontosabban tünteti fel, mint a közvetlen megfigyelés. És éppen ez okból vonom a görbét a pontok közelségében, de nem a pontokon keresztül.

Ime, az okok valószínûségének egy feladata. A hatások azok a mérési adatok, a melyeket feljegyeztem és á melyek két ok összejátszásától függenék: a jelenség valódi törvényétõl s a megfigyelés hibáitól. A feladat az, hogy ismerve a hatásokat, keressük annak a valószínûségét, hogy a jelenség bizonyos törvénynek engedelmeskedik és annak a valószínûségét, hogy a megfigyelések bizonyos hibák folytán módosultak. A legvalószínûbb törvény a megrajzolt görbének felel meg; és valamely megfigyelésnek legvalószínûbb hibáját a görbének az ezen megfigyelést elõtüntetõ ponttól való távolsága tünteti fel.

Amde a feladatnak semmi értelme nem volna, ha a megfigyelés megkezdése elõtt, *a priori* nem alkotnék magamnak az ilyen vagy amolyan törvény valószínûségérõl fogalmat és nem fontoltam volna meg azokat a lehetõségeket; a melyek hibákra adhatnak okot.

Ha mûszereim jók (s errõl a megfigyelések megkezdése elõtt tudomást szereztem), nem fogom megengedhetõnek tartani, hogy görbém a nyers méréseket feltüntetõ pontoktól nagyon eltérjen. Ha azonban a mûszereim rosszak, e pontoktól kissé jobban is eltávozhatom, hogy a görbém ne legyen túlságosan hullámos, a szabályosságnak inkább hoznék nagyobb áldozatot.

Vajjon mi az oka annak, hogy lehetõleg kevéssé hullámos görbét akarok eredményül kapni? Azért, mert *a priori* felteszem, hogy oly törvény, mely folytonos függvény által tüntethetõ fel (vagy olyan függvény által, a melynek magasabb differencziálliányadosai igen kicsinyek) sokkal valószínûbb, mint az olyan törvény, a mely ezen feltételeknek nem tesz eleget. Ezen hit nélkül a szóban forgó feladatnak semmi értelme nem volna, a közbeiktatás lehetetlen lenne, véges számú megfigyelésekbõl nem lehetne törvényt levezetni és tudomány nem léteznék.

Ötven évvel ezelõtt a fizikusok, egyébként hasonló körülmények között, az egyszerû törvényt valószínûbbnek tartották, mint a bonyolódott törvényt. Ezen elvre még hivatkoztak is a *Mariotte*-féle törvény javára, *Regnault* kísérleteivel ellentétben. Ma már elállottak ettõl a hittõl, bár ugyancsak sokszor kénytelenek úgy cselekedni, mintha e hitet még vallanák! Bármiként legyen is a dolog, ezen felfogásból meg- maradt a folytonosságba vetett hit és láttuk, hogy a kísérleti tudomány lehetetlenné válnék, a mint ez a hiedelem megszûnnék.

VI. A hibaelmélet.

Igy eljutottunk a hibák elméletéhez, a mely az okok valószínûségének feladatához közvetlenül hozzácsatlakozik. Itt is hatásokat állapítunk meg, nevezetesen az egymás közt nem egyezõ megfigyelések bizonyos számát és megkíséreljük ezek okát meglelni: azaz egyrészrõl a megmérendõ mennyiség valóságos értékét, másrészt ama hibákat, a melyeket minden egyes megfigyelésnél elkövetünk. Ki kell számítanunk, hogy mekkora minden hibának *a posteriori* valószínû értéke, hogy tehát mi a valószínû értéke a mérendõ mennyiségnek.

De a mint éppen most kifejtettem, a számítás nem vihetõ keresztül, ha nem veszszük fel *a priori*, még mielõtt megfigyelést egyáltalában végeztünk volna, a hiba valószínûségének valamely törvényét. Vajjon létezik-e ily hibatõrvény?

Azok, a kik számításokkal foglalkoznak, általánosan elfogadták a *Gauss*-féle hibatörvényt, a melyet bizonyos transzczendens görbével ábrázolnak, a mely "harang-görbe" néven ismeretes.

Mindenekelõtt jó lesz, ha a rendszeres és a véletlen hiba közötti klasszikus különbségre emlékeztetünk. Ha valamely hosszat valamely túlságosan hosszú "méteres mértékkel" mérünk, mindig túlságosan kicsiny mérõszámot kapunk majd eredményül és a hibán nem segíthetünk azzal, hogy újból kezdjük vele a méréseket; ez a rendszeres hiba. Ha ugyanazt a hosszúságot pontos méterrúddal mérjük, akkor is tévedhetünk, de hol jobban, hol meg kevésbbé; ha azután nagyszámú mérések középértékét képezzük, akkor a hiba ki fog egyenlítõdni. Ezek az esetleges hibák.

Már most világos, hogy a rendszeres hibák a *Gauss*-féle törvénynek nem tehetnek eleget, de vajjon eleget tesznek-e e törvénynek az esetleges hibák? Nagyon számos bizonyítást kísérlettek meg, de ez majdnem mind csak durva álkövetkeztetés. A *Gauss*-féle törvény mégis bebizonyítható, ha a következõ feltevésekbõl indulunk ki: Az elkövetett hiba igen nagyszámú részleges és egymástól független hibának az eredménye; minden ilyen részleges hiba igen kicsiny és ezenkívül valamely tetszés szerinti valószínûségi törvénynek hódol, megjegyezve azonban, hogy valamely pozitiv hibának a valószínûsége ugyanoly nagy, mint egy másik ugyanakkora, de ellenkezõ elõjelû hibáé. Világos, hagy ezek a feltételek gyakran ki vannak elégítve, de nem mindig és az "esetleges hiba" elnevezést ama hibák számára tarthatjuk fenn, a melyek e föltételeknek eleget tesznek.

Látni ezekbõl, hogy a legkisebb négyzetek módszere[34] nem minden esetben jogosult; általában véve a fizikusok kevésbbé bíznak benne, mint a csillagászok. Ennek oka kétségkívül abban rejlik, hogy az utóbbiaknak, eltekintve a rendszeres hibáktól, melyek náluk éppen úgy elõfordulnak mint a fizikusnál, egy igen fontos hibaforrással van dolguk, a mely egészen a véletlentõl függ: a légköri hullámzásokat értem. Igen érdekes tehát végighallgatni a fizikust és a csillagászt, mikor a megfigyelési módszerekrõl vitatkoznak. A fizikus meg van róla gyõzõdve, hogy egy jó mérés többet ér, mint sok rossz és mindenekelõtt arra törekszik, hogy a legkisebb rendszeres hibát is a legnagyobb elõvigyázattal kiküszöbölje, a mire azonban a csillagász azt mondja: "Ily körülmények között ám csak kevés számú csillagot figyelhetnél meg és a véletlen hibák nem egyenlítõdnének ki".

Mit következtessünk ebbõl? Vajjon továbbra is alkalmazzuk a legkisebb négyzetek módszerét? Itt különbséget kell tennünk. Az összes rendszeres hibákat, a melyeket sejthettünk, kiküszöböltük; tudjuk jól, hogy még több is van, de nem tudjuk õket meglelni; de mégis el akarunk jutni valamely elhatározáshoz s el akarunk fogadni valamely végleges értéket, a melyet azután valószínû értéknek tekintünk; világos hogy e végbõl legczélszerûbben a *Gauss*-féle módszert alkalmazzuk. Igy nem tettünk mást, mint hogy alkalmaztunk egy gyakorlati szabályt, mely az alanyi valószínûségre vonatkozik. Ez ellen semmit sem lehet felhozni.

Azonban még tovább akarnak menni és azt akarják állítani, hogy nemcsak a valószínû érték ennyi meg ennyi, hanem hogy az eredményben elkövetett valószínû hiba ekkora és ekkora. *De ez már tejesen jogosulatlan;* az csak akkor lenne igaz, ha biztosak lennénk abban, hogy az összes rendszeres hibák ki vannak küszöbölve, de ezt biztosan soha sem tudhatjuk. Két megfigyelési sorozatunk van; a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazva azt találjuk, hogy a valószínû hiba az elsõ sorozatban félakkora mint a másodikban. E mellett a második sorozat helyesebb lehet mint az elsõ, mert az elsõt talán durva rendszeres hiba torzította el. Csupán csak annyit mondhatunk, hogy az elsõ sorozat valószínûleg jobb mint a második, mert a benne elõforduló esetleges hiba kisebb és mert semmi okunk nincs arra, hogy a rendszeres hibát az egyik sorozatban nagyobbnak tekintjük mint a másikban, mert errõl egyáltalában semmit sem tudunk.

VII. Összefoglalás.

A megelõzõ sorokban számos kérdést vetettem fel anélkül, hogy egyre is megfeleltem volna. Mindazonáltal nem sajnálom, hogy e sorokat leírtam, mert talán arra fogják ösztönözni az olvasót, hogy gondolkozzék ezeken a kényes kérdéseken.

Bármiképpen is gondolkozzunk: egyes részletek, úgy hiszem, jól vannak megállapítva. Hogy bármely valószínûségi számításra vállalkozhassunk és hogy e számításoknak értelmük is legyen, fel kell vennünk kiindulási pontul egy olyan föltevést vagy megállapodást, mely bizonyos fokig mindig magán viseli az önkényesség jellegét. E megállapodás megválasztásánál csakis az elegendõ ok elve vezethet bennünket. Sajnos, ez az elv nagyon is határozatlan és elég rugalmas; hiszen már ezen rövid vizsgálat folyamán is láttuk: hányféle különbözõ alakot vehet fel. Az az alak, a melylyel a leggyakrabban találkoztunk, a folytonosságban való hit, a mit határozott okoskodással nehéz lenne igazolni, de a mely nélkül az összes tudományok lehetetlenek volnának. Végül: a valószínûség-számítás ama feladatoknál alkalmazható elõnyösen, a melyeknél az eredmény független a kezdetben alkalmazott föltevéstõl, hacsak ez a föltevés a folytonosság föltételének eleget tesz.

---

*A Magyar Tudományos Akadémia 1901-ben kiadott Ügyrendjének 79.§-a ugyanily határozmányt tartalmaz. **R.**

TIZENKETTEDIK FEJEZET.

A fény és az elektromosság.

Fresnel elmélete.

Valamennyi választható példa közül a legjobb a fény elmélete és ennek összefüggései az elektromosság elméletével.[*] *Fresnel*-nekköszönhetõ,[19] hogy a fényelmélet ma a fizikának .legfejlettebb ága; a rezgési elmélet valóban oly egészet képez, mely tökéletesen kielégíti az emberi elmét, csak nem szabad tõle olyat kívánni, a mit nekünk nem adhat.

A mathematikai elméleteknek nem feladata a dolgok valódi természetének feltárása. Ez nem lenne észszerû követelés. Céljuk egyedül az, hogy rendezzék a fizika ama törvényeit, melyekkel a tapasztalat ismertetett meg bennünket, de a melyeket a mathematika segítsége nélkül még meg sem tudnánk fogalmazni.

Kevéssé fontos reánk nézve az, vajjon az éter valóban létezik-e, ez a metafizikusok dolga; a fõdolog reánk nézve az, hogy minden úgy történjék, mintha léteznék éter és hogy e föltevés kényelmes a jelenségek magyarázatára. Elvégre van-e ezenkívül más értelme annak, hogy az anyagi testek létezésében higyjünk? Tulajdonképpen ez sem más, mint kényelmes feltevés, mely azonban mindig kényelmes marad, míg elõbb-utóbb be fog következni az az idõ, mikor az étert mint hasznavehetetlen fogalmat végképpen elvetik.

De még ebben az idõben is a fénytan törvényei és az ezeket az analizis nyelvére fordító egyenletek helyesek maradnak, legalább elsõ megközelítésben. Ezért mindig hasznos leszen oly elméletet tanulmányozni, mely mindezeket az egyenleteket egymás között összekapcsolja.

A rezgési elmélet molekuláris alapföltevésén nyugszik; ez a feltevés azok szemében, kik a törvényben az okot is felfedezni vélik, elõnyösnek látszik; mások szemében inkább bizalmatlanságra ád okot; de ez a bizalmatlanság éppen oly kevéssé látszik indokoltnak, mint az elõbbiek önámítása.

E föltevések csak másodrendû szerepet játszanak. Föláldozhatnók õket, bár rendszerint ezt nem teszszük, mert a magyarázat veszítene a tisztaságából, de ez az egyedüli oka annak, hogy ragaszkodunk hozzájuk.

Valóban, ha a dolgot közelrõl nézzük, látjuk, hogy a molekuláris föltevésekbõl csak két dolgot veszünk kölcsön: az egyik az energia megmaradásának elve és a másik azon egyenleteknek lineáris alakja, mely alak a kis mozgások általános törvénye, éppen úgy, mint általában véve az összes kis változásoké.

Ez magyarázza meg azt, hogy *Fresnel* következtetéseinek legnagyobb része érvényes minden változtatás nélkül akkor is, ha a fény elektromágnességi elméletét fogadjuk el.

Maxwell elmélete.

Tudjuk, hogy Maxwell[19] a fizikának két oly részét, mely az ideig egymástól teljesen elszigetelve állott, szoros kapcsolattal fûzte össze. E két fontos rész: a fény és az elektromosság tana. *Fresnel* fényelmélete semmit sem veszített az életképességébõl akkor, mikor e magasabb összhangba, e nagyobb szabású egészbe beleolvadt. Egyes részei azért továbbra is érvényben maradtak és kölcsönös vonatkozásaik nem változtak meg. Csak maga a nyelv módosult, melylyel e vonatkozásokat kifejezzük; másrészt *Maxwell* a fény- és elektromosságtan különbözõ tartományai között oly vonatkozásokat derített ki, melyeket azelõtt senki nem sejthetett.

Ha a franczia olvasó *Maxwell* könyvébe elõször pillant bele, csodálkozásába valami kellemetlen érzés, sõt bizalmatlanság vegyül, mely csak akkor mulik el jelentékeny erõlködés árán ha a munkával huzamosabb ideig foglalkozott. Sok kiváló szellem még ma sem tudott ez érzésektõl megszabadulni.

Miért honosúlnak meg nálunk o1y nehezen a kiváló angol tudós eszméi? Valószínûleg azért, mert az a nevelés, melyben a legtöbb magas mûveltségû franczia részesült, õket arra teszik alkalmatosakká, hogy a pontosságot és logikát minden más tulajdonságnál többre becsüljék.

A mathematikai fizika régebbi elméletei e tekintetben, teljesen kielégítenek bennünket. Valamennyi mesterünk *Laplace*-tól *Cauchy*-ig, egyformán jártak el. Világosan megfogalmazott feltevésekbõl indulnak ki és az összes következtetéseket mathematikai szigorral vezetve, az eredményeket összehasonlítják a tapasztalattal. Úgy látszik, mintha a fizika minden ágát oly szigorú pontossággal akarták volta kiépíteni, mint az égi testek mechánikáját.

Azt az elmét, mely hozzászokott az ilyen mintaképek megcsodálásához, nehéz valamely elmélettel kielégíteni. Az ily elme nemcsak elviselhetetlennek fogja találni az ellenmondásnak legkisebb látszatát is, hanem követelni fogja, hogy az elmélet egyes részei egymással logikai kapcsolatban álljanak és hogy az egymástól különbözõ feltevések száma lehetõleg korlátolt legyen.

De ez még nem minden; oly kívánalmai is lesznek, melyeket már nem tartok annyira észszerûnek. A mögött az anyag mögött, melyet mi érzékeinkkel észlelünk s a melyet a tapasztalat ismertetett meg velünk, egy másik anyagot akar látni, mely az õ szemében az egyedül igazi, melynek csak tisztán geométriai tulajdonságai vannak, és a melynek atomjai csak mathematikai pontok, melyek egyedül a dinámika törvényeinek hódolnak. És mégis megkisérli, valami öntudatlan ellenmondás folytán, hogy elképzelje magának ezeket a láthatatlan és szintelen atomokat, s hogy ez által lehetõleg közel hozza képzelt anyagát a közönséges anyaghoz.

Csak akkor lesz elméletével teljesen megelégedve, és azt hiszi, hogy behatolt a mindenség titkába. És habár e megelégedés hamis, azért az errõl való lemondás nem kevésbé kinos.

Azért ha a franczia olvasó *Maxwell* könyvét kinyitja, azt várja, hogy összefüggõ elméletet lásson maga elõtt, a mely éppen oly tökéletes és logikus legyen, mint az éter föltevésén felépülõ fényelmélet; ilyen módon maga készíti elõ csalódását, melytõl az olvasót meg akarom óvni azzal, hogy itt mindjárt tudomására hozom, hogy mit keressen *Maxwell*nél és mit nem talál meg nála.

Az elektromosságra és a mágnességre nézve *Maxwell* nem ad mechánikai magyarázatot; csak annak a bebizonyítására szorítkozik, hogy az ilyen magyarázat lehetséges.

Egyúttal megmutatja, hogy a fényjelenségek az elektromágnességi tüneményeknek csak különös esetei. E szerint az elektromosságnak bármily elméletébõl közvetlenül le lehet vezetni a fény valamely elméletét.

Fordítva, sajnos, nem megyen a dolog; nem mindig könnyû a fény teljes magyarázatából az elektromos jelenségek teljes magyarázatát adni. Különösen akkor nem könnyû, ha a *Fresnel*-féle elméletbõl akarunk kiindulni, bár kétségkívül ez akkor sem lehetetlen; mindazonáltal ily módon azt kellene kérdeznünk, hogy nem kell-e az oly csodálatraméltó eredményekrõl lemondanunk, melyeket már véglegesen biztosítottaknak gondoltunk. Olyannak tûnik ez fel, mint a hátrafelé tett lépés, és számos jeles elme nem tud ebbe belenyugodni.

Ha az olvasó bele is egyezik abba, hogy reményeit korlátozza, akkor még más nehézségekbe fog ütközni; az angol tudós ugyanis nem egységes, végleges, jól berendezett épület létrehozására törekszik, hanem, úgy látszik, inkább arra, hogy nagyszámú átmeneti, egymástól független alkotmányt hozzon létre, melyek között a közlekedés sokszor nehéz, sõt néhányszor lehetetlen.

Vegyük fel például azt a fejezetét, hol az elektrosztatikus vonzást, nyomásokkal, feszültségekkel igyekszik megmagyarázni, melyek a dielektromos közegben uralkodnak. Ezt a fejezetet bízvást ki lehet hagyni, a nélkül, hogy a könyv ez által egészében kevésbé teljes vagy kevésbé világos lenne; másrészrõl e fejezet olyan elméletet tartalmaz, mely egymagában is megállhat és a mely megérthetõ a nélkül, hogy akár az azokat megelõzõ vagy az utána következõ sorokat olvasnók. De ez a fejezet nemcsak független a munka többi részeitõl, hanem ezen kívül a könyv alapeszméivel nehezen hozható összhangba. *Maxwell* maga meg sem kísérli az összeegyeztetés keresztülvitelét; csupán a következõk kimondására szorítkozik: „I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric". („Nem voltam képes a következõ lépést megtenni, ugyanis, hogy a dielektrikumban fellépõ ezen feszültségeket mechánikai meggondolásokkal megmagyarázzam.")

Ez a példa elegendõ lesz arra, hogy megértessem az én gondolatmenetemet, bár más példákat is felhozhatnék. Vagy a sarkítás síkjának mágnességi elforgatásáról írott lapokat olvasva, ki fog kételkedni abban, hogy a fénytani és mágnességi jelenségek egymással azonosak?

Nem szabad tehát azzal hizelegni magunknak, hogy minden ellenmondást kikerülhetünk; de ezt ki kell aknáznunk a magunk javára. Két egymásnak ellentmondó elmélet egyaránt hasznos vizsgálati eszköz, feltéve, hogy nem keverjük õket egymással össze és hogy nem látjuk bennök a dolgok végokát; és talán *Maxwell* olvasása sokkal kevésbbé serkentõ volna, ha nem nyitna meg elõttünk annyi és olyan sokfelé elágazó új utat.

De az alapeszme ezáltal kissé burkoltnak látszik, és pedig annyira, hogy e miatt a legtöbb, *Maxwell* munkáit népszerûsítõ mûben éppen az alapeszmét teljesen mellõzik.

Hogy fontosságát jobban kiemelhessem, azt hiszem, meg kell magyaráznom, miben áll ez az alapeszme. E czélból azonban kissé el kell térnünk a tárgytól.

A fizikai jelenségek mechánikai magyarázata.

Minden fizikai jelenségnél bizonyos számú jellemzõ adat (parameter) fordul elõ, melyek kísérletileg közvetlenül hozzáférhetõk, és ez által mérhetõk. Ezeket g parametereknek fogjuk nevezni. A megfigyelés továbbá megismerteti velünk e parameterek változásainak törvényeit s e törvények a differencziális egyenletek általános alakjára hozhatók, melyek a q parametereket és az idõt egymással összekötik.

Hogy lehet az ilyen jelenségnek mechánikai magyarázatot adni?

Vagy a közönséges anyag mozgásával, vagy pedig egy vagy több feltételezett folyadék mozgásával kísérlik meg a jelenség magyarázatát.

Ezeket a folyadékokat igen nagy számú, különálló m molekulákból állóknak tekintjük.

Mikor fogjuk most már azt mondhatni, hogy e jelenségnek teljes mechánikai magyarázata sikerült? Egyrészt akkor, ha ismerjük azokat a differencziális egyenleteket, a melyeknek ezen képzelt m molekuláknak a koordinátái megfelelnek, a mely egyenleteknek egyszersmind a dinámika elveivel kell összhangban állaniok; másrészt pedig, ha ismerjük azokat az összefüggéseket, melyek az m molekulák koordinátáit a q parameterek függvényeiként fejezik ki, a mely parameterek a kísérletnek hozzáférhetõk.

Ezen egyenleteknek, mint mondottam, a dinámika elveivel, nevezetesen az energia megmaradásának elvével és a legkisebb mûködés elvével összhangban kell lenniök.

E két elv közül az elsõ arra tanít bennünket, hogy az energia összmennyisége állandó s hogy az energia két *részre* oszlik, ugyanis:

1. Mozgási energiára vagy eleven erõre, mely a feltételezett m molekulák tömegétõl és sebességétõl függ és a melyet T-vel fogunk jelölni.

2. Helyzeti energiára, mely csakis a fenti molekulák koordinátáitól függ és a melyet U-val jelölünk.

E két energia *összege*, $U + T$, *állandó.*

Most lássuk, hogy mire tanít bennünket a legkisebb mûködés elve? Arra, hogy valamely rendszer, az alatt, hogy azon kezdeti helyzetébõl kiindulólag, melyet a t_0 idõpontban elfoglal, azon véghelyzetébe jut, melyet t_1 idõben ér el, olyan utat kénytelen leírni, hogy azon idõközben, mely t_0 és t_1 között lefolyik, a „mûködés"-nek középértéke (azaz a két energia, T és U közötti különbségnek a középértéke) a lehetõ legkisebb legyen. Az elõbbi elv egyébként az utóbbinak folyománya.

Ha a két függvény, T és U, ismeretes, akkor ezen elv elegendõ arra, hogy a mozgás egyenleteit meghatározhassuk.

Az összes utak között, melyeken az átmenetel az egyik helyzetbõl egy másikba történhetik, mindenesetre van egy olyan, melyre nézve a mûködés középértéke kisebb, mint bármely más útra nézve. Csakis egyetlen egy ily út létezik, a mibõl az következik, hogy a legkisebb mûködés elve elegendõ arra, hogy a befutott utat és következésképpen a mozgás egyenleteit meghatározzuk.

Igy jutunk el az úgynevezett *Lagrange*-féle egyenletekhez.

Ezen egyenletekben a független változók a föltételezett *m* molekulák koordinátái; de most felteszem azt, hogy a *q* parametereket választjuk független változóknak, mélyek kísérletileg közvetlenül hozzáférhetõk.

Az energia mindkét részének a *q* parameterek és differencziálhányadosaiknak függvényeként kell kifejezhetõnek lennie: nyilvánvalóan ezen alakjukban tünnek fel a kísérletezõ elõtt, a ki természetesen a helyzeti és a mozgási energiát oly mennyiségekkel igyekszik kifejezni, melyeket kísérletileg közvetlenül hozzáférhetõk.[**]

Így állván a dolog, a rendszer egyik helyzetébõl a másikba átmenve, mindig olyan utat fog követni, hogy a mûködés középértéke legkisebb legyen.

Nem lényeges, hogy *T* és *U* most a *q* parameterekkel; és ezeknek differencziálhányadosaival van kifejezve, éppen oly kévéssé határoz az, hogy éppen e parameterekkel határozzuk meg a kezdet- és a véghelyzetet; a legkisebb mûködés elve mindig érvényben marad.

E szerint van mindazon utak között, melyek e rendszer egyik helyzetébõl a másikhoz vezetnek, egy olyan, melyre nézve a mûködés középértéke a lehetõ legkisebb, és megint csak egy ilyen út van. A legkisebb mûködés elve elegendõ e szerint arra, hogy azon differencziális egyenleteket megszabja, melyek a *q* parameterek változásait meghatározzák.

Így a *Lagrange*-féle mozgásegyenleteknek egy másik alakját nyerjük.

Hogy ezeket az egyenleteket felállíthassuk, nincs szükségünk azon összefüggések ismeretére melyek a *q* paramétereket a föltételezett molekulák koordinátáival összekötik, sem e molekulák tömegére, sem ama függvény alakjára, mely az *U*-t a molekulák koordinátáival fejezi ki. Csak az *U*-t kell ismernünk, mint a *q*-k függvényét, valamint *T*-t, mint a *q*-k és ezek idõbeli differencziálhányadosainak függvényét; azaz a mozgási és a helyzeti energiának kifejezéseit mint a kísérleti adatok függvényeit.

Ezután két lehetõség van. Vagy összhangzásban állanak a fenti módon képezett *Lagrange*-féleegyenletek - a *T* és az *U* függvények kellõ megválasztásánál - azon differencziális egyenletekkel, melyeket a kísérletbõl vezettünk le; vagy nincsenek olyan *T* és *U* függvények, melyekre nézve ez az összhang fennállhat. Az utóbbi esetben világos, hogy mechánikai magyarázat nem lehetséges.

Eszerint a *szükséges* föltétel arra nézve, hogy mechánikai magyarázat lehetséges legyen, az, hogy a *T* és *U* függvényeket úgy lehessen megválasztani, hogy ezek a legkisebb mûködés elvének megfeleljenek, a mely az energia megmaradása elvének érvényességét is maga után vonja.

Egyébként ez a feltétel *elegendõ* is; tegyük fel ugyanis, hogy a *q* parametereknek oly *U* függvényét találtuk meg, mely az energia részei egyikét tünteti fel; és hogy az energia másik része, melyet *T*-vel jelölünk, a *q*-knak és idõbeli differencziálhányadosaiknak függvénye, még pedig ezen differencziálhányadosoknak másodfokú homogén kifejezése, és végül, hogy

Lagrange azon egyenletei, melyeket *T* és *U* függvények segítségével képeztünk, a tapasztalati adatokkal megegyeznek.

De mi kell ahhoz, hogy ebbõl mechánikai magyarázatot vezethessünk le? Az, hogy U t valamely rendszer helyzeti energiájának, *T*-t ugyanezen rendszer eleven erejének tekinthessük.

A mi *U*-t illeti, ez nem ütközik nehézségbe; de lehet-e *T*-t valamely anyagi rendszer eleven erejének tekinteni?

Könnyû bebizonyítani, hogy az mindig lehetséges, még pedig végtelen sokféle módon. A mi a részleteket illeti, utalok „Électricité et optique" czímû munkám elõszavára.

Ha tehát a legkisebb mûködés elvének nem tehetünk eleget, akkor nem létezik mechánikai magyarázat; ha azonban e törvénynek eleget tehetünk, akkor nemcsak egyféle, hanem végtelen sokféle magyarázat lehetséges, a mibõl következik, hogyha egy magyarázat van, akkor egyszersmind végtelen sok is van.

Még egy megjegyzést kell tennem.

Azon mennyiségek közül, melyeket a kísérlettel megközelíthetünk, az egyik csoportot úgy tekintjük, mint a föltételezett molekulák koordinátáinak függvényeit; ezek a mennyiségek lesznek a mi *q* parametereink; a többi menynyiségeket nemcsak a koordinátáktól, hanem még a sebességektõl is függõknek tekintjük; vagy a mi ugyanarra vezet, fölveszszük, hogy a *q* parameterek differencziálhányadosaitól is függenek, vagy e parametereknek és differencziálhányadosaiknak kapcsolataitól is.

Akkor a következõ kérdés merül fel: az összes kísérletileg mérhetõ mennyiségek közül melyeket válaszszuk ki, hogy a *q* parametereket segélyükkel elõállítsuk? Melyeket fogjuk szívesebben e parameterek differencziálhányadosainak tekinteni? A választás igen jelentékeny mértékben önkényes; de hogy mechánikai magyarázat lehetséges legyen, elegendõ, ha oly választást ejtünk meg, mely a legkisebb mûködés elvével összhangban van.

Maxwell már most azt kérdezte, hogy lehetséges-e a parametereknek és a *T* és *U* energiáknak oly választása, hogy az elektromosság jelenségei ezen elvnek hódolhassanak. A tapasztalat arra tanít bennünket, hogy az elektromágnességi tér energiája két részre oszlik: az elektrosztatikai és az elektrodinámikai energiára. *Maxwell* felismerte, hogy ha az elõbbit az *U* helyzeti energiának, és a másodikat a *T* mozgási energiának tekintjük, és ha másrészrõl a vezetõk elektrosztatikai töltéseit a *q* parametereknek és az áramerõsségeket, mint más *q* parameterek differencziálhányadosainak tekintjük, akkor ezen feltételek mellett, az elektromos jelenségek a legkisebb mûködés elvének eleget tesznek. Azóta meg is volt gyõzõdve arról, hogy mechánikai magyarázat lehetséges.

Ha õ ez eszmét mûve elején világosan kifejezte volna, a helyett, hogy a második kötet egyik zugába helyezte volna el, akkor bizonyára nem kerülte volna el a legtöbb olvasó figyelmét. E szerint, ha valamely jelenség teljes mechánikai magyarázatot enged meg, akkor az végtelen sok más mechánikai magyarázatot is megenged, a melyek mind a tapasztalat által földerített valamennyi részletrõl egyenlõen képesek számot adni.

És ezt megerõsíti a fizika minden részének története; így például a fényelméletben *Fresnel* arezgést a sarkítás síkjára merõlegesen képzeli; *Neumann* e síkkkal párvonalosnak tekinti. Sokáig keresték az „experimentum crucis"-t, mely hivatva lett volna arra, hogy a két elmélet között döntsön, de nem tudták megtalálni.[35]

Hasonlóképpen a nélkül, hogy az elektromosság birodalmát elhagynánk, megállapíthatjuk azt, hogy a kétfolyadékos és az egyfolyadékos elmélet az elektrosztatikának a megfigyelésen alapuló összes törvényeirõl egyaránt számot ad.

Mindezek a tények, *a Lagrange*-féle egyenletek elõbb említett tulajdonságának alapján könnyen megmagyarázhatók.

Most már könnyû megérteni, hogy *Maxwell* alapeszméje miben áll.

Az elektromosság mechánikai magyarázatának lehetõségét bebizonyítandó, nem kell arra törekednünk, hogy e magyarázatot magát valóban megtaláljuk elegendõ, ha ismerjük az *U* és a *T* két függvény kifejezéseit, melyek az energia két részét alkotják; hogy e két függvény segélyével elõállítsuk *Lagrange* egyenleteit és hogy azután ezeket az egyenleteket a kísérletileg talált törvényekkel összehasonlítsuk.

De hogyan válaszszunk helyesen mindezen lehetséges magyarázatok közül, mikor e választásra nézve a kísérlet semmi támaszt sem nyujt? Eljõ talán még az a nap, mikor a fizikusok ezek iránt a pozitiv kutatásoknak hozzáférhetetlen kérdések iránt már nem fognak. érdeklõdést mutatni és ezeket a metafizikusokra bízzák. De e nap még nem érkezett meg; az ember nem nyugszik bele egykönnyen, hogy a dolgok végokát soha sem fogja megismerni.

Választásunkat tehát csak oly meggondolások vezethetnék, a melyeknél az egyéni izlés nagy szerepet játszana; de vannak oly megoldások, melyeket bonyolódott voltuknál fogva mindenki elvet; és ismét vannak mások, melyeket egyszerûségüknél fogva mindenki kedvel.

A mi az elektromosságot és a mágnességet illeti, *Maxwell* bármilynemû választástól tartózkodik. Nem azért, mintha mindent, a mit a pozitiv módszerek nem érhetnek el, elvileg megvetne; az az idõ, melyet a gázok kinetikai elméletének szentelt, eléggé bizonyítja az ellenkezõt. Hozzáteszem még, hogy ámbár nagy munkájában nem ad teljes magyarázatot, õ azt elõbb a *„Philosophical Magazine"*-ben megjelent egy közleményében megkísérli. De a kényszerûségbõl bevezetett föltevéseknek idegenszerûsége és bonyolultsága arra indították, hogy errõl lemondjon.

Egész munkájában ugyanaz a szellem nyilatkozik meg. Mindazt, a mi fontos, azaz, a minek az összes elméletekben közösnek kell maradnia, fényesen megvilágította; és mindent mi csak egyes részletes elméletekben érvényes, majdnem mindig hallgatással mellõzte. E szerint az olvasó csaknem anyagi tartalom nélküli formával áll szemközt, melyet kezdeten hajlandó futó és meg nem fogható árnynak tartani. De ha az olvasó, megfeszítve szellemi erejét, a mû megértésére törekszik, kénytelen mélyen gondolkodni és végül megérti azt, a mi gyakran némikép mesterkélt volt az elméletek amaz összességében, melyet azelõtt csak csodálni tudott.

*Ez a fejezet részben a szerzõnek „*Théorie mathématique de la lumiére"* (Paris, Naud, 1889) és az „Électricité et optique" (Paris, Naud, 1901) czimû munkái bevezetéseibõl van összeállítva.

**Hozzáteszszük még, hogy *U* csak a *q* parameterektõl, *T* csak a *q* parameterektõl és ezeknek az idõ szerinti elsõ differencziálhányadósaitól függ és hogy *T* e differencziálhányadosoknak másodfokú homogén kifejezése.

TIZENHARMADIK FEJEZET.

Az elektrodinámika.

A mi szempontunkból különösen tanulságos az elektrodinámika története.

Ampère halhatatlan munkájának ezt a czímet adta: "Théorie des phénoménes électrodynamiques, *uniquement* fondée sur I'expérience". (Az elektrodinámikus jelenségeknek *kizárólag* a tapasztalatra alapított elmélete.) Azt képzelte e szerint, hogy egyáltalában nem dolgozott *semmiféle* föltevéssel; ámde; miként mindjárt látni fogjuk, mégis föltevésekkel élt, de tette ezt anélkül, hogy ennek tudatában lett volna.

De azok, a kik utána jöttek, észrevették ezt, mert figyelmük *az Ampére*-féle megoldás gyenge pontjaira irányúlt. Új föltevéseket vezettek be, ezúttal már teljes tudatossággal; de hányszor kellett azóta ezeket megváltoztatni, míg a mai klasszikus rendszerhez jutottunk, a mely talán még mindig nem végleges! Ezt akarjuk most tárgyalni.

I. Ampère elmélete.

Mikor *Ampère az* áramoknak egymásra való kölcsönös hatásait kísérleti úton tanulmányozta, nem dolgozott, nem dolgozhatott mással, mint *zárt* áramokkal.

Nem azért tette ezt, mintha a nyitott áramok lehetõségét tagadta volna. Ha két vezetõ ellentett jelû elektromossággal van megtöltve, és ha ezeket vezetõ-sodronynyal kötjük össze, áram keletkezik, mely egyik vezetõtõl a másik felé halad és addig tart, míg mind a kettõnek potencziálja egymással egyenlõvé nem lett. Az *Ampère* korában uralkodó nézetek szerint ez egy úgynevezett nyitott áram volt; észrevették, hogy az áram az elsõ vezetõtõl a második felé halad, de nem tapasztalták, hogy a másodiktól az elsõhöz visszatér.

Ezek szerint *Ampère* az olyan természetû áramokat tekintette nyitottaknak, mint a milyen például az elektromos sûrítõ kisülési árama; ámde ezeket nem tehette kísérletei tárgyává, mert a jelenség lefolyása igen gyors és rövid tartamú.

Más természetû nyitott áramot is elképzelhetünk. Vegyünk fel két vezetõt, *A*-t és *B*-t, a melyeket egymással *az A M B* vezetõsodrony köt össze. Kicsiny, mozgó vezetõtömegek elõször a B vezetõvel jönnek érintkezésbe és így elektromos-töltést kölcsönöznek tõle; elhagyva a *B* érintkezési pontot, mozgásba jönnek és a *B N A* úton haladva, magukkal szállítva töltéseiket, az *A* ponttal jutnak érintkezésbe és ennek átadják töltésüket, a mely így *B*-hez visszakerül az *A M B* vezetõsodronyon át.

Világos, hogy bizonyos értelemben itt zárt áramunk van, mert az elektromosság a *B N A M B* zárt kört futotta be; ámde ennek az áramnak két része igen különbözõ. Az *A M B* vezetõsodronyban az elektromosság valamely szilárd vezetõ *belsején keresztül* mozog tova, teljesen a *Volta*-féle áram módjára, ohmikus ellenállást gyõzve le és hõt fejlesztve; azt mondjuk, hogy *vezetés útján* jut tova; de *a B N A* részben az elektromosságot a mozgó vezetõ *viszi át;* erre azt mondjuk, hogy *elszállítás* útján jut tova.

Ha már most az elszállítási áramot a vezetett árammal egészen hasonlónak tekintjük, akkor *a B N A M B* kör zárt kör; ha ellenben az elszállítási áram nem "valóságos áram" és példának okáért nem hat a mágnesre, akkor csak az *A M B* vezetett áramunk marad fenn, a mely e szerint *nyitott.*

Ha például valamely, *Holtz*-féle gép két sarkát sodronynyal kötjük egymással össze, akkor az elektromossággal telt forgó korong az egyik sarktól a másikhoz elszállítás útján elektromosságot visz át, a mely a sodronyon keresztül való vezetés útján visszakerül az elsõ sarkhoz.

Ámde az ilyen fajtájú áramok nehezen valósíthatók meg észrevehetõ erõsségben. Azt mondhatjuk, hogy azokkal az eszközökkel, a melyekkel *Ampère* rendelkezett ily áramokat elõállítani teljességgel lehetetlen volt.

Végeredményben *Ampère* kétféIe nyitott áram létezését képzelhette volna el; de nem kísérletezhetett sem az egyikkel, sem a másikkal, mert vagy igen kicsiny erõsségûek voltak; vagy igen rövid ideig tartottak.

A kísérlet e szerint csak valamely zárt áramnak zárt áramra való hatását mutathatta meg neki, vagy szigorúan véve valamely zárt áramkör hatását egy áramrészre, mert valamely áram oly *zárt* vezetõn is haladhat át, a mely vezetõ egy mozgó és egy szilárd részbõl áll. Ezen esetben tehát lehetséges a mozgó rész azon kitérítésének a tanulmányozása, a mely egy más zárt áramnak a hatása alatt bekövetkezik.

Ezzel szemben *Ampère*-nek semmiféle eszköz nem állott a rendelkezésére, hogy a nyitott áramoknak akár zárt áramokra, akár egy más nyitott áramra gyakorolt hatását tanulmányozhassa.

A zárt áramok hatása.

Két zárt áram egymásra való kölcsönös hatása esetén *Ampère* kísérleti úton feltûnõen egyszerû törvényekhez jutott.

Röviden megemlítem itt azokat, a melyekre a továbbiakban szükségünk lesz:

l. *Ha az áramok erõssége állandó,* és ha mind a két áram tetszés szerinti helyváltozás és alakváltozás után végül kezdeti helyzetébe visszakerül, az elektrodinámikai hatások összes munkája zérus.

Más szavakkal, a két áramnak *elektrodinámikus potencziája* van, a mely az erõsségek szorzatával arányos és az áramok alakjától és egymáshoz viszonyított helyzetétõl függ; az elektrodinámikus hatások munkája egyenlõ ezen potencziál megváltozásával.

2. Valamely zárt tekercs (zárt szolenoid) kifelé való hatása zérus.[36]

3. Valamely *C* áramkör hatása egy másik *C'* Volta-féle zárt áramra csak attól a "mágnességi tértõl" függ, a melyet ezen *C* áram létesít.

A tér minden pontjában ugyanis nagyság és irány szerint bizonyos erõt határozhatunk meg, a melyet mágnességi térerõsségnek hívnak és a mely a következõ tulajdonságokat mutatja:

a) *C*-nek valamely mágnespólusra gyakorolt hatása magán a póluson ható erõ; ez egyenlõ a mágnességi tér erõsségével, sokszorozva a pólus mágnességi tömegével;

b) valamely igen rövid mágnestû a mágnességi térerõsség iránya mentén igyekszik elhelyezkedni, és az az erõpár, a mely a tût ebbe a helyzetbe visszaterelni törekszik, arányos a mágnességi térerõsséggel, a tû mágneses nyomatékával, és a tû kitérése szögének szinuszával;

c) ha a *C'* áramkör helyzetét megváltoztatja, akkor a *C* által a *C'*-re gyakorolt elektrodinámikus hatásnak a munkája egyenlõ lesz az áramkörön áthaladó "mágnességi erõáramlás" növekedésével.[37]

2. Zárt áram hatása egy áramrészre.

Mivel *Ampère* tulajdonképpeni nyitott áramot nem tudott megvalósítani, csak oly módszerei voltak, melyekkel valamely zárt áramnak egy áramrészre gyakorolt hatását tanulmányozhatta.

Ez az eljárás abban állott, hogy *C'* zárt árammal kísérletezett, a melyet két részbõl tett össze, az egyike szilárd helyzetû volt, a másika mozgó. A mozgó rész volt például valamely mozgó sodrony á â, a melynek két vége *á* és â egy szilárd drót mentén csúszott tova. A mozgó sodronynak bizonyos helyzeténél ennek a vége a rögzített sodrony *A* pontján nyugszik, míg a â végpontja a szilárd sodrony *B* pontján foglal helyet. Az áram á-tólâ felé kering, azaz *A*-tól *B*-ig a mozgó drót mentén és azután visszatér a szilárd sodrony mentén *B*-tõl *A*-ig. *Ez az áram e szerint zárt áram volt.*

Egy másik helyzetébe úgy jutott a mozgó drót, hogy a szilárd sodrony mentén csúszott; és pedig az á vége ezen esetben a szilárd sodronynak más, *A'* pontjára jutott, míg a â vége a *B'* pontjára került. Az áram ekkor az á-tól â felé keringett, azaz *A*'-tól *B*'-ig a mozgó sodrony mentén, azután visszatért *B'*-tõl *B*-ig és azután *B*-tõl *A*-ig; végül *A*-tól *A'*-ig; mindig a szilárd sodrony mentén. Az áram eszerint ismét zárt volt.

Ha az ilyen áramot valamely *C* zárt áramkör hatásának teszszük ki, akkor a mozgó vezetõrész úgy változtatja a helyzetét, mintha valamely erõ hatásának volna alávetve.

Ampère felveszi, hogy az a látszólagos erõ, a melynek ez az *A B* mozgó rész alávetettnek látszik, a mely e szerint *C*-nek az á â áramrészre gyakorolt hatását tünteti föl, ugyanaz, mintha á â-án valamely nyitott áram haladna végig, a mely á-nál és â-nál megszûnik; pedig a valóságban á â-t zárt áramkör futja át, a mely â-tól á-hoz visszatér az áramkör szilárd részén át.

Ez a föltevés meglehetõsen természetesnek látszik és *Ampère* ezt teljesen öntudatlanul vette fel; ám nem lép fel kényszerítõ szükséggel, mert késõbb látni fogjuk, hogy *Helmholtz* elvetette. Bármiképpen álljon is a dolog, *Ampère* e föltevés alapján képes volt a zárt áramok hatását valamely nyitott áramra vagy egy áramelemre kifejezni, ámbár nyitott áramot sohasem tudott elõállítani.

A törvények egyszerûek maradnak:

l. Az erõ, a mely valamely áramelemre hat, ezen elemen magán mûködik, merõleges ezen elemre és a mágnességi térerõsségre, és arányos a mágnességi térerõsség összetevõjével, a mely az áramelemre merõleges.

2. Valamely magába visszafutó, zárt tekercs, ú. n. zárt szolenoid hatása valamely áramelemre zérus marad.

Csakhogy elektrodinámikai potencziál nem létezik többé; azaz ha valamely zárt áram és egy nyitott áram, a melyek erõsségei állandóak, eredeti helyzetükbe visszakerülnek, akkor a végzett összes munka értéke nem egyenlõ zérussal.

3. Folytonos forgások.

Az elektrodinámikai kísérletek között azok a legkülönösebbek, a melyeknél folytonos forgást tudtak megvalósítani és a melyeket *az unipoláris indukczió* kísérleteinek neveznek.

Valamely mágnes mágnességi tengelye körül foroghat az áram elõször egy szilárd sodronyon halad át, azután belép a mágnesbe, például az *N* sarkon át, átfutja a mágnes hossza felét, egy csúszó kontaktuson át elhagyja a mágnest és a szilárd sodronyba visszatér.

A mágnes ezáltal folytonos forgásba jut, a nélkül, hogy egyensúlyi állapotot érhetne el. Ez a *Faraday*-félekísérlet.

Hogyan lehetséges ez? Ha két változatlan alakú áramkörrel van dolgunk, az egyik, *C* szilárd, a másik, *C'* valamely tengely körül forgatható, akkor ez az utóbbi soha sem jöhet folytonos forgásba; itt ugyanis létezik egy elektrodinámikai potencziál; e szerint okvetlenül fog létezni egy egyensúlyi helyzet is; és ez a helyzet az, melyben a potencziál legnagyobb értékét éri el.

A folytonos forgások e szerint csak akkor lehetségesek, ha. a *C'* áramkör két részbõl áll: Az egyik szilárd, a másik egy tengely körül forgatható, mint *Faraday* kísérletében. Ámde, itt mégis egy megkülönböztetést kell tennünk. A szilárd részbõl a mozgó részbe való átmenetel, vagy a fordított átmenetel kétféleképen létesíthetõ: vagy egyszerû érintkezés útján (ugyanis a mikor a mozgó résznek egy és ugyanazon pontja a szilárd résznek egy és ugyanazon pontjával állandó érintkezésben marad), vagy pedig csúszó kontaktus útján (a mikor a mozgó résznek egy és ugyanazon pontja a szilárd résznek különbözõ pontjaival kerül egymásután érintkezésbe).

Csak a második esetben érhetõ el a folytonos forgás. Lássuk csak, mi történik ekkor. A rendszer egyensúlyi helyzetet törekszik ugyan elérni, de éppen abban a pillanatban, a mikor ezt eléri, a csúszó kontaktus a mozgó részt a szilárd rész egy újabb pontjával hozza kapcsolatba; a mozgó rész megváltoztatja a rendszer összeköttetéseit, megváltoztatja az egyensúlyi föltételeket, úgy hogy a forgás vég nélkül folytatódhatik, mert az egyensúlyi helyzet úgyszólván szakadatlanul elfut az azt elérni törekvõ rendszer elõl.

Ampère felveszi, hogy az áramkörnek a *C*' mozgó részére gyakorolt hatása ugyanaz, mintha a *C'*-nek szilárd része nem is léteznék, tehát ugyanaz, mintha a mozgó részben nyitott áram keringene.

Ebbõl e szerint azt következteti, hogy valamely zárt áramnak nyitott áramra való hatása, vagy fordítva, valamely nyitott áramnak zárt áramra való hatása folytonos forgást okozhat.

Ámde ez a következtetés az említett föltevéstõl függ, és a melyet, mint már ugyancsak megjegyeztem, *Helmholtz* nem fogadott el.

4. Két nyitott áramnak egymásra való kölcsönös hatása.

Két nyitott áramnak, vagy különösen két áramelemnek egymásra kifejtett kölcsönös hatására vonatkozólag minden kísérlet megtagadja a szolgálatot.

Ampère föltevéseket vett segítségül. Feltételei: 1. Hogy a két elem egymásra való kölcsönös hatása oly erõvel egyenlõ, a mely a két elemet összekötõ egyenes mentén hat.

2.Hogy két zárt áramnak egymásra való hatása nem más, mint különbözõ elemeik egymásra való kölcsönös hatásának az eredõje, a mely elemek hatásai egyébként ugyanolyanok, mintha az elemek elszigetelve állanának.

Említésre méltó az, hogy *Ampère* itt ismét ezt a két föltevést használja, a nélkül, hogy észrevette volna.

Bármiképpen áll is a dolog, ha e két föltevést a zárt áramokkal végzett kísérletek tapasztalati eredményével összekapcsoljuk, ezek elegendõk arra, hogy két elem kölcsönös, egymásra való hatásának törvényét teljesen meghátározzák.[38]

Ámde akkor azon egyszerû törvények legnagyobb része, a melyekkel zárt áramok esetén találkoztunk, nyitott áramokra nézve többé már nem helyesek.

Mindenekelõtt nincs elektrodinámikus potencziál; egyébként, mint a hogy láttuk, már abban az esetben sincs, ha valamely zárt áram hat valamely nyitott áramra.

Továbbá, szigorúan véve, mágnességi térerõsség sincs. Ezt a térerõsséget fennebb három különbözõ alapon határoztuk meg:

1. valamely mágnespólusra gyakorolt erõhatás által;

2. azon forgató erõpár által, a mely valamely mágnestût irányít;

3. valamely áramelemre gyakorolt hatás által.

Ámde, a jelen esetben, nemcsak hogy nem áll többé egymással összhangban e három meghatározás, hanem már egyiknek sincs értelme. Ugyanis:

1. Valamely mágnespólus nemcsak az ezen pólusra ható egyetlen erõnek van alávetve. Hiszen láttuk, hogy az az erõ, a mely valamely áramelemnek valamely pólusra gyakorolt hatásából

származik, nem magán a póluson mûködik, hanem az elemeken; ez egyébiránt egy olyan erõvel is helyettesíthetõ, a mely a pólusra magára hat és egy hozzájáruló errõpárral.

2. A mágnestûre ható erõpár nemcsak arra szorítkozik többé, hogy azt irányítsa, mert a tû hossztengelyére vonatkozó forgató nyomatéka nem zérus. Ez az erõpár szétbontható egy tulajdonképeni irányító erõpárra, és egy olyan kiegészítõ erõpárra, a mely azt a folytonos forgást törekszik létesíteni, a melyrõl már fennebb szóltam.

3. Végül valamely áramelemre gyakorolt erõ nem merõleges többé ezen elemre.

Vagy más szóval, *a mágnességi térerõsség egysége eltûnt.*

Lássuk, miben áll ez az egység. Két olyan rendszer, a mely valamely mágnespólusra ugyanazt a hatást gyakorolja,

egyszersmint egymás között egyenlõ hatást fog gyakorolni valamely végtelen kicsiny mágnestûre vagy áramelemre is, a melyek a tér ugyanazon pontjában vannak elhelyezve, a hol a pólus volt.

Ámde ez csak akkor helyes, ha mind a két rendszer csakis zárt áramokat foglal magában; de ez *Amére* szerint már nem volna többé helyes, ha e rendszerek nyitott áramokat is tartalmaznak.

Elegendõ péIdául azt megjegyezni, hogy ha valamely mágnespólus *A*-ban és valamely áramelem *B*-ben van elhelyezve és az elem iránya az *A B* egyenes meghosszabbításába beleesik, akkor ez az elem az *A*-ban lévõ pólusra semmiféle hatást nem fog gyakorolni, ellenben hatást gyakorolna valamely *A*-ban elhelyezett mágnestûre, vagy az *A* helyen lévõ áramelemre.

5. Indukczió.

Tudjuk, hogy *Ampère* halhatatlan munkáit csakhamar követte az elektrodinámikai indukczió felfedezése.[39]

Addig, a míg csak zárt áramokkal van dolgunk, semmi nehézség sincs; *Helmholtz* még azt is megjegyezte, hogy ez esetben az energia megmaradásának elve elegendõ az indukczió törvényeinek az *Ampère*-féleelektrodinámikai törvényekbõl való levezetésére. Ez mindenesetre csak bizonyos feltételek mellett lehetséges, a mint ezt *Bertrand* megmutatta; ugyanis csak akkor, ha bizonyos számú új föltevést vezetünk be.

Ugyanezen elv megengedi a nyitott áramok esetén is e törvények leszármaztatását, bár megjegyzendõ, hogy ez esetben az eredmény kísérletileg már nem ellenõrizhetõ, mert ilyen áramokat a gyakorlatban nem tudunk elõállítani.

Ha a nyitott áramok *Ampère*-féle elméletére ezen analitikai megvizsgálási eljárást akarjuk alkalmazni, akkor olyan eredményekhez jutunk, a melyek méltán meglephetnek bennünket.

Elõször is az indukczió nem vezethetõ le a mágnességi tér változásából azon képlet szerint, melyet a tudósok és a gyakorlat emberei egyaránt jól ismernek; és, mint a hogy már mondtuk is, valóban mágnességi térrõl nem lehet többé szó.

De még többet mondunk. Ha valamely *C* áramkör valamely *S* Volta-féle változó rendszer indukcziójának van alávetve és ha ez az *S* rendszer helyzetét és alakját bármilyen módon megváltoztatja és ha e közben ezen rendszerben az áram erõssége bármily törvény szerint változik, ha azonban a rendszer ezen változások után végül kezdeti helyzetébe és alakjába visszakerül, természetesnek látszik az a feltevés, hogy a *C* áramkörben indukált elektromos indító erõ *középértéke* zérussal egyenlõ.

Ez helyes akkor, ha a *C* áramkör zárt és az *S* rendszer nem tartalmaz csak zárt áramokat. Ha azonban *az Ampère*- féle elméletet elfogadjuk, nem lesz többé helyes, amennyiben nyitott áramok is elõfordulnak.

Ilyen esetekben nemcsak az indukczió nem lesz többé a mágnességi tér erõáramlásának a változásával egyenlõ, e szót bármely szokásos értelmében is véve; hanem bármily más mennyiségnek a változásával sem lesz kifejezhetõ.

II. Helmholtz elmélete.

Kissé hosszabban idõztünk *Ampère* elméletének a következményeinél, valamint annál is, hogyan értsük meg a nyitott áramok hatását az õ szellemében.

Nehéz volna fel nem ismerni azon tételek mesterkélt és ellenmondó jellegét, a melyekhez ez úton eljutottunk; ez végre is ahhoz a következtetéshez vezet bennünket, hogy "a dolog bizony így nem lehet".

Megérthetjük így, hogy miért érezte *Helmholtz* annak szükségét, hogy valami mást keressen.

Helmholtz elveti[40] *Ampèrenek* azt az alapfeltevését, hogy két áramelemnek kölcsönös egymásra hatása valamely olyan erõre vezethetõ vissza, a mely az õket összekötõ egyenes mentén hat.

Felveszi, hogy valamely áramelem nemcsak egyetlen egy erõ hatásának van alávetve, hanem valamely erõnek és egy erõpárnak. Ez a feltevés adott alkalmat arra a híres vitára, a mely *Bertrand* és *Helmholtz* között lefolyt.

Helmholtz Ampère föltevését a következõvel helyettesíti:

Két áremelemnek mindig oly elektrodinámikai potencziálja van, a mely egyes-egyedül e két elemnek egymásra vonatkozó viszonylagos helyzetétõl és térbeli irányításuktól függ; az egymásra kölcsönösen gyakorolt erõknek munkája egyenlõ ezen potencziál változásával. *Helmholtz* tehát éppen úgy nem kerülheti el a föltevéseket, mint *Ampère,* de *Helmholtz* legalább nyíltan és pontosan kimondja föltevéseit.

A zárt áramok esetében, a mely egyedül ellenõrizhetõ kísérleti úton, a két elmélet egymással megegyezik; minden más esetben azonban különbözik egymástól.

Elõször is *Ampère* feltevéseivel ellentétben az az erõ, a melynek valamely zárt áram mozgó része látszólag alá van vetve, nem azonos azzal, a melyet e mozgó rész szenvedne akkor, ha el volna szigetelve és nyitott áramot alkotna.

Térjünk vissza a *C'* áramkörre, a melyrõl fennebb beszéltünk, mely ugyanis valamely mozgó á â sodrony-vezetõbõl áll, a mely mozgó vezetõ valamely szilárd sodronyon csusztatható el; az egyetlen megvalósítható kísérletnél a mozgó á â rész nincs elszigetelve, hanem zárt áramkörnek egy részét képezi. Ha e mozgó rész az *A B* helyzetébõl *A' B'* helyzetbe jut, a teljes elektrodinámikai potencziál két oknál fokva változik meg: l. A növekedés elsõ része azért áll be, mert *az A' B'* potencziálja a *C* áramkörre nézve nem ugyanaz, rnint az *AB* potencziálja ugyane körre nézve; 2. A növekedés második része abból származik, hogy az eredeti potencziált az *A A'* és *B' B* elemeknek a *C*-re vonatkozó potencziáljával kell megnagyobbítani.

Ez a *kettõs* növekedés az, a mely annak az erõnek a munkáját tünteti fel, a mely erõnek *az A B* rész alávetettnek látszik.

Ha ellenkezõleg, á â el lenne szigetelve, akkor a potenziál csak az elsõ változásnak lett volna kitéve és így csak ez az elsõ növekedés lett volna azon erõ munkájának a mértéke, a mely erõ az *A B*-re hat.

De másodszor még a következõ különbség is jelentkezik *Helmholtz* és *Ampère* elméletei között: Tény, hogy csúszó érintkezés nélkül folytonos forgás nem állhat fenn; és valóban ez a tény éppen az (a mint a zárt áramok esetén már láttuk), a mely az elektrodinámikai potencziál létezésének közvetlen következménye.

A Faraday-féle kísérletben a mozgó vezetõrész akkor jut folytonos forgásba, ha a mágnes szilárd és ha az áramnak a mágnesen kívül esõ része a mozgó vezetõn fut át. Ez azonban nem azt akarja mondani, hogy a sodrony folytonos forgó mozgást venne fel még akkor is, ha a mágnesnek a sodronynyal való érintkezései megszakadnának, és a sodronyt *nyitott árammal* futtatnók át. Éppen most mondottam, hogy valamely elszigetelt áram-elem valóban nincs ugyanazon hatásnak alávetve, mint valamely zárt áramkör mozogható eleme.

Még egy különbség van a két elmélet között: Valamely zárt szolenoid hatása valamely külsõ zárt áramra a tapasztalat szerint is, de mindkét elmélet szerint is zérussal egyenlõ; ámde *Ampère* szerint a tekercsnek a nyitott áramra való hatása zérussal egyenlõ; de nem egyenlõ zérussal *a Helmholtz*-féle elmélet szerint.

Ebbõl fontos következtetést vonhatunk le. Fennebb a mágnességi erõnek háromféle fogalmi meghatározását adtuk; a harmadiknak nincs itt semmi értelme, mert egy áramelem itt nincs többé egy egyetlen erõ hatásának alávetve. Az elsõ meghatározásnak szintén nincs értelme a mi mostani vizsgálatunkban. Mert valóban, mi is az a mágnespólus? Ez nem más, mint valamely vonalszerû, végtelen hosszú mágnesnek a végpontja. Ez a mágnes valamely végtelen hosszúságú tekercscsel (nyitott szolenoiddal) helyettesíthetõ. Hogy a mágnességi erõ meghatározásának valamely értelme legyen, szükséges, hogy valamely nyitott áramnak valamely végtelen hosszúságú tekercsre gyakorolt hatása csakis ezen tekercs végpontjának helyzetétõl függjön, azaz hogy a nyitott áramnak valamely zárt tekercsre (zárt szolenoidra) gyakorolt hatása zérussal egyenlõ legyen. Ámde éppen most láttuk, hogy ez éppenséggel nincs így.

Másrészrõl a második meghatározás elfogadásában mi sem gátol bennünket, a mely tudniillik azon forgató-erõpár mértékét veszi alapul, a mely a mágnestût irányítani törekszik.

Ha azonban ezen második meghatározást elfogadjuk, úgy sem az indukczió hatásai, sem az elektrodinámikai hatások, nem fognak egyedül az erõvonalaknak az így meghatározott mágnességi térben való eloszlásától függeni.

III. Az ismertetett elméletek keltette nehézségek

Az Ampère-féle elmélethez képest *a Helmholtz*-féle elmélet haladást jelent. Hátra van még, hogy az összes nehézségeket elhárítsuk. A mágnességi tér fogalmának egyik elméletben sincs értelme, vagy ha tulajdonítunk is neki értelmet valamely többé-kevésbé mesterséges megállapodás révén, akkor a valamennyi elektrikustól jól ismert közönséges törvények nem alkalmazhatók többé. Ilyen módon a valamely sodronyban indukált elektromos indító erõt nem méri többé az ezen sodronyt szelõ erõvonalak száma.

Ellenszenvünk azonban nemcsak abból származik, hogy nehéz a nyelvbe és a gondolkodásmódba beférkõzött szokásokról lemondanunk. Ennél többrõl van szó. Ha a távolba való hatásokban nem hiszünk, akkor az elektrodinámikai jelenségeket a közeg módosulásából kell megmagyaráznunk. Éppen ez a módosulás az, a melyet mágnességi térnek nevezünk, s így az elektrodinámikai hatások csakis e tértõl függhetnek.

Mindezek a nehézségek a nyitott áramok föltételezésébõl származnak.

IV. Maxwell elmélete.

Ilyenek voltak az uralkodó elméletek okozta nehézségek, a mikor megjelent *Maxwell* és egy tollvonással mind e nehézségeket eloszlatta. Az õ felfogása szerint csakis zárt áramok léteznek.

Maxwell felveszi, hogy mikor valamely szigetelõben (dielektrikumban) az elektromos tér megváltozik; akkor ez a dielektrikum valamely különös jelenség színhelyévé válik, a mely úgy hat a galvanométerre, mint valamely áram, a melyet *Maxwell eltolódási áramnak* nevez.

Ha most két oly vezetõ, melyeken ellenkezõ elektromos töltések terülnek el, valamely sodrony útján vezetõ összeköttetésbe jut, akkor ebben az összekötõ vezetõsodronyban a kisülés tartama alatt nyitott vezetési áram fog folyni; egyidejûleg azonban a környezõ dielektrikumban eltolódási áramok fognak keletkezni, a melyek ezen nyitott vezetési áramot zárják és így vele együtt zárt áramot alkotnak.

Tudjuk, hogy *a Maxwell*-féle elmélet a fényjelenségek magyarázatához is vezet, a mely jelenségeket rendkívül gyors elektromos rezgéseknek tulajdonítja. Abban az idõben ez a felfogás legfeljebb vakmerõ föltevés számba mehetett, a mely még semmiféle tapasztalati tényre nem támaszkodhatott.

Húsz évvel késõbb *Maxwell* eszméi kísérleti bizonyítást nyertek. *Hertz-nek* sikerült[41] elektromos rezgõ rendszereket elõállítani, melyek a fény összes sajátságait mutatták és tõle csak a hullám hosszúságában különböztek, mint a hogyan az ibolyaszín hullámhosszúsága különbözik a vörösétöl. *Hertz* ezáltal úgyszólván elektromos úton állított elõ fényforrásokat.

Azt mondhatnók, hogy *Hertz* nem közvetlenül *Maxwell*-nek az alapeszméit mutatta ki, ugyanis nem mutatta ki az eltolódási áramoknak a galvanométerre való hatását. Ez bizonyos értelemben igaz; õ közvetlenül azt bizonyította be végeredményben, hogy az elektromágneses indukczió nem pillanatszerûleg terjed tova, mint a hogyan addig gondolták, hanem a fényével egyenlõ terjedési sebességgel.

Ámde, akár felveszszûk azt, hogy eltolódási áram nem létezik és hogy az indukczió a fény terjedési sebességével halad tova; akár pedig azt veszszük fel, hogy az eltolódási áramok indukáló hatásokat létesítenek és ez indukczió azután pillanatszerûleg terjed tova: ez tulajdonképpen *egyés ugyanaz a dolog.*

Ezt ugyan az elsõ pillanatban nem látjuk be, de bebizonyíthatjuk oly mathematikai analizis segítségével, a melynek e helyen való tárgyalására itt nem is gondolhatunk.

V. Rowland kisérletei.

Ám, a hogy fennebb már mondottam, a nyitott vezetési áramoknak két faja létezik: elõször valamely elektromos sürítõnek vagy tetszés szerinti vezetõnek a kisülési árama.

Olyan esetek is léteznek, a hol az elektromos töltések zárt utat írnak le, oly módon, hogy az áramkör egy részében vezetés útján mozognak tova, más részében pedig elszállítás útján.

Az elsõ fajtájú nyitott áramokra nézve a kérdést megoldottnak tekinthetjük: ezek az eltolódási áramok révén záródtak.

A második fajú nyitott áramokra nézve még egyszerûbbnek látszott a megoldás; ha az áram zárt volt, akkor úgy látszott hogy a záródást csak az elszállítási áram közvetíthette. E czélból elegendõ volt felvenni, hogy az elszállítási áram, azaz valamely mozgásba helyezett, elektromosan töltött vezetõ a galvanométerre hatást gyakorolhat.

Hiányzott azonban a kísérleti igazolás. Valóban nehéznek látszott elég nagy erõsségû ilyen áramot elõállítani, még akkor is, ha a vezetõ töltését és sebességét a lehetõ legnagyobb mértékben növelték is.

Egy rendkívül ügyes kísérletezõnek, *Rowland*-naksikerült e nehézségeket legelõször legyõzni, vagy legalább is a legyõzés látszatát kelteni. Valamely korongot erõs elektrosztatikus töltéssel láttak el és egyszersmind igen gyors forgásba hoztak. A közelébe felállított asztatikus mágnes-rendszer kitérítéseket szenvedett.

A kísérleteket *Rowland* kétszer is végrehajtotta, egyszer Berlinben és egyszer Baltimoreban; azután *Himstedt* is megismételte. Mind a két fizikus azt vélte, hogy még mennyiségi jellegû méréseket is végezhettek.

Valóban húsz évig a Rowland-féle törvényt az összes fizikusok ellenmondás nélkül elfogadták.[42]

Egyebekben minden más csak megerõsíteni látszott e törvényt. A szikra tényleg okoz bizonyos mágnességi hatást; vajjon nem valószínû-e, hogy a szikra útján való kisülés nem tulajdonítandó-e oly részecskéknek, a melyek az egyik elektródról leszakadnak és töltésükkel együtt a másik elektródra repülnek? Vajjon a szikrának a színképe, a melyben az elektród fémének vonalai felismerhetõk, nem képeznek-e szintén bizonyítékot erre nézve? A szikra ilyenformán valóságos elszállítási áram lenne.

Másfelõl azonban, mint tudjuk, felveszik, hogy az elektromosságot az elektrolitban mozgó iónok viszik tova. Az elektrolitban e szerint az áram szintén valóságos elszállítási áram volna; hiszen mágnestûre szintén hat.

Ugyanez áll a kathódsugarakra nézve is; *Crookes* ezeket a sugarakat bizonyos igen finom anyagnak tulajdonítja, a mely negativ elektromossággal van töltve s a mely igen nagy sebességgel mozog tova, vagy más szóval, õ úgy tekintette e sugarakat, mintha elszállítási áramok lettek volna. Ezeket a kathódsugarakat pedig a mágnes eltéríti. A hatás és ellenhatás elvénél fogva e sugaraknak is eltérítõ hatást kellene gyakorolniok a mágnestûre.

Igaz; hogy *Hertz* azt vélte, hogy bebizonyította, miszerint a kathódsugarak negativ elektromosságot nem visznek magukkal és hogy a mágnestûre nem hatnak. De *Hertz* csalódott; mindenek elõtt *Perrin*-nek sikerült az ezen sugaraktól továbbított elektromosságot összegyüjteni, a melynek *Hertz* tagadta a létezését; a német tudóst úgy látszik az *X* sugarak hatása vezette félre, a melyeket akkor még nem fedeztek fel. Végül legújabban a kathódsugaraknak a mágnestûre való hatását is teljes biztossággal megállapították.[43]

Ily módon mindazok a jelenségek, a melyeket áramoknak tekintettek, a szikrák, az elektrolitikus áramok, a kathódsugarak, egyenlõ módon hatnak a galvanométerre és pedig valamennyien *a Rowland*-féle törvény értelmében.

VI. Lorentz elmélete.

Csakhamar még tovább mentek. *A Lorentz*-féleelmélet szerint a vezetési áramok maguk is valóságos elszállítási áramok volnának; az elektromosságról felvették, hogy bizonyos anyagi részecskékkel, az elektrónokkal elválaszthatatlan kapcsolatban áll; ezeknek az elektrónoknak a testek belsejében való mozgása okozná a *Volta*-féle áramokat; és a vezetõket a nem vezetõktõl megkülönbözteti az, hogy az egyiket átjárhatják az elektrónok, míg a másik gátolja õket mozgásukban.

A Lorentz-féle elmélet igen csábító, igen egyszerû magyarázatát adja bizonyos oly jelenségeknek, melyeket a régi elméletek nem tudnak kielégítõleg megmagyarázni, még *Maxwellnek* elmélete sem az eredeti formájában; ilyen jelenség pl. a fény aberrácziója, a fényhullámok részleges elragadása, ugyanis a testekkel együtt való elszállítása, a mágnességi sarkítás, *a Zeeman*-félekisérlet.

De azért megmarad még néhány ellenvetés. Valamely rendszerben megfigyelt jelenségek függeni látszanak ezen rendszer súlypontjának abszolut haladási sebességétõl, a mi úgy látszik, ellenmondásban van avval a felfogással, melyet magunknak a térfogalom viszonylagos voltáról alkottunk. *Crémieu*-re támaszkodva, *Lippmann* alkalmas formába hozta ezt az ellenvetést. Vegyünk fel két töltött vezetõt, a melyek ugyanolyan haladási sebességgel mozognak tova. Egymáshoz képest viszonylagos nyugalomban vannak; mindazonáltal e közben kölcsönösen vonzaniok kellene egymást, ha mindegyikük valamely elszállítási árammal volna egyenértékû és ezen vonzást megmérve, abszolut sebességeiket is megmérhetnõk.

Nem, így felelnének *Lorentz* hívei; az a mit így mérnének, az nem az abszolut sebességük lenne, hanem a nyugvó *éterre vonatkoztatott* viszonylagos sebességüék, úgy hogy a viszonylagosság elve meg volna mentve.[44]

Bármilyenek is legyenek ezek az utolsó ellenvetések, az elektrodinámika épülete, úgy látszik legalább, fõbb vonalaiban végképpen meg van alkotva; minden teljesen kielégítõnek látszik; *Ampère és Helmholtz* elméletei, melyek a többé nem létezõ nyitott áramok magyarázatára készültek, úgy látszik, már csak tisztán történeti értéküek; és ma már csaknem végképpen elfelejtettük azokat a megfejthetetlen bonyodalmakat, a melyekhez ezen elméletek vezettek.

Ezt a nyugalmat újabban megzavarták *Crémieu* kisérletei, a melyek az annak idejében *Rowland*-tóltalált eredményeknek egy pillanatra ellenmondani látszottak.

Legújabb vizsgálatok azonban ezeket nem erõsítették meg és a *Lorentz*-féle elmélet ismét gyõzelmesen állotta ki e próbát.

E váltakozások története nem csekély mértékben tanulságos; megtanít bennünket arra, hogy a tudós milyen csapdáknak van kitéve és mennyiben lehet reménye arra, hogy e csapdákat elkerülje.

TIZENNEGYEDIK FEJEZET.

Az anyag pusztulása.

Kétségkívül egyike a legmeglepõbb felfedezéseknek az, a melyet a fizikusok az utóbbi években hirdetnek, ugyanis, hogy az anyag egyáltalában nem létezik. Siessünk hozzátenni, hogy ez a felfedezés még nem tekinthetõ véglegesen befejezettnek. Az anyag lényeges ismertetõ jele a tömeg, a tehetetlenség. A tömeg mindig és minden körülmények között állandó marad; ez változatlannak marad még akkor is, ha bármilyen chémiai változás az anyag összes észrevehetõ sajátságait átalakította és látszólag mintegy új testet hozott létre. Ezek szerint, ha sikerülne bebizonyítani, hogy az anyag tömege, tehetetlensége, tulajdonképpen nem magához az anyaghoz tartozó sajátságok, hanem csak kölcsönzött fényûzés, a melylyel díszíti magát; ha bebizonyítanánk, hogy ez a tömeg ez a kiválóan állandó mennyiség, tulajdonképpen maga is változásokat szenvedhet, akkor bizonyára joggal mondhatnók, hogy az anyag nem létezik. Ámde éppen ezt állítják legújabban a kutatók.

Azok a sebességek, a melyeket eddig megfigyelhettünk, aránylag csekélyek, mert az égi testek, a melyek mögött valamennyi automobiljaink is ugyancsak elmaradnak, alig 60-100 kilométert tesznek meg másodperczenként. Igaz, hogy a fény 3,000-szer gyorsabban halad, csakhogy ez nem elmozgó anyag, hanem zavarásszerû jelenség, a mely aránylag mozdulatlan anyagon keresztül halad tova, miként a hullám az oczeán felületén. Az összes, eme kisebbszerû sebességekre vonatkozó megfigyelések azt mutatták, hogy a tömeg állandó és senki nem gondolkozott azon, vajjon nagyobb sebességek esetén is ugyanígy áll-e a dolog?

A végtelen kicsiny testek verték le a *Merkur*nak, a leggyorsabb bolygónak rekordját. Amaz igen kicsiny testecskéket értem, a melyek mozgása a kathódsugarakat, illetve a rádiumsugarakat létesíti. Tudjuk, hogy ezek a sugározások valóságos molekuláris lövöldözés következményei. Az ezen lövöldözésben tovahajított lövedékek negatív elektromossággal vannak megtöltve, a mirõl meggyõzõdhetünk, ha ezt az elektromosságot egy *Faraday*-félehengerbe gyüjtjük. Töltésük következtében úgy a mágnességi, mint az elektromos erõtérben eltérítést szenvednek és ezen eltérítéseiknek egymással való összehasonlításaiból megtudhatjuk e testecskék sebességét és töltésüknek tömegükhöz való viszonyát.

Ámde ezek a mérések egyrészrõl arról világosítottak fel bennünket, hogy sebességük rendkívül nagy, hogy ez tizedrésze, vagy a harmadrésze a fénysebességnek, azaz, hogy ez ezerszer nagyobb a bolygók sebességénél; és másrészrõl mutatták a kisérletek, hogy töltésük, anyagi tömegükhöz viszonyítva, igen jelentékeny. Minden mozgó testecske jelentékeny elektromos áramot képvisel. De azt is tudjuk, hogy az elektromos áramok bizonyos különös fajú tehetetlenséget mutatnak, melyet *önindukcziónak* nevezünk. Ugyanis valamely egyszer létesített áram igyekszik magát tovább is fentartani és azért, ha a vezetõ kettémetszésével az áramot meg akarjuk szakítani, a megszakítás helyén szikrát látunk átugrani. Ilyen értelemben az áram, mintegy meg akarja tartani elõbbi erõsségét csak úgy, mint a hogyan valamely mozgó test sebességének a megtartására törekszik.

Ám a mi, kathódról lepattanó testecskénk ellenállást fog tanusítani azokkal az okokkal szemben, a melyek sebességét megváltoztathatnák és pedig két körülménynél fogva: Elõször is a tulajdonképpeni anyagi tömegétõl származó saját tehetetlenségénél fogva és azután a saját önindukcziójánál fogva; mert a sebesség minden megváltozása eggyúttal a megfelelõ áram megváltozását vonja maga után. E szerint a testecskének, vagy a mint nevezni szokták, az elektrónnak kétféle tehetetlensége lesz: mechánikai tehetetlensége és elektromágnességi tehetetlensége.

Abraham és *Kaufmann*, az elõbbi elméleti, az utóbbi kisérletezõ buvár, együttesen kisérelték meg az elektrón mechánikai és elektromágneses tehetetlensége megállapítását. E czélból egy föltevéshez kellett folyamodniok; azt tették fel, hogy az összes negativ elektrónok azonosak, hogy ugyanakkora töltést hordoznak magukkal, mely lényegesen állandó és hogy azok az eltérések, a melyek közöttük mégis észlelhetõk, egyedül különbözõ sebességeiknek tudhatók be. Ha a sebesség változik, akkor a valóságos tömeg, a mechánikai tömeg állandó marad, sõt úgyszolván ez magának az anyagi tömegnek fogalmi meghatározása; az elektromágnességi tehetetlenség azonban, a mely a látszólagos tömeg kialakításához hozzájárul, a sebességgel együtt bizonyos törvény szerint nõ. Léteznie kell eszerint bizonyos összefüggésnek a sebesség és a tömegnek a töltéshez való viszonya között; e mennyiségeket pedig, mint fennebb már mondottuk, kiszámíthatjuk, ha a sugaraknak valamely mágnességi vagy elektromos tér okozta eltérítéseit megfigyeljük; e viszony tanulmányozása azután képesít bennünket arra, hogy az egész tehetetlenség értékében a kétféle tehetetlenség mindegyikének részét megállapítsuk. Az eredmény a legnagyobb mértékben meglepõ; *a valóságos tömeg értéke zérus.* Igaz ugyan, hogy a fenti föltevést kellett kezdetben felvennünk, hogy ehhez az eredményhez jussunk, de a számítás útján és a kisérleti úton nyert görbe egymással való megegyezése elég jó arra nézve, hogy e föltevést mint igen valószinût elfogadhassuk.[45]

Ezek szerint a negatív elektrónoknak tulajdonképpeni tömegük nincs; ha mégis úgy látszik, hogy tehetetlenséggel vannak felruházva, ennek oka az, hogy az éter megzavarása nélkül nem képesek sebességeiket megváltoztatni.

Látszólagos tehetetlenségük csak kölcsönzött, nem a saját tehetetlenségük, hanem az éteré. Ámde az anyag nem áll kizárólag e negativ elektrónokból; meg kell engednünk azt, hogy kívülük létezik valamely tulajdonképpeni anyag, a melynek saját tehetetlensége van. Vannak oly sugárzások, mint a *Goldstein*-félecsõsugarak, a rádium *á* sugarai, a melyek szintén apró lövedékek záporának következményei, de a mely lövedékek pozitiv töltésüek; vajjon ezek a pozitiv elektrónok is tömegnélküliek-e? Ezt egyáltalán nem állíthatjuk, mert sokkal nehézkesebbek és sokkal lassúbbak, mint a negativ elektrónok. Ilyen módon két megengedhetõ föltevésünk marad. Vagy nehezebbek ezek az elektrónok, mert a saját kölcsönzött elektromágnességi tehetetlenségükön kívül még saját mechánikai tehetetlenségük is van, s így õk képezik a valódi anyagot; vagy pedig ezek is tömegnélküliek mint amazok és ha nekünk súlyosabbaknak látszanak, ez csak azért van, mert kisebbek. Jól mondom, hogy „kisebbek", jóllehet ez az állítás ellenmondásnak látszhatnék; a testecskék ugyanis e felfogás szerint az éterben képezett ûrök s az éter az egyedüli valóság és csak az éter van tehetetlenséggel felruházva.

Eddig az anyag mai fogalma még nincs nagyon megbélyegezve; még az elõbbi elsõ föltevéshez folyamodhatunk, vagy azt gondolhatjuk, hogy a pozitiv és negativ elektrónokon kívül semleges atomok is léteznek.

Lorentz legújabb vizsgálatai még ezt az egy kisegítõ értelmezést is kizárják. A Föld mozgása, a mely igen gyors, magával ragad bennünket, vajjon nem hat-e a fénytani és elektromos jelenségekre e haladó mozgás? Régóta gondolták már ezt és feltételezték, hogy a megfigyelések felfednek majd oly különbségeket, melyek a Föld mozgása folytán a mû-szerek viszonylagos irányításában jelentkezni fognak. Ez azonban egyáltalában nem történt meg és még a legfinomabb mérések sem mutattak ehhez hasonlót. És e tekintetben a kisérletek az összes fizikusoknak ezen felfogással szemben tanusított ellenszenvét igazolták. Mert ha valami ilynemû dolgot mégis eredményezett volna a vizsgálat, akkor ezen a réven nemcsak a Földnek a Naphoz való viszonylagos mozgását ismertük volna meg, hanem az éterben való abszolut mozgását is.

Ámde sok ember nem hiheti el, hogy bármiféle kisérlet többet nyújthatna valamely viszonylagos mozgás ismereténél; sokkal sziveseben elhiszik ellenben azt, hogy az anyagnak nincs tömege.

Az elért negativ eredményeken nem lepõdtek meg túlságosan. Elvben ezen eredmények ellene voltak az eddig tanított elméleteknek, de oly mély ösztönt dédelgettek, mely mindemez elméleteknél régibb. Mégis úgy látszott, hogy ezen elméleteket fokról-fokra módosítani kell, hogy a tényekkel megegyezésben maradjanak. Ezt tette *Fitzgerald*, egy ugyancsak meglepõ föltevéssel: Õ felveszi; hogy a Föld mozgásának iránya mentén valamennyi test bizonyos összehúzódást szenved, a mely egész hosszának mintegy százmilliomod része. Valamely tökéletes gömb lelapított ellipszoiddá válik, melyet ha forgatunk, oly módon alakul át, hogy az ellipszoid kis tengelye a Föld haladásának sebességével mindig párvonalas marad. Mivel azonban a mérõ mûszerek ugyanazon alakváltozásokat szenvedik, mint maguk a megmérendõ, testek, semmit sem vehetünk észre, vagy legalább is úgy nem, ha azt az idõt nem veszszük figyelembe, a melyre a fénynek szüksége van, hogy a vizsgálandó tárgyat áthassa.

Ez a föltevés számot ad a megfigyelt tényekrõl. De ez nem elég. El fog jönni az idõ, a mikor még pontosabb megfigyeléseket fognak végezni; az eredmények ezúttal pozitivak lesznek-e? vajjon képesek leszünk-e ezáltal a Föld abszolut sebességét meghatározni? *Lorentz* nem gondolt erre, azt hitte, hogy ez a meghatározás mindenkorra lehetetlen lesz. Az összes fizikusok közös érzékszerû meggyõzõdése, az eddigi sikertelenségek, eléggé jót állottak neki errõl.

Tekintsük eszerint ezt a lehetetlenséget a természet általános törvényének, tekintsük ezt követelménynek.[46] Vajjon miféle következményekkel fog ez járni? Ezt kereste *Lorentz*, s azt találta, hogy az összes atomok, az összes pozitiv vagy negativ elektrónok tehetetlensége szükségképpen változni fog; a sebességgel együtt és pedig szigorúan ugyanazon törvények szerint.

Ilyen értelemben minden anyagi atom kicsiny, de súlyos pozitiv elektrónokból és nagy, de könnyû negativ elektrónokból lenne alkotva; és ha maga az érzékeinkkel felfogható anyag nem látszik elõttünk elektromosnak, ez azért van, mert az elektrónok két fajtája körülbelül egyenlõ mennyiségben van együtt. Egyik is, másik is tömeg nélküli és csak kölcsönzött tehetetlenségük van. E rendszerben nem létezik igazi anyag, csak üregek vannak az éterben.

Langevin szerint az anyag lecsapódott, folyósított éter lenne, mely sajátságait elvesztette. Ha azután az anyag elmozdul; nem ez a lecsapódott tömeg mozog tova az éteren át, hanem a lecsapódás folyamata terjed tova lépésrõl-lépésre az éter újabb részleteire, míg fordítva, a mozgás irányával ellentett oldalon, az elõbb már lecsapódott részek visszanyernék eredeti állapotukat. Az anyag ily mozgása közben nem tarthatná meg azonosságát.

Íme így állott a kérdés bizonyos idõvel ez elõtt, most azonban *Kaufmann* újabb kisérletekrõl számol be.[47] A rendkívül nagy sebességû negativ elektrónoknak, *a Fitzgerald-*

féleösszehúzódást is el kellene szenvedniök és így a sebesség és tömeg közötti viszonynak változnia kellene; azonban a legújabb kutatások nem erõsítik meg ezt a várakozást. Minden összedõlne hát és az anyag visszaszerzi létjogát.

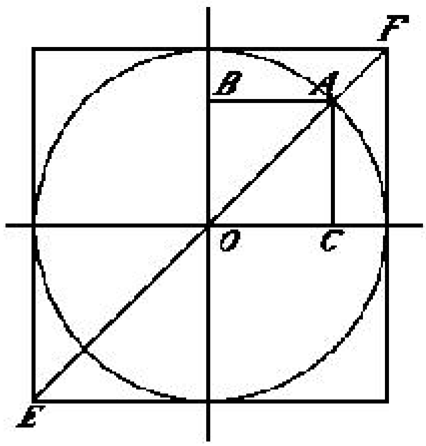
Ámde a kisérletek kényes kisérletek és korai dolog lenne már ma végérvényes következtetéseket levonni.

JEGYZETEK

ZEMPLÉN GYÕZÕTÕL

1) A hazai tudományos irodalomban fölemlítendõ *König Gyula* "Analízis" czímû munkája (1887, A Magyar Tudományos Akadémia kiadása), melyben úgy az alapmûveleteknek, mint a különbözõ számfogalmaknak (a negatív, tört, irraczionális, képzetes számoknak) szigorúan tudományos bevezetése megtalálható.

2) Az irraczionális szám fogalmának az egész szám segítségével való felépítése sokat foglalkoztatta a legkiválóbb matematikusokat; fölemlítjük a következõ mûveket: *Dedekind I. W. R.*, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig, 1872, *Tannery I.,* Introduction á la théorie des fonctions d'une variable, Paris, 1886; *Cantor G.* értekezése a Mathematische Annalen 5. és 21. kötetében és *König Gyula* már elõbb idézett "Analizis"-e. - Az irraczionális számoknak a szövegben vázolt bevezetése *Tannery* és *Dedekind* felfogását követi.



3) *Kronecker L.* felfogását kiválóan jellemzi a következõ, neki tulajdonított megjegyzés: "Az egész számokat a jó Isten teremtette, minden egyéb már emberi mû."

4) A mellékelt rajzon a nagy négyzetbe írt kör *A* pontban metszi az *EF* átlót. *A* pontnak az *O* középpontra vonatkozó összerendezõi (koordinátái) *OC* és *CA.* Az egész idom részarányossága mutatja, hogy *OC = CA.* Ámde akkor *Pithágorász* tétele alapján

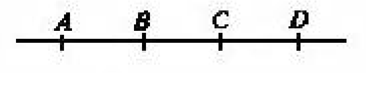
$$OA^2 = OC^2 + CA^2 = 2 \,.\, OC^2$$

Ha pedig a kör sugara *OA* = 1, akkor $1^2 = 1 = 2 \times OC^2$ és

$$OC = CA = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Az *A* pont koordinátái tehát valóban irracionális számok.

5)



Valóban, ha *AB = CD,* akkor *AB + AC = AD,* mert hiszen

$$AC = AB + BC = BC + CD = BD;$$

tehát: $AB + AC = AB + BD = AD$, amit be kellett bizonyítani.

Du Bois Reymond P. D. G., Die allgemeine Funktionentheorie, Metaphysik und Theorie der Mathematischen Grundbegriffe, Tübingen, 1882.

l. A különbözõ rendû *végtelen kicsinyek* fogalma a következõképpen határozható meg:

Legyen $f(x)$ az x-nek valamely függvénye, amelynek értéke a zérushoz közeledik, amint x közeledik a zérushoz. Ha most

$$\frac{f(x)}{x}$$

egy zérustól különbözõ véges számhoz közeledik, amint x a zérus felé tart, akkor $f(x)$ az $x = 0$ érték mellett *elsõrendû végtelen kicsiny*.

Elsõrendû végtelen kicsiny, pl. maga az $f(x) = x$ függvény az $x = o$ helyen, mert valóban

$$\frac{x}{x} = 1$$

x minden értéke mellett, tehát $x = o$-nál is.

Már $f(x) = x^2$, nem így viselkedik.

$$\frac{x^2}{x} = x$$

és így az $x = o$ értéknél $\frac{x^2}{x}$ még $= 0$; ha ellenben x^2-t x második hatványával osztjuk, akkor $\frac{x^2}{x}$ = 1 az $x = o$ helyen megint = l, míg ha x^2-t x-nek másodiknál magasabb hatványával osztjuk, akkor e hányados értéke már végtelenül növekszik, ha x a zérus felé tart; pl. $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ és $\frac{1}{x}$ minden határon túl növekszik, ha x zérushoz közeledik. Az $f(x) = x^2$-ra, ez esetben azt mondjuk, hogy *másodrendû végtelen kicsiny* az $x = o$ helyen.

Általában valamely $f(x)$ függvény az $x = o$ helyen *n-edrendû végtelen kicsiny* lesz, ha x-nek n-edik hatványával elosztva, egy zérustól különbözõ véges számhoz közeledik, ha x a zérus felé tart. Ez esetben tehát:

$$\frac{f(x)}{x^{n-1}} = o \text{ ha } = o;$$

$$\frac{f(x)}{x^{n}} = \text{véges szám (nem } 0 \text{) ha } x = o;$$

$$\text{és } \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \text{végtelen nagy, ha } x = o.$$

Maga az x^n az $x = o$ helyen *n*-edrendû végtelen kicsiny.

2. Egészen hasonlóan határozható meg a különbözõ rendû *végtelen nagy* mennyiségek fogalma:

Ha valamely *f(x)* függvény $x = o$ helyen oly módon lesz végtelen nagy, hogy x^n-nel kell szorozni, hogy e szorozmány véges számhoz közeledjék, ha *x* zérus felé tart, akkor *f(x)* az $x = o$ helyen *n-edrendû végtelen nagy*.

Vannak végtelenedrendû végtelen kicsinyek, illetõleg ugyanily nagyok is.

Így pl. valamely pozitív számnak $\frac{1}{x}$ -edik* hatványa $a^{\frac{1}{x}}$, ha *x* a 0-hoz közeledik, végtelenedrendû végtelen nagy lesz. Amint *x* kisebbedik, az $\frac{1}{x}$ kitevõ növekszik, tehát $a^{\frac{1}{x}}$ nõ, mégpedig oly gyorsan, hogy hiába szorozzuk meg *x*-nek akármilyen magas, véges *n*-edik hatványával, az

$$x^n a^{\frac{1}{x}} \text{ szorzat az } x = o$$

helyen még mindig végtelen nagy lesz.

Ha *f(x)*-et *x*-nek valamely *tört* hatványával kell szorozni, hogy zérustól különbözõ véges számot kapjunk az $x = o$ helyen, akkor *(x)n*-edrendû, tehát *törtrendû végtelen nagy*. Ilyen pl. $f(x) = x^{\frac{\pm}{b}}$.

Ha adva van két függvényünk *f(x)* és *g(x)*, melyek $x = o$-nál mindketten zérusok, de $\frac{f(x)}{g(x)}$ véges számhoz közeledik, amint az *x* a 0 felé tart, akkor *f(x) és g(x) egyenlõrendû végtelen kicsinyek* $x = o$-nál; ha ellenben *f(x)*-et *g(x)n*-edik hatványával kell osztani, hogy véges számot kapjunk $x = o$-nál, akkor azt mondjuk, hogy *f(x)* a *g(x)*-hez képest *n-edrendû végtelen kicsiny*.

Így értelmezendõk ama különféle végtelen kicsiny és végtelen nagy mennyiségek, amelyekrõl a szövegben szó van.

7) A nem *Euklides*-féle geometriának - melyet *abszolút g*eometriának is szokás nevezni - megteremtõi az orosz *Nikolaj Ivanovics Lovacsevszki* (1793 -1856) és a magyar *bolyai Bolyai János* (1802 - 1860) az ugyancsak hírneves *Bolyai Farkas*, marosvásárhelyi matematikus fia. *Lovacsevszki* elsõ idevágó munkái a kazani akadémia évkönyveiben jelentek meg 1829 - 1838-ig, 1837-ben egy összefoglaló értekezése jelent meg a *Crelle* szerkesztette Journal für

reine und angewandte Mathematik 17-ik kötetében. *Bolyai* vizsgálatait atyjának nagy matematikai munkája, a »*Tentamen*«-nekfüggelékében foglalta össze latin nyelven (a *Tentamen* új kiadása nemrég jelent meg a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában: az I. kötet 1897-ben, a II. kötet (1. rész és 2. rész) 1904-ben. A *Tentamen,* e híres *Appendix*-évélegyütt 1832-ben jelent meg Marosvásárhelyt, tehát három esztendõvel késõbb, mint *Lovacsevszki* orosz nyelvû közlései Kazanban; azonban tekintve azt, hogy akkoriban mily nehezen terjedtek el a tudományos felfedezések (a kazani akadémia orosz nyelvû évkönyveit ugyan kevesen olvashatták Marosvásárhelyt), biztosra vehetõ hogy *Bolyainak Lovacsevszki* vizsgálatairól tudomása nem volt. *Bolyainak* atyjához intézett leveleibõl pedig kitûnik, hogy a fiatal mérnökkari tisztet már mily hosszú idõn át foglalkoztatták e gondolatok és már 1823-ban örömmel írja atyjának, hogy: "semmibõl egy új, más világot teremtettem".

Az egész tudományos világ feltétlenül elismeri, hogy *Bolyai Lovacsovszki*-tõl teljesen függetlenül fedezte fel ezt az új világot, amivel az egész emberiség legkiválóbb elméi közé küzdötte fel magát.

A prioritási kérdés eldöntésében nagy érdeme van *Stäckel* és *Engel*-nek, kik az idevágó kútfõket összegyûjtvén, *Bolyai János* szerepét teljesen tisztázták: 1. e szerzõk Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss Leipzig, 1905, és Urkunden zur Geschichte der nicht Euklidischen Geometrie, Leipzig, 1899. Érdekes világot vet a kérdésre és *Gauss*-nak szerepére *Gauss* és *Bolyai Farkas* levelezése, mely a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában jelent meg 1899-ben (németül is Teubnernél Leipzigben).

A két *Bolyai* amúgy is rendkívül érdekes életének történetét *Bedõházy* írta meg "A két Bolyai" címen (Marosvásárhely, 1897).

Bolyai János Appendixének az akkori szokás szerint terjedelmes címe a következõ: Appendix Scientiam Spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica Auctore Johanne Bolyai de Eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Magyarul: A térnek abszolút igaz tudományát tartalmazó függelék, mely független Euklides XI. axiomájának (a priori soha el nem dönthetõ) helyes, vagy hamis voltától: ezt követi a kör geometriai quadraturája ez axioma helytelen voltának esetében. Szerzõje bolyai Bolyai János, a cs. kir. osztrák hadsereg mérnökkarának kapitánya.

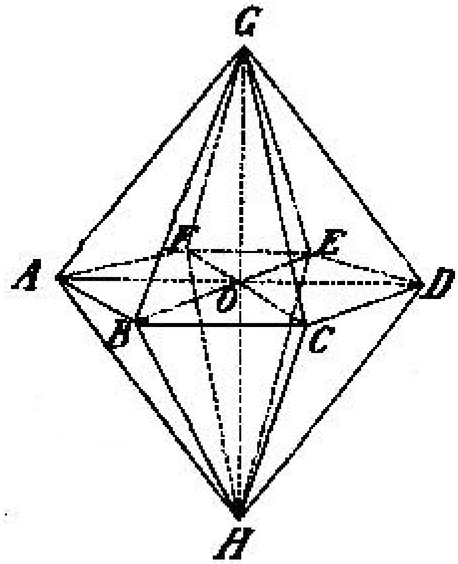
Azóta a világ minden nyelvére lefordították; magyar nyelvre lefordította *Suták József* önálló könyv alakjában (Budapest, 1897) és *Rados Ignácz* aMath. és Phys. Lapok VI. kötete hasábjain (1897). 1902-ben a kolozsvári egyetem megünnepelte Bolyai János születésének százéves évfordulóját és ez alkalommal összegyûjtötte a nem *Euklides*-félegeometria teljes irodalmi jegyzékét a következõ cím alatt:

Libellus post saeculum quam Joannes Bolyai de Bolya anno 1802 a. D. Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immortalem . . .

Claudiopoli, 1902.

8) Valamely csillag *parallaxisa* ama szög, amelyet a Föld két különbözõ pontjából a csillaghoz (csillag középpontjához) vont két egyenes egymással bezár. A csillagászati táblázatokban a csillagok helyzetére vonatkozó adatok a Föld középpontjára vonatkoznak, ha tehát a csillagász ezen adatokat megfigyeléseiben használni akarja, ismernie kell a megfigyelési hely és a Föld középpontjára vonatkozó parallaxist.

9) Az *Euklides*-féle geometriában a háromszög szögeinek összege 180, amibõl következik, hogy a körbe írt szabályos hatszög *(A B C D E F)* oldala *AB* és sugara *AO* egymással egyenlõk, mert *az AOB* háromszögben mindhárom szög 60-kal egyenlõ. Az α βγ oly derékszögû háromszög, mely ráillik *AGO*-ra*; az Euklides*-félegeometriában *AO* egyenlõ *AB*-vel, tehát α γ, mely azelõtt *AO*-raillett rá, az *AB = BC = CD = DE = EF= AF*-ra is rá fog illeni. - Ha azonban *a nem Euklides*-félegeometria volna érvényes, akkor *AO* nem volna egyenlõ *AB*-vel és ha, αβγ ráillik *AGO*-ra, αγ már nem illik rá *AB*-re.



10) A szövegben említett mûvek pontos címe a következõ:

Newton Isaac, Philosophiae naturalis Principia mathematica, elsõ kiadása London, 1687.

Thomson W. and *Tait P.* G., Treatise on natural philosophy, Oxford, 1867 (német fordítása megjelent Braunschweigben 1874-ben *Helmholtz* és *Wertheim* tollából "Handbuch der theoretischen Physik" cím alatt). Második kiadása két kötetben: Cambridge, 1879; 1883.

Lagrange I. L., Mécanique analitique, Paris 1788, vagy Oevres complètes 11, 12 K. Paris, 1892.

Kirchoff G., Vorlesungen über mathematische Physik, I. Bd, Mechanik, Leipzig 1876, (azóta négy kiadást ért).

Az e fejezetben tárgyalt kérdést érdekesen és népszerûen fejtegeti *Mach E.,* Die Mechanik in ihrer Entwickelung (I. kiadás, Leipzig 1883, V. kiadás, Leipzig 1904).

A magyar tudományos irodalomból kiemelendõ *Fröhlich I.,* Az elméleti physika kézikönyve, I. kötet, Kinematika, Budapest 1892. II, kötet, Dynamika (elsõ rész) Budapest 1896, megjelent a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában.

11) A nehézség változása a Földön igen csekély, úgy, hogy a változás kimutatására igen érzékeny eszközökre van szükség. Az egyenlítõn a nehézség gyorsulásának átlagos értéke 978.1 $\frac{cm}{sec^2}$, Budapesten 980.84, az északi, ill. déli sarkon pedig (számított értéke) 9832 - Elképzelhetõ ezen adatokból milyen csekélyek a változások kisebb távolságokon. *Eötvös Loránd bárónak* mégis sikerült oly bámulatos érzékenységû eszközöket kigondolni és megszerkeszteni, amelyekkel a nehézség nagyság és irány szerinti változásait *néhány centiméternyi távolságon* pontosan le lehet mérni. Eljárásának lényege abban áll; 'hogy igen vékony, függõleges fémsodronyra mintegy 30 cm. hosszú vízszintes rudat függeszt. A rúd végére kis platinasúlyok vannak ráerõsítve; a két kis platinasúlyra ható nehézségi erõnek általában nem lesz ugyanaz az iránya, tehát a vízszintes síkba esõ összetevõi különbözõk lesznek; ezen, erõk hatása alatt a rúd a vízszintes síkban elfordul, elcsavarva a fémsodronyt. A rúd elfordulása lemérhetõ és ebbõl; ismerve a fémsodrony rugalmassági állandóját, ki lehet számítani a platinasúlyokra ható erõk közti különbséget. *Eötvös* eszközeinek egy második típusánál az egyik platina súly ugyancsak a vízszintes rúd végére van ráerõsítve, míg a másik súly a rúd másik végére van felfüggesztve mintegy $\frac{1}{2}$ méter hosszú vékony fonálon; mûködése az elõbbiéhez hasonló. Ezen eszközök érzékenysége valóban meglepõ: egyik mintánál, pl. ha az 1 grammra ható nehézségi erõ a vízszintes irányban centiméterenként 8.10^{-9} (8 ezermilliomod) dinnel változik, a vízszintes rúd 4.4 perccel fordul el; ami tükörrel és skálával megfigyelve, majdnem 3 mm a fémsodronytól 1 méter távolra elhelyezett skálán; tehát feltétlen biztossággal megállapítható. Megjegyzendõ, hogy 1 din körülbelül 1 milligrammnak a súlya, és hogy *Eötvös* báró még ennél sokkal érzékenyebb eszközöket is szerkesztett. *Eötvös* báró e tárgyra vonatkozó értekezései a következõk:

Vizsgálatok a gravitáció és földmágnesség körébõl, Mathematikai és Természettudományi Értesítõ, 14. kötet; 1896. 221-266. 1. ; Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus, Wiedemanns Annalen der Physik und Chemie, 59. kötet, 354-400; 1896.; Étude sur les surfaces de niveau et la variation de la pésanteur et de la force magnétique, Rapports présentés au Congrés International de Physique réuni à Paris, en 1900, III. kötet, 371-393 1. 1900.; ugyanez magyar nyelven a Math. és Phys. Lapok IX. kötetében, 361-385. l. 1900.; Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hülfe der Drehwage. Aus den Abhandlungen der XV. allgemeinen Konferenz der Erdmessung in Budapest, im Jahre 1906; 1-59 1. Leyden, 1907. Legutolsó idevágó dolgozata magyar és német nyelven egyidõben jelent meg a "Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei" címû mû I. kötete elsõ részének Geofizikai függelékében (1-61. I.) Budapest, 1908. Címe: "A Balaton nívófelülete s azon a nehézség változásai; az 1901. és 1903. évben a jég hátán végzett megfigyelések:" E munkát haszonnal olvashatják azok is, a kik a felsõbb mennyiségtanban nem járatosak, mert a tárgyalás teljesen elemi.

12) *Hertz H.,* Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt, Leipzig 1894. (Gesammelte Werke Bd. III.) Leipzig 1894.

13) *Kopernikusz Miklós* (1473-1543) a mai csillagászatban is használatos un. heliocentrikus rendszer megalapítója. - Elõtte, *Ptolemájosz* egyiptomi csillagászt követve, a bolygók mozgását a Földhöz viszonyították; *Kopernikusz* rámutatott arra, hogy egyszerûbb az égi testeknek a Naphoz viszonyított mozgása.

A két felfogás tulajdonképpen egyformán jogosult, mert hiszen csak a testek relatív mozgását tudjuk megfigyelni, abszolút mozgásaikat nem és így nem dönthetjük el ama kérdést, vajon a Nap kering-e a Föld körül, avagy a Föld a Nap körül.

Ptolemájosz szerint a kérdés fogalmazása a következõ: Milyen mozgást végeznek a bolygók Földünkhöz viszonyítva? *Kopernikusz* szerint pedig: Milyen mozgást végeznek a bolygók a Naphoz viszonyítva?

Mindkét kérdés egyformán jogosult, de *Kopernikusz* kérdésének megoldása *egyszerûbb* és ezért gyõzedelmeskedett *Kopernikusz fogalmazása Ptolemájosz*zén.

14) A "területek elve" nevét viselõ általános dinamikai törvény a bolygók mozgására alkalmazva *Kepler* második törvénye nevén ismeretes és így hangzik: *valamely bolygó vezérsugara ugyanazon idõközökben ugyanakkora területeket súrol,* ahol a vezérsugár azt az egyenes vonaldarabot jelenti, mely a Napot minden pillanatban a bolygóval összeköti. A területek elvének állandója az un. területi sebesség, azaz a vezérsugár által másodpercenként súrolt terület, mely éppen *Kepler* törvénye szerint az idõ folyamán változatlan marad. A bolygók tehát annál gyorsabban mozognak, minél közelebb vannak a Naphoz. A területek elvének állandója - mint látjuk - a bolygók mozgásának egyik fontos mennyiségi jellemzõ adata.

15) *Mayer Robert,* heilbronni orvos az Annalen der Chemie und Pharmazie 42. kötetében egy értekezést közölt 1842-ben, amelyben legelõször állítja, hogy "az erõ elpusztíthatatlan" és átalakítható hõvé. Erõ alatt *Mayer* azt értette, amit mai mûszóval "munká"-nak, illetve munkavégzõ-képességnek vagy "energiá"-nak nevezünk: õ állította legelõször, hogy a földre hulló kõdarab mozgási energiája $\left(\frac{\textit{tömeg} \times (\textit{sebesség})^2}{2}\right)$ nem vész el, hanem átalakul hõvé, amely a kõ s a föld felmelegedésén észlelhetõ. Késõbbi vizsgálatok *Mayer* felfogását igazolták és a ma ismeretes összes jelenségekre érvényesnek találták; így a dinamógépet forgatva, elektromos áramot kapunk, mely fût, világít, oldatokat alkotóelemeire bont; a gép forgatására felhasznált munka tehát nem veszett el, hanem átalakult elektromos energiává, hõvé, fénnyé, kémiai energiává. Megfordítva, az elektromotorba elektromos áramot vezetve be, az elektromotor forgásba jön és súlyok felemelésére szolgálhat, tehát az elektromos energia átalakult mechanikai energiává, munkává.

Helmholtz H. kevéssel *Mayer* után tette közzé "Über die Erhaltung der Kraft" címû mûvét (Berlin, 1847), melyben - nyilván nem ismerve *Mayer R.*. vizsgálatait - lényegben ugyanazon eredményekhez jutott, de azokat tökéletesebb alakban hozza kifelezésre. *Helmholtz* e klasszikus mûve magyar fordításban is megjelent a Mathematikai és Physikai Lapok 1897. évfolyamában (ford. *Szekeres Kálmán).*

Minthogy az energia fogalma az összes jelenségeknek annyira egységes összefoglalását tette lehetõvé, az un. *energetikus* iskola megkísérelte, magát a mechanikát is az energia fogalmából kiindulva felépíteni. Az energetikus iskolának ma fõ képviselõje *Ostwald W.*, a kiváló fiziko-kémikus.

16) *Mayer* elve, vagy amint szintén nevezik, a termodinamika elsõ fõtétele tulajdonképpen az energia elvének alkalmazása hõjelenségekre és így fogalmazható: "Ha valamely rendszerrel hõt közlünk, e hõmennyiség részben a rendszerre ható külsõ erõk ellenében kifejtendõ munka végzésére, másrészt a rendszer belsõ energiatartalmának növelésére (pl. a rendszer felmelegítésére) szolgál."

A Clausius-féle elvet, a termodinamika úgynevezett második fõtételét, lényegében már *Carnot* kimondotta "Elmélkedés a tûz mozgató ereje s a gépek felett, amelyek ezen mozgatóerõ kifejtésére alkalmasak" (1824) címû munkájában (magyar nyelven megjelent *Lukáts* László fordításában a Math. és Phys. Lapok 1897. évfolyamában). *Clausius R*. a Poggendorff-féle Annalen der Physik und Chemie 125. kötetében, 1865-ben megjelent értekezésében ez elvnek szabatos fogalmazását adta. Az elv tulajdonképpen ama tapasztalatnak matematikai alakban való kifejezése, hogy a természetben egyes jelenségek csak *egy* irányban folyhatnak le, azaz *nem megfordíthatók.* Pontosabban ez a *meg nem fordíthatóság* így értendõ: Kiindulunk valamely rendszer *A* állapotából, és valamely *a* folyamat vagy változás útján eljutunk valamely *B* állapotba; lehetséges már most az, hogy idegen energia befektetése nélkül nem juthatunk vissza az *A* állapotba; akkor az *a* jelenség (vagy folyamat) megfordíthatatlan.

Megfordítható jelenség, pl. a súrlódás nélküli szabad esés; valamely test bizonyos *A*pontbeli nyugvó helyzetébõl leesik és bizonyos *B* pontig esve, *v* sebességre tett szert, azaz ha tömege *m* akkor $\frac{1}{2}mv^2$mozgási energiára. Ugyanekkora sebességgel hajítva *B*-tõl felfelé, azaz ugyanannyi energiát használva fel, mint a testnek magának mozgási energiája volt a *B* pontban, a test éppen *A*-ig fog fölfelé haladni s ott egy pillanatra megáll; tehát az egész rendszer visszajutott kiinduló helyzetébe és a környezõ rendszerek energia-tartalma is változatlan maradt.

Megfordíthatatlan jelenség azonban a súrlódás útján való hõkeletkezés: két fadarab egymáshoz dörzsölése útján hõ állítható elõ, de ha ugyanazt a hõmennyiséget közöljük a két fadarabbal, nem fogjuk õket semmi mesterkélt berendezéssel sem ugyanabba a mozgásba hozhatni, mely ama hõmennyiség létrehozására szükséges volt. Ilyen megfordíthatatlan jelenség, pl. a hõvezetés jelensége is: egy fémrudat egyik végén melegítve a fémrúd másik vége is felmelegszik, míg csak az egész rúd minden pontja ugyanolyan hõmérsékletû nem lesz. Ha azonban azt akarjuk, hogy a most egyenletes hõmérsékletû rúdon a hõmérséklet eloszlása ugyanaz legyen, mint volt, azaz, hogy az egyik vége melegebb legyen, a másik hidegebb, ez csak újabb energia-befektetés árán érhetõ el.

Megfordíthatatlan jelenségek azonkívül valamely gáznak légüres térben való kiterjedése, a diffúzió jelenségek stb..

A Clausius-féle elv matematikai kifejezésében az ún. *entrópiá*-nak megváltozása szerepel. Vegyünk figyelembe egyelõre csak megfordítható folyamatokat és legyen *Q* az a hõmennyiség, melyet valamely *T* hõmérsékletû rendszer egy igen kis változás alkalmával a környezetébõl felvesz, akkor egy véges megfordítható változás alkalmával bekövetkezõ *entrópia-változás* alatt a változás egyes kicsiny szakaszaira vonatkozó $\frac{Q}{T}$ kifejezések összege értendõ, amit így jelölhetünk:

$$\sum \frac{Q}{T} (= \frac{Q}{T}\text{-k szummája})$$

Ha valamely rendszer átalakulása egy adott A kezdeti állapotból egy *B* végállapotba meg nem fordítható úton megy végbe, akkor az entrópia változást egy másik, a megvizsgálttól különbözõ, ugyancsak lehetséges de *megfordítható* folyamattal határozzuk meg, amely az *A* állapotból a *B* végállapotba átvezet. Tehát az *A*-tól a *B*-ig végbemenõ folyamatnak megfelelõ entrópia-változást ugyancsak a $\sum \frac{Q}{T}$ kifejezés szolgáltatja, a hol a $\frac{Q}{T}$ kifejezés ezen megfordítható változás szakaszaira vonatkozik, a mely *A*-t *B*-vel összeköti. Ilyenformán bármely rendszernek egy tetszés szerint választható *A* helyzettõl számított entrópia-változását meghatározhatjuk, és ha pl. az *A* helyzetbeli entrópiát egészen önkényesen megadjuk, megkapjuk magát a rendszer entrópiáját is, mely csakis a rendszer mindenkori állapotától függ. Több részbõl álló rendszer entrópiáján a részek entrópiáinak összege értendõ.

Clausius elve mostmár azt mondja, hogy bármely, a hõkicserélõdést tekintve elszigetelt rendszer összes jelenségeinél az entrópia összes megváltozása csak *pozitív* lehet, *legfeljebb zérus,* de *negatív soha.*

Ha tehát a rendszernek egy A állapotából kiindulva, eljutunk a *B* állapotba s ez alatt az entrópia megváltozása pozitív, akkor az *A*-*B* változás meg nem fordítható, mert akkor *B*-tõl *A*-ig menve, az entrópia megváltozása negatív lenne, ami nem lehetséges. Csak akkor fordítható meg az *A*-*B* változás, ha eközben az entrópia megváltozása zérussal egyenlõ, vagyis ha eközben az entrópia nem változott.

Ez a látszólag igen elvont elv rendkívül gyümölcsözõnek bizonyult a hõelméletnek igen sok alkalmazásában. Az elsõ fõtétel, az energia megmaradásának elve ugyanis még sok esetben nem elegendõ a jelenségek teljes meghatározására, mert egy adott kezdõhelyzetbõl kiindulva több olyan változás lehetséges, melyek mindegyike egyformán hódol az elsõ fõtételnek. A második fõtétel most már a lehetséges eseteknek egy második korlátozását szolgáltatja, mert kimondja, hogy a termikus módon elszigetelt rendszerekben csak az oly változások lehetségesek, a melyeknél az entrópia növekszik. Ez egyelõre még csak minõségi tétel, mert nem szabja meg, hogy mennyivel növekedjék az entrópia, de sok esetben ez is igen fontos: pl. mikor csak két oly eset lehetséges, mely az elsõ fõtételnek megfelel; ezek közül most már éppen az entrópia növekedése, illetve fogyása alapján választhatunk. Megfordítható folyamatoknál pedig az entrópia tétele pontos egyenlõséget szolgáltat.

Legfontosabb szolgálatokat tesz azonban az entrópia tétele az elszigetelt rendszerek egyensúlyi állapotának kikeresésénél. Az oly állapotok ugyanis, melyekbõl kiindulva, bármely az elsõ fõtételnek megfelelõ változásnál az entrópia fogyna, egyensúlyi helyzetek, mert ha a rendszer egyszer ebbe az állapotba eljut, akkor ezen állapotban meg is marad, mert hiszen csak oly változásokat szenvedhetne, a melyeknél az entrópia fogyna, de az ily változások lehetetlenek, tehát a rendszer állapota változatlan fog maradni. Mûszóval azt mondjuk, hogy a rendszerek maradandó (stabilis) egyensúlyi állapotában az entrópiának maximuma van és pontos matematikai módszereink vannak e maximumok felkeresésére.

Minthogy a fizikában és a kémiában az esetek legnagyobb többségében azt kérdezzük, hogy valamely hõbelileg elszigetelt rendszer adott körülmények között milyen maradandó végállapotba, egyensúlyi helyzetbe fog jutni, minthogy továbbá szigorúan véve minden képzelhetõ változást hõváltozások kísérnek, érthetõ a hõelmélet e második fõtételének rendkívüli fontossága és hordereje.

A termodinamikának igen szabatos tárgyalását találjuk *Plankc M*. Vorlesungen über Thermodynamik címû mûvében, Leipzig (I. kiadás 1897, II. kiadás 1905).

17) A *Mariotte*-féle gáztörvény tulajdonképpeni felfedezõje *Boyle* (1662); e törvény szerint valamely gáz nyomása állandó hõmérséklet mellett a gáz sûrûségével egyenesen, tehát a gáz térfogatával fordítva arányos. A második gáztörvény az ún. *Charles-Gay-Lussac*-féle, mely szerint az összes gázok nyomása állandó térfogat mellett a hõmérséklettel egyformán változik. E törvények csak közelítõleg érvényesek, a valóságban az összefüggés a gáz nyomása, térfogata és hõmérséklete közt sokkal bonyolultabb. Az eltérés e gáztörvények és a gázok viselkedése között annál kisebb, minél messzebb van a gáz az ún. *kritikus hõmérséklettõl* (1. a [29] jegyzetet).

18) A fény rezgéselmélete szerint az egynemû és egyöntetû közegben haladó fénysugárban a rezgések mindig a fénysugárra *merõlegesen* mennek végbe, a fényrezgések tehát, amint mondani szokás, *tranzverzálisnak,* azaz keresztrezgések. Természetes fényben a rezgés irányát igen gyorsan változtatja, de amellett mindig merõleges marad a sugárra és a reá merõleges irányok közül egy sincs a többi elõtt kitüntetve. A *síkban sarkított* (polározott) fény esetén a rezgések mindig egyazon, a sugáron átmenõ síkban mennek végbe.

A sarkított fénysugarak találkozására és egymásra hatására (interferenciájára) nézve alapvetõ kísérleteket végeztek *Fresnel A.* és *Arago Fr.* 1816. és 1819. években; a szövegben említett kísérletre vonatkozik *Fresnel* és *Aragonak* III. és IV. törvénye; e törvények a következõk:

III. Természetes sugárnyalábból származó, egymásra merõlegesen sarkított két találkozó sugár még akkor sem alkot interferencia-csíkokat, ha egyazon sarkítási síkra vezetjük õket vissza.

IV. Síkban sarkított sugárnyalábból származó, egymásra merõlegesen sarkított két sugár mutatja az interferencia jelenségét, ha õket egyazon sarkítási síkra vezetjük vissza.

A két törvény egyszerûen magyarázható a fényrezgésekre vonatkozó elõbb említett felfogásunk által.

A IV. törvény esetében egyszerûen kiszámíthatjuk, hogy a sugarak találkozása terében felváltva sötét és világos csíkoknak kell létesülniük; a képlet azt is megmutatja, hogy ha az eredeti sarkított sugárban a fényrezgések síkja 90-kal elfordulna, a csíkrendszer eltolódnék, ugyanis a sötét csíkok helyére jutnának a világos csíkok és megfordítva. Ebbõl mindjárt érthetõ a III. törvény: mert a természetes fényben a rezgések síkja rendkívül gyorsan váltakozik, így hát a létrejövõ csíkrendszer fényes és sötét csíkjai is igen gyorsan változtatják helyüket és szemünk nem bírván követni gyorsan váltakozó benyomásokat, a csíkrendszert egyáltalában meg sem látja, hanem a látóteret egyenletesen megvilágítottnak véli.

Azt hisszük tehát, hogy az interferencia-jelenség elmaradása nem annak tudandó be, amit szerzõ a szövegben oknak vél, ugyanis, hogy a fénynyaláb, melybõl kiindultunk, nem szigorúan egyszínû; e tekintetben tehát nem osztjuk a szerzõ felfogását.

Az *Arago-Fresnel*-féle kísérleteknek egyszerû elméleti fejtegetését megtalálhatjuk, pl. *Neumann* F. Vorlesungen über Theoretische Optik (Leipzig, 1885) 123-130. lapjain. A sarkított fény interferenciája törvényeinek igazolására vonatkozó eddigi kisérletek kritikai méltatását és egy új, e célra szolgáló, bevált, kifogástalan kisérleti berendezés leírását találjuk *Fröhlich Izidor* "A polározott fény interferenciája törvényeinek kisérleti bemutatása" címû értekezésében (Mathematikai és Physikai Lapok. XI. k.. 361 - 380. 1. és XII. k. 89-118. l.); ugyanez német nyelven a "Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn" 1903-ra vonatkozó XXI. kötete 159-225. lapjain, (1907).

19) *Fresnel*nek a rugalmas éter alapján nyugvó fénytani dolgozatai különbözõ tudományos folyóiratokban jelentek; megemlítjük közülük a következõket, melyek legkönnyebben *Fresnel* Oevres Complètes-ben találhatók meg (Paris, I kötet 1896, II kötet 1897):

Mémoire sur la diffraction de la lumière (Fényelhajlás), Recueil de 1'Académie des sciences, Tome V. 1818. Fordításban Poggendorff Annalen 30. k.

Mémoire sur 1'action, que les rayons de la lumière polarisée exercent les uns sur les autres, *Arago*-val közösen: Annales de chimie et physique, Tome X. 1819. (Lásd a [18]) jegyzet utolsó pontját.

Mémoire sur la double réfraction (1821-1822) (kettõs törés) Recueil de 1'Académie des sciences, Tome VII.

Saját munkáinak áttekintését "De la lumière" (a fényrõl) címen közölte *Thomson* angol kémiájának francia fordításában függelék gyanánt (fordításban megjelent Poggendorff's Annalen 3., 5., 12. köteteiben).

A Maxwell-féle elektromágnességi fényelmélet alapgondolata még *Faraday*nélmegtalálható (Experimental researches in electricity, London 1839-1855, 3075. pont); *Maxwell J. C.* fõmûve:

A treatise on electricity and magnetism, 2 kötet. I. kiadás. Oxford, 1873; német fordítása *Weinstein* tollából megjelent 1883-ban, Braunschweigben; azóta az eredeti mû még két kiadást ért.

Igen kiváló tankönyve az elektromágnességi fényelméletnek *Drude* "Lehrbuch der Optik"-ja, Leipzig (I. kiadás 1900, II. kiadás 1907).

20) A kinetikai gázelmélet szerint a gázok apró részecskékbõl, az ún. molekulákból állanak, amelyek igen nagy sebességgel röpködnek össze-vissza, egymáshoz és az edény falához ütközve. Oly nagy számmal vannak és oly kicsinyek, hogy az egyes molekulákat nem figyelhetjük meg, csak az összességük álta1 létrehozott jelenségeket és ez gyakorolja reánk a folytonosság látszatát. Az a nyomás, melyet a gázok amaz edény falára gyakorolnak, melybe be vannak zárva, ezen elmélet szerint a falba ütközõ molekulák záporától származik.

A kinetikai gázelmélet elsõ megalapítója *Bernouilli J.,* továbbá *Krönig A.;* a matematika összes segédeszközei felhasználásával valódi mennyiségi elméletté fejlesztették *Clausius R., Maxwell J. C.* és *Boltzmann L.*

A gáznyomástól külsõleg teljesen elütõ, de lényegben ugyanúgy magyarázható jelenség az ún. *ozmózis-nyomás.* Azozmózis jelenségét *Pfeffer W.* növényfiziológus fedezte fel 1877-ben. Bizonyos növényi hártyáknak ugyanis az a tulajdonságuk, hogy valamely oldószernek oldóanyagát áteresztik, de az oldott anyagot nem; *Pfeffer* azt tapasztalta, hogy ha egy ily hártyából való fenékkel ellátott edényt oldattal megtöltünk és tiszta oldószerbe (pl. vízbe) mártunk, az oldat az edényben magasabbra fog emelkedni, mint a víz a külsõ edényben, ami azt mutatja, hogy az oldószer az oldott anyagra bizonyos nyomást gyakorol; ezt a nyomást nevezik ozmózis-nyomásnak. Az oldószer ugyanis mintegy magához vonzza az oldott anyag részecskéit, de ez a vonzás az oldat belsejében lévõ részecskékre minden irányból ugyanaz, tehát nem nyilvánul semmiféle hatásban, az oldat határfelületén lévõ részecskékre azonban csak egy irányban hat, a felületrõl az oldat belseje felé; az oldat valóban felemelkedik a belsõ edényben és helyére oldószer nyomul a hártyán keresztül a felsõ edénybe, mindaddig, míg az oldat súlya az ozmózis nyomását nem ellensúlyozza. Az ozmózis-nyomás pontos vizsgálatok szerint *(Van t'Hoff* 1885.) teljesen független az oldószer anyagától és ugyanazon hõmérséklet mellett arányos az oldat telítési fokával (koncentrációjával), tehát fordítva arányos az oldat térfogatával, az ozmózis-nyomás azonkívül a hõmérséklettel is arányos, úgy, hogy ozmózis-nyomás, az oldat térfogata és a hõmérséklet között ugyanazon összefüggés van, mint valamely gáz nyomása, a gáz térfogata és a gáz hõmérséklete közt.

Ez a hasonlóság arra indította *Van t'Hoff* -ot, hogy az oldatokról ugyanolyan képet alkosson magának, mint a kinetikai gázelmélet a gázokról. Szerinte az oldatban az oldott anyag molekulái éppen oly szabálytalanul röpködnek össze-vissza, mint a gázmolekulák s a hártyába ütközve reá nyomást gyakorolnak. Ezen nyomás ellenhatása hajtja felfelé az oldatot a hártya felett. *Van t'Hoff-* nak ezen elmélete igen messzemenõ következményeiben szép kisérleti igazolást nyert.

21) A *Sadi Carnot*-féle elv a termodinamika második fõtétele, melyet a [16] jegyzetben ismertettünk.

22) *Szingularitáson* a matematikában a rendestõl eltérõ, kivételes viselkedést értenek: így pl. az $y = \frac{1}{x}$ függvény, amint az x a 0-hoz közeledik, rohamosan, határtalanul növekszik; erre a matematikus azt mondja, hogy az $y = \frac{1}{x}$ függvénynek az x=*o* helyen szingularitása van. Az étert bizonyos folytonos anyagnak tekinthetjük, melyet bizonyos általános tulajdonságokkal ruházunk fel; e tulajdonságok egyes pontokban megszûnnek és ezen pontokról mondjuk, hogy ezek az éter szingularitásai. Az anyagi molekulák, némelyek felfogása szerint az éternek ily szingularitásai volnának.

23) *Fizeau A. H. L.* kisérleti úton meghatározta, hogy a víz mozgása mennyiben módosítja a benne tovaterjedõ fény sebességét; Comptes Rendus, Paris, 33 k.1851 (349.1.), Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband 3, (457. l.); ha c a fény terjedési sebessége a nyugvó vízben, v pedig a víz áramlási sebessége, akkor ha a fény kizárólag a víz közvetítésével terjedne tova, a

fénysebesség$c + v$ volna, míg ha a fény a nyugvó éteren át terjedne, a fénysebesség a mozgó vízben is megmaradna c-nek.

Fizeau azt találta, hogy a v sebességû vízben a fény sebesség

$$c + 0.43\, v$$

tehát a tovaterjedés úgy történik, mintha a víz részben magával ragadná az étert is, melyben a fény tovaterjed.

Fizeau kísérletét *Michelson A. A.* és *Morley E. W.* ismételték és igazolták. (American Journal of Science 3. sorozat, 31. kötet, 1886 (377. 1.)

24) A *Zeemann*-féle jelenség a kõvetkezõ: Ha valamely fényforrást erõs mágnességi térbe helyezünk, megváltozik a fényforrás kibocsátotta fénynek a rezgésszáma, *a színe,* továbbá az általa kibocsátott sugarak *polározási állapota.*

Ha pl. konyhasót égetünk Bunsen-lángban és a fényt spektroszkópon át vizsgáljuk, a nátriumnak két egymáshoz igen közelálló két vonalát, az ú.n. *D* vonalakat fogjuk megfigyelni; ha a lángot hatalmas elektromágnes sarkai közé helyezve, az elektromágnest gerjesztjük, észrevesszük, hogy a két vonal mindegyike két vonalra hasad, ami azt mutatja, hogy a fényforrás a mágnességi erõk hatása alatt más törésmutatójú, tehát más rezgésszámú (más színû) sugarakat bocsát ki, mint elõbb.

A csodálatos jelenség az elektromágnességi fényelmélet szerint könnyûszerrel magyarázható, ha föltesszük, hogy a fényforrásban apró elektromos töltésû részecskék (az elektronok) mindenféle rezgõ és keringõ mozgást végeznek; az egyik irányban keringõnek sebességét a mágnességi erõ gyorsítja, az ellenkezõ irányban keringõkét lassítja, tehát megváltoztatja a rezgések számát.

A színképvonalak két-három, sõt több vonalra való hasadását igen sok más, igen erõs mágnességi hatásoknak alávetett fényforrásoknál tapasztalták, sõt oly vonalakat is megfigyeltek, melyek kilenc vonalra hasadnak mágnességi erõk hatása alatt. A magyarázat a legtöbb esetben különbözõ elektron-csoportok többé-kevésbé erõltetett mozgásának feltételezésével sikerül.

A jelenség legelsõ megfigyelõje *Zeemann P.* (Az Amsterdami Királyi Tudományos Akadémia Értesítõje, 1896. okt. és nov. és Philosophical Magazine, 1897. március), a legelsõ magyarázatot az elektron-elmélet alapján *Lorentz A. H.* adta. Az összes idevágó jelenségek részletes ismertetését és elméletét megtaláljuk *Voigt W.* Elektro und Magnetooptik címû mûvében, Leipzig, 1908.

25) A sarkítás síkjának mágnességi forgatását *Faraday M.* fedezte fel. A jelenség a következõ: bizonyos anyagokban tovaterjedõ; síkban sarkított fény megváltoztatja sarkítási síkját, ha oly mágnességi téren halad keresztül, melynél a mágnességi erõ a sugár iránya mentén hat. A jelenség, pl. a következõ kisérleti berendezéssel figyelhetõ meg : szénkéneggel töltött üvegcsövet két végén planparallel üveglapokkal elzárunk és behelyezünk egy dróttekercs tengelyébe: a csõ elejére és végére látóiránya körül forgatható Nicolhasábot

helyezünk és az egyiken keresztül fénynyalábot bocsátunk az üvegcsövön át, míg a másik Nicolhasábba betekintünk; a Nicolhasáb csak az egyik átmérõje mentén sarkított fényt bocsátja át, tehát könnyen elérhetjük a megfigyelõ Nicol megfelelõ elforgatásával, hogy a látóteret sötétnek lássuk. Ha most a dróttekercsbe elektromos áramot bocsátunk, egyszerre látjuk, hogy a látótér megvilágosodott s csak akkor sötétedik el, ha a megfigyelõ Nicolt bizonyos szöggel elforgatjuk. Ez azt mutatja, hogy a mágnességi tér hatása alatt a szénkénegen áthaladó fény sarkítási síkja forgást szenvedett, mert most már az eredetileg elsötétedésre beállított megfigyelõ Nicol átbocsátja a fény egy részét. A megfigyelõ Nicol elforgatása éppen a sarkítási sík elfordulásával egyenlõ.

Az érdekes jelenség kielégítõ magyarázatát leli *a Lorentz*-féle elektron-elmélet alapján. (L. pl. *Voigt W.*, Elektro- und Magnetooptik, Leipzig, 1908.)

26) Amint a termodinamika második fõtételének fejtegetésénél említettük (I. a [16]) jegyzetet), vannak a természetben oly jelenségek, melyek csak egy irányban mehetnek végbe, az ú.n. megfordíthatatlan jelenségek. A kinetikai gázelmélet szerint a gázok apró molekulák milliárdjaiból állnak, melyek a mechanika közönséges törvényei szerint röpködnek össze-vissza és egymásra bizonyos erõket gyakorolnak, amelyek csak kölcsönös helyzetüktõl függenek. Ez esetben a mechanikai jelenségek mind megfordíthatók, tehát megfordíthatók volnának a gázokon észlelhetõ jelenségek is, ami a tapasztalatnak ellentmond, mert pl. lehetséges az, hogy valamely gáz légüres térbe munkavégzés nélkül kiterjed, de ennek megfordítása, a gáznak munkavégzés nélküli összenyomása lehetetlen. A kinetikai gázelmélet szerint ellenben, ha a munkavégzés nélkül kiterjedt gázban egy pillanatban az összes molekulák sebességét megváltoztatnák, a jelenség ellenkezõ irányban játszódna le és a gáz összenyomódna. Az ellenmondás a tapasztalat és az elmélet között csak valószínûségi meggondolások alapján szüntethetõ meg: a molekulák sebességének ellenkezõ irányba való változtatása ugyanis elméleti szempontból: gáz összes energiájának megváltoztatása nélkül lehetséges, kisérletileg azonban kivihetetlen, mert nem valószínû, hogy bármely kísérlet beavatkozásnál a molekulák sebessége éppen ellenkezõvé változik E kérdés megbeszélésénél említi igen szellemesen *Maxwell J. C.* (Theoryof Heat, 3-dik kiadás, 308. 1. 1872.), hogy ezt csak a démonoknak egész serege tudná véghezvinni, akik eligazodva a molekulák zûrzavaros tömkelegében, minden egyes molekula sebességét meg tudnák változtatni.

27) A *Brown*-féle molekuláris mozgást *Robert Brown* botanikus fedezte fel 1827-ben (Poggendorff's Annalen 14. k. 294. lap, 1828). A jelenség a következõ: ha valamely folyadékba rendkívül finoman eloszlott anyag, pl. cinóberfesték részecskéit ágyazzuk be (szuszpenziót készítünk) és a folyadékot mikroszkóp alatt figyeljük meg, látjuk, hogy a beágyazott részecskék csodálatos zegzugos pályákat írva le, folytonos "reszketõ" mozgást végeznek. A mozgás az idõ folyamán egyáltalában nem módosul, azonban átlagos sebessége változik a folyadék hõmérsékletével.

Még *O. Wiener* (Pogg. Ann. 118 k. 79. 1. 1863) úgy magyarázta a jelenséget, hogy az ide-oda röpködõ folyadékmolekulák a beágyazott részecskékbe ütköznek, és ezeket ide-oda lökdösik. Ilyenformán a jelenség nagy fontosságra tett szert, mert egyik közvetlen tanúbizonysága volna a molekulák létezésének és molekuláris felfogásunk helyességének. Sok búvár foglalkozott tehát úgy elméleti, mint kísérleti szempontból a kérdés földerítésével: kiszámították, hogy a mai molekuláris elméletek alapján milyen törvény szerint változnék a részecskék sebessége a hõmérséklettel és összehasonlították e sebességet a közvetlen kisérleti eredményekkel. A különbözõ kutatók vizsgálatai alapján, akik közül csak *Gouy L. G., Einstein A., Smoluchowsky M., PerrinJ., Langevin P.* és *Seddig M.* neveit említjük, a kisérlet és elmélet közötti megegyezés elég kielégítõnek mondható, tehát valószínûnek tarthatjuk, hogy a *Brown*-féle mozgás valóban a folyadék-molekulák mozgásának tudandó be.

Legújabb idõben *Henri V*-nek sikerült a *Brown*-féle mozgásról mikrofotografikus *kinematogramm*-okatkészíteni,[**] ami által a jelenség kisérleti megfigyelésében nagy haladás várható.

Henri másodpercenként 20 felvételt eszközölt és ezek alapján rajzolta meg és mérte ki a beágyazott részecskék pályáit.

A beágyazott részecskék átmérõje egy ezred milliméter volt és $\frac{1}{20}$ másodperc alatt átlag befutottak középértékben 0.62 μ (μ = egy mikron = 0.001 milliméter) utat.

A tárgy irodalmára nézve eléggé kimerítõ tájékozást találunk *Smoluchowsky M.* értekezésében (Annalen der Physik, 21. k. 756. 1. 1906).

28) *Becquerel Henri* tapasztalta legelõször, hogy az *uránium* és *vegyületei* bizonyos sugarakat bocsátanak ki, melyek a fényképezõ lemezen nyomot hagynak; utána a *Curie* házaspár ugyane tulajdonságot megtalálta a thóriumnál is és milliószorta erõsebb mértékben az általuk felfedezett új elemnél, *a rádium*-nál.

A rádium, anélkül, hogy rajta bármely változás volna tapasztalható, oly sugarakat bocsát ki, melyek mindenben hasonlatosak az elektromos erõk hatása alatt ritka gázokban keletkezõ katódsugarakhoz, csõsugarakhoz és röntgensugarakhoz; a rádium azonkívül fény- és hõsugarakat is kibocsát.

A lumineszczenczia jelensége, mellyel a szerzõ a rádiumsugárzásnak rokonságot tulajdonít, oly hõ-, illetve fénysugárzás, melynél az energia kibocsátása (kisugárzása) *nem* a test hõenergiája, hanem pl. kémiai, elektromos vagy mechanikai energiája árán történik, szemben az ú.*n. hõmérsékleti sugárzással,* melynél a sugárzó test semmi egyéb változást nem szenved, mint hogy hõt veszít. Hõmérsékleti sugárzás tehát mindig aránylag magasabb hõmérsékletû sugárzó forrást feltételez, mint a lumineszczenczia (hõmérsékleti sugárzás pl. az izzó platinaszál sugárzása, lumineszczenczia a Szent-Jánosbogár fénye és egyéb foszforeszkáló anyagok sugárzása).

A rádium sugárzása is lumineszczenczi ának tekinthetõ, mert a mai felfogás szerint a sugárzás a rádium *atomenergiájának* rovására megy végbe; a rádium atomjainak egy része szétrobban és a robbanás forrása a sugárzásnak.

A radioaktivitásra nézve a magyar irodalomban bõvebbet találhatunk *a fordító* "Rádium és radioaktivitás" czímû mûvében (Budapest, 1904) és *Zemplén Gyõzõ,* "A testek radioaktív viselkedése", a Természettudományi Közlöny 1905. évfolyamában; külön füzetben is megjelent a Természettudományi Társulat által kiadott "A természettudományok elemei" czímû gyûjteményben (Budapest, 1905).

29) *Andrews Th. a* kritikus hõfok felfedezésével járult hozzá a cseppfolyós és gáznemû állapot közti átmenet felderítéséhez (1863). Ha üvegcsövet félig megtöltünk folyadékkal, a levegõt belõle eltávolítjuk, a csövet leforrasztjuk, a folyadék feletti rész megtelik telített gõzökkel; a folyadék és a gõz között éles, görbe felületû határt látunk, az ú.n. *meniszkuszt.* Ha a csövet melegítjük, a folyadék sûrûsége mindinkább kisebbedik, a gõzé azonban növekszik, míg végre eljutunk oly hõfokig, melynél megszûnik a különbség a folyadék és gõze között s a köztük lévõ meniszkusz s eltûnik. Ezt a hõfokot, a melynél az átmenet a cseppfolyós és gáznemû állapot között *térfogatváltozás nélkül* történik, nevezte *Andrews kritikus hõmérsékletnek.* Különös fontossága abban rejlik, hogy a kritikus hõfok fölött a gõzt semmiféle nyomás mellett sem lehet lecsapódásra bírni. Ez magyarázza meg azt is, miért nem sikerült *Andrews* elõtt több gáznak (pl. a levegõnek) folyósítása, mert a kutatók csak a nyomás növelésére törekedtek és nem gondoskodtak arról, hogy a gázt kritikus hõfokánál alacsonyabb hõmérsékletre lehûtsék. A régebben "permanens gázoknak" nevezett anyagoknak (oxigén, nitrogén, hidrogén, stb.) ugyanis igen alacsony a kritikus hõfokuk, elõbb tehát le kell õket hûteni (oxigént - 119^{o}, nitrogént - 146^{o}, hidrogént - 234^{o} C. alá) és akkor lehet õket csak összenyomás által folyósítani *(Caillet L. P., Pictet R.. P., Wroblewski Z. Fl., Olszevszki K. St.).*

A gázok folyósítása által megszûnt a leglényegesebb válaszfal a cseppfolyós és a gáznemû állapotok közt. A folytonos átmenet kérdését *Van der Waals J. D.* vitte jelentékenyen elõre ezáltal, hogy megmutatta, miszerint a nyomás, térfogat és hõmérséklet közti összefüggések gáznemû és cseppfolyós testeknél ugyanazon törvényszerûségeknek hódolnak. Lásd az eredeti hollandi mû német fordítását: Über die Kontinuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes, Leipzig 1881. (Ennek II. kiadása 1899; ehhez, mint új rész a második kötet 1900). A magyar irodalomból megemlítjük *Péch Aladár* összefoglaló értekezéseit "A testek halmazállapotáról" a Mathem. és Phys. Lapok 1899. és 1900. évfolyamában.

30) A szerzõ itt a következõ két dolgozatra céloz, melyek az 1900. évi párizsi fizikai kongresszus értesítõjében jelentek meg (Rapports présentés au Congrès international de physique, Paris, 1900*), Schwedoff F. N.*, la rigidité des fluides (a folyadékok merevsége); *Spring V.* W., Propriétés des solides sous pression; diffusion de la matièredes solides (a szilárd anyagok tulajdonságai nagy nyomás alatt; a szilárd testek anyagának diffúziója).

A "folytonosság uralma" mellett tanúskodnak a *Van t' Hoff* felfedezte *szilárd oldatok* is; ezek közé tartozik az acél is, szénnek oldata vasban (1. *Van t' Hoff,* Zeitschrift für physikalische Chemie, 5. k. 1890).

A folyadékok felületének szilárdságáról szól a következõ értekezés is: *Schütt K.* Über Zähigkeit und Festigkeit in der Oberfläche von Flüssigkeiten und über flüssige Lamellen, Ann. der Physik, 13 k. 712 1. (1904).

31) A kör négyszögesítésén a mathematikusok a következõ feladatot értik: szerkesszünk kizárólag *körzõ és vonalzó* segítségével oly négyzetet, melynek területe adott kör területével egyenlõ. A szerkesztés lehetetlensége be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy a π *Ludolph-féle* szám, mely a kör sugarának négyzetével szorozva a kör területét szolgáltatja, nem lehet oly egész számú együtthatókkal bíró algebrai egyenlet gyöke, melynek gyökét csupa *négyzetgyök*-vonással kiszámíthatjuk. Az ily gyököt ugyanis körzõvel és vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni az együtthatókból. A feladat végleges elintézését *Lindemann* vizsgálatai

által nyerte, aki bebizonyította, hogy a *Ludolph-féle* szám semmiféle egész együtthatókkal bíró algebrai egyenletnek gyöke nem lehet, annál kevésbé lehet gyöke oly egész együtthatójú algebrai egyenletnek, mely négyzetgyök-vonások által megoldható (l. Mathematische Annalen, 20. k. 1882). Ezzel a kör négyszögesítésének lehetetlensége végérvényesen be volt bizonyítva. A kérdésnek igen tanulságos összefoglaló ismertetését találjuk *Kürschák József* "Akörmérés története és elmélete" czímû értekezésében (I. Math. és Phys. Lapok, 1892., 1893. és 1894. év- folyam).

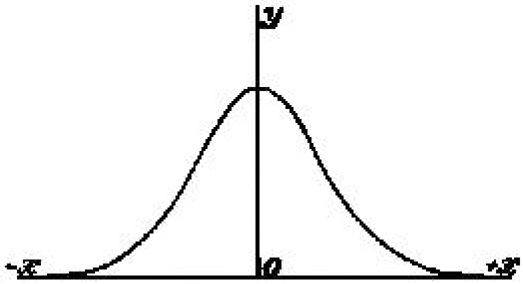
32) Ha x és y két mennyiség között egy ilyen alakú összefüggés áll fönn:

$$f(x, y)= o,$$

ahol $f(x, y)$ *egy* x és y-ból összeadás, kivonás és szorzás által keletkezett kifejezés, akkor y-ról azt mondjuk, hogy x-nek *algebrai* függvénye.

Ha ugyanis x-nek bármilyen adott értéket tulajdonítunk, akkor y algebrai egyenlet megoldásával meghatározható. Ezen igen általános függvénycsoportba tartoznak a racionális egész és tört függvények (pl. $y = a x^2 + b x + c$, vagy $y = \frac{1}{x}$ stb.), azonkívül az összes gyökfüggvények ($y = \sqrt[n]{x}$, vagy $y = \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}}$ stb.)

Azon függvényeket, melyek nem algebraiak, nevezik *transzcendens* függvényeknek: pl. $y = \sin x$, $\cos x$, $\log x$, e^x stb.



33) A *Gauss*-féle hibatörvény a következõ: annak a valószinûsége, hogy egy észlelési eredmény hibája x és $x + d x$ határok közé esik, a hol dx igen kis mennyiséget jelent, $y\, d x$, y-t pedig a következõ képlet szolgáltatja:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

ahol $e = 2.71828...$ a természetes logaritmusok alapszáma, és h egy állandó; ha az y függvényt az x, y koordináta-rendszerben ábrázoljuk, oly görbét kapunk, amely alakjánál fogva (1. a mellékelt rajzot) *haranggörbe* néven ismeretes.

34) A legkisebb négyzetek módszerének lényege a következõ: ha valamely vizsgálatnál egy *y* mennyiséget oly módon határozunk meg, hogy közvetlenül lemérünk egy más *x* mennyiséget és az *y*-t az

$$y = f(x)$$

adott képlet alapján számítjuk ki és ha a többször, pl. 10-szer végzett kisérlet *x* számára az

$$x_1, x_2, \ldots, x_{10}$$

értékeket szolgáltatja, kérdés, *mely x értékbõl kell az y-t kiszámítanunk, hogy a legvalószinûbb y értéket megkapjuk?*

E kérdésre adhatjuk meg a választ a legkisebb négyzetek módszere segítségével: ha minden egyes kisérletileg nyert *x*-bõl kiszámítanánk a hozzátartozó *y* értéket, a következõ sorozatot kapnánk:

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{10})$$

Ezen értékeknek az elõttünk ismeretlen, hely $f(x)$ értéktõl való eltérései:

$$f(x) - f(x_1), f(x) - f(x_2), \ldots, f(x) - f(x_{10})$$

az ú.n. *hibák.*

A legvalószinûbb $f(x)$ értéket most már úgy találjuk meg, hogy kikeressük azt az $f(x)$-et, mely az észlelésbõl származó $f(x_1), \ldots, f(x_{10})$ mennyiségektõl legkevésbé tér el, azaz, minthogy a hibák között pozitívak és negatívak egyaránt elõfordulhatnak, azt fogjuk mondani, hogy *az lesz az y-nak legvalószinûbb értéke, amelyre nézve a hibák négyzetének összege a lehetõ legkisebb.*

A feladat tehát vissza van vezetve a következõ, tisztán mathematikai feladatra, melyik az az *x* érték, a mely mellett a

$$(f(x) - f(x_1))^2 + (f(x) - f(x_2))^2 + \ldots + (f(x) - f(x_{10}))^2$$

kifejezés legkisebb értékét veszi fel.

E feladat a maximum-minimum számítás segítségével mindig megoldható s így megkapjuk a legvalószinûbb *x*-et és a hozzátartozó legvalószinûbb $y = f(x)$ értéket is.

35) Ezt az "experimentum crucis"-t, melyet oly sokáig hiába kerestek, legújabb idõben mégis megtalálta *Fröhlich Izidor* az üvegrácsokról visszaverõdve elhajlított fény polározására vonatkozó vizsgálatai közben. Az eredmény *a Fresnel*-féle felfogásnak kedvez, mely szerint a fényvektor a sarkítási síkra *merõleges.* A mai elektromágnességi fényelmélet szerint a fényrezgések az elektromos és mágnességi erõknek rezgései; ezen erõk mindegyike merõleges a fénysugárra, azonkívül az elektromos és mágneses erõk egymásra is merõlegesek. Minthogy ezen erõk mindig együttesen lépnek fel, *a Fresnel-Neumann*-félevitás kérdés az elektromágnességi fényelméletben így fogalmazandó: az elektromos és mágnességi

erõk közül melyik hozza létre a fény érzetét? Az elektromos erõrõl tudjuk *a Hertz*-félehullámok tovaterjedésének vizsgálatából, hogy a sarkítás síkjára merõlegesek, míg a mágnességi erõk e síkba beleesnek, így tehát, ha a *Fresnel*-féle elmélet helyes, akkor a fényérzetet az elektromos erõk hozzák létre, ellenkezõ esetben a mágnességi erõk.

Fröhlich vizsgálatai alapján tehát kimondhatjuk, hogy a fényérzet az *elektromos* erõk rezgésszerû ingadozásának tudható be.

Fröhlich "Az elhajlított fény polározásának új törvényszerûségei" czímû, a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában megjelenõ Mathematikai és Természettudományi értesítõjének 24. kötetében közzétett értekezésében (492 I.) a következõket mondja:

"... Ebbõl a tapasztalatból, függetlenül a fény természetére vonatkozó bármily föltevésszerû felfogástól, kényszerítõ szükségességgel folyik az a következtetés, hogy a *gerjesztõ* fényvektor saját polározás-síkjára merõleges. E következtetést éppen olyan biztosan megállapítottnak tekintem, mint e vektornak sugarához való transzverzalitását".

Fröhlich magyar nyelven megjelent értekezéseit összegyûjtve és kibõvítve német nyelven is kiadta, mint a Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn XXII. kötete legnagyobb részét; ugyanez a mû önálló könyv alakjában is megjelent "Polarisation des gebeugten Lichtes" (Leipzig, 1907.) czímen.

Megjegyzendõ, hogy *Fröhlich* a fõsúlyt az elhajlított fény sarkításánál általa tapasztalati úton felfedezett új törvényszerûségekre fekteti és a fenti "experimentum crucis"-t mellékeredményként találta, melynek azonban fontos jelentõségét felismeri és hangsúlyozza.

36) *Szolenoid*-nak szokás nevezni az elektrodinamikában a dróttekercseket, melyekbe elektromos áramot bocsáthatunk, mi által mágnességi hatásokat érhetünk el. Egy ily szolenoid ugyanis úgy viselkedik, mint egy oly mágnesrúd, melynek tengelye a szolenoid mértani tengelyével egybeesik, tehát egyik sarka a tekercs egyik, a másik sarka a tekercs másik végére esik. Zárt szolenoid az oly szolenoid, melynek *tengelye* zárt görbe, pl. kör: ily zárt szolenoidot kapunk, ha pl. egy gyûrû alakú szilárd testre drótot csavargatunk, úgy hogy a menetek merõlegesek legyenek a gyûrû tengelyére. Ha a gyûrût ily módon egészen beborítjuk drótmenetekkel, úgy hogy a drót eleje és vége közvetlen szomszédosak legyenek egymással, akkor érthetõ, hogy az ily zárt szolenoid mágnességi hatása külsõ pontokra zérus, mert úgy viselkedik, mint egy oly patkómágnes, melynek végeit csak igen vékony levegõréteg választja el, melynél tehát a déli és északi vég igen közel esvén egymáshoz, külsõ pontokra való hatásuk egymással ellentetten egyenlõ és zérust eredményez.

37) Valamely áramkörön áthaladó mágnességi erõáramlást a következõ módon állíthatjuk elõ: szerkesszünk mindenekelõtt az áramkör minden pontjából kiinduló egy-egy erõvonalat, azaz oly vonalat, melynek érintõje minden pontjában a mágnességi erõ irányát mutatja ugyanezen pontban. Az ily erõvonalak összessége ú.n. *erõcsövet* határol. Bontsuk fel most ezen erõcsövet ugyancsak csupa erõvonallal oly kicsiny "elemi" erõcsövekre, melyek minden egyes keresztmetszetén belül lévõ térbeli pontokra nézve a H mágnességi tér erõssége ugyanakkorának és párhuzamos irányúnak tekinthetõ. Legyen q egy ilyen elemi erõcsõ keresztmetszete, akkor Hq az *elemi erõcsõben a mágnességi erõáramlás.* Az egész áramkörön áthaladó mágnességi erõáramlások összege: ΣHq, vagy szóval az egész erõcsövet alkotó elemi

erõcsövek mágnességi erõáramlásának az összege. Ha pl. *H* az egész térben ugyanakkora és egyenlõ irányú, akkor egy oly kör alakú vezetõn, melynek síkja merõleges az erõvonalakra és a melynek területe *Q*,, *HQ* mágnességi erõáramlás halad át.

38) Megjegyezzük, hogy végtelen sok oly ú.n. *elemi törvény* létezik, a melyek mindegyike zárt vezetõkre alkalmazva, ugyanazon elektrodinamikus törvényekhez vezet, melyek e szerint a zárt vezetõk szempontjából mindannyian egyenértékûek. Az összes lehetséges elemi törvényeket *Farkas Gyula* állította elõ (I. Értekezések a mathematikai tudományok körébõl XV. kötet, 3 füzet, 1-50 lap; a Magyar Tudományos Akadémia kiadásában, Budapest, 1893); ugyanez német nyelven: "Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn", XI. kötet, 161-182. 1., 1894. Az õ elõállításából is világosan látni, hogy a végtelen sok elemi törvény közül csak egyetlen egy van, melynél az erõk a két áramelemet összekötõ egyenesbe esnek; ez a közönségesen használt *Ampère*-féle törvény.

39) Az elektrodinamikus indukciót *Faraday M.* fedezte fel 1831-ben. Az elektrotechnika szempontjából az elektromosság terén ez a legfontosabb felfedezés, mert segítségével lehetséges a mechanikai energiának elektromos energiává való átalakítása és megfordítva. A jelenség minõségi lefolyása a következõ:

ha mágnességi térben mozgatunk egy zárt vezetéket, a vezetékben elektromos áramok lépnek fel, melyek addig tartanak, a míg a mozgás tart, és a melyek energiája egyenlõ azzal az energiával; a melyet a vezeték mozgatására felhasználunk; megfordítva, ha ugyanazt az áramot, mely az indukció útján keletkezett, bevezetjük a mágnességi térben mozogható vezetékbe, az elõbbi, indukáló mozgással *ellentett* mozgás fog bekövetkezni.

40) *Helmholtz H.*-nak a szövegben említett értekezése a *Crelle*-féle Journal für reine und angewandte Mathematik 72. kötetében jelent meg 1870-ben (1. Wissenschaftliche Abhandlungen, 1. k. 545. laptól kezdve), második dolgozata; melyben már *Bertrand* ellenvetéseire is válaszol a *Crelle* Journal 75. kötetében jelent meg (1873) (Wissensch. Abhandlungen 1. k. 646); idevág még egy harmadik dolgozata a berlini akadémia 1873. évi értesítõjébõl (Wiss. Abh. 1. k. 688. 1.).

41) *Hertz H.* korszakalkotó vizsgálatait "Über die Ausbreitung der elektrischen Kraft" czímû könyvében is közzé tette (Leipzig, 1892).

42) *Rowland H. A.* legelsõ kísérleteirõl *Helmholtz* tett jelentést a berlini akadémiában (megjelent Poggendorff's Annalen 98. kötetében 1876-ban).

A kérdés irodalmát 1903-ig *SósErnõ* ismertette a Természettudományi Közlöny Pótfüzeteiben (1903. évfolyam, 176. 1.) - Azóta *Crémieu V.*-nek *Rowland* eredményeivel ellentmondó kísérletei még határozottabb cáfolatot nyertek egyrészt egy oly kísérletsorozat által, melyet maga *Crémieu* végzett *Pender H.*-val együtt (Comptes rendus, Paris, 136. k. 1903, 548 és 953) másrészt *Eichenwald A.* és *Himstedt Fr.* vizsgálatai alapján (Ann. der. Phys. 11. k. l, és 421. 1. 1903, ill. 13. k. 100. 1. 1904).

43) *Hertz H.* idézett dolgozata a Wiedemann's Analen 19. kötetében jelent meg 1883-ban. *Hertz* negatív eredményébõl - tekintettel eszközeinek aránylag csekély érzékenységére - az következik, hogy a katódsugarak mágnesezõ hatása kisebb, mint oly elektromos áramé, melynek erõssége $\frac{1}{30,000}$ Amper.

Hertz ezen kisérleti eredményeit a késõbbi vizsgálatok is igazolták; *Perrin J.*-nek ugyanis sikerült kimutatnia, hogy a katódsugarak negatív töltést szállítanak magukkal (l. értekezésének magyar fordítását *ifj. Szily Kálmán* tollából a Math. és Phys. Lapok 1898. évfolyamában); a katódsugarakat *Faraday*-félefémhengerre ejtette és elektrométerrel mérte azt az elektromos töltést, melyet a katódsugarak a fémhengerrel közölnek: ezekbõl és más hasonló módszerrel végzett mérésekbõl kitûnt, hogy a katódsugarak által magukkal szállított elektromos töltések igen csekélyek és bár a sugarak sebessége több tízezer kilométer másodperczenként, az áramerõsség mégis csak egy százezred Amper rendû.

A mágnességi hatás kimutatásához tehát aránytalanul érzékenyebb kísérleti berendezésre van szükség, mint a milyet *Hertz* használt. A fõnehézség abban rejlik, hogy az oly mágnességi mûszer, mely ily rendkívül gyenge áramok mágnességi hatását is megérzi, már a földmágnesség csekély változásait is jelzi, és nem marad állandó egyensúlyi helyzetben; a mint mondani szokás: folyton "jár". *Klupathy Jenõ*-nek hosszabb kisérletezés után sikerült e nehézségeket leküzdeni és a katódsugarak *mágnességi hatását valóban kimutatni*. *Klupathy* akatódsugarak mágnességi hatását körülbelül akkorának találta, mint egy félmilliomod Amper erõsségû áramét, ami a katódsugarakra vonatkozó egyéb tapasztalatainkkal megegyezésben van. Dolgozata a Mathem. és Phys. Lapok 1907. évfolyamában jelent meg (164-182 1.), németül pedig az Ann. d. Phys. 25.. kötetében (31-47 1.).

44) A viszonylagosság elvét újabb idõben, mint határozott elektrodinamikai alapelvet alkalmazzák, még pedig a következõ értelemben: tekintettel arra, hogy eddig[***] semmiképpen sem sikerült a Föld mozgásának elektrodinamikai (fénytani) jelenségekre való hatását kisérleti úton kimutatni, tekintsük alapelvnek azt, hogy az összes elektrodinamikai jelenségek kizárólag a testeknek egymáshoz viszonyított relatív sebességétõl függenek, nem pedig abszolút sebességeiktõl. Az elektrodinamikai alapegyenleteket is e szerint olyformán kell módosítanunk, hogy bennük csak a relatív sebességek forduljanak elõ, ne pedig az abszolút sebességek.

E felfogásnak elõharcosai maga a tudományos elektronelmélet tulajdonképpeni megalapítója *Lorentz.H. A.*, de különösen *Einstein A.*, ki erre vonatkozó meggondolásait az Ann. der Phys. utolsó évfolyamaiban megjelent több dolgozatban tette közzé. (17 k. 1905., 891. 1., l8 k. 1905., 639. 1., 20 k. 1906., 627. l., 23 k. 1907., 197, 371. 1.)

45) *Abraham M.* idézett dolgozata az Ann. d. Phys. 10. kötetében jelent meg 1903-ban (105-179. 1.) *Kaufmann W.* dolgozata pedig a Göttinger Nachrichten 1903. Évfolyamában. (90-103. 1.) A kérdés népszerû ismertetését megtaláljuk *Zemplén Gyõzõ* "Az elektromágneses tömeg" czímû dolgozatában. (Természettudományi Közlöny, 1906. évf. 220-229. 1.)

46) A mint a [44] jegyzetben említettük, *Lorentz*-enkívül megemlítendõ *Einstein*, mint a viszonylagosság elvének megalapítója.

47) *Kaufmann* W. "Über die Konstiutiton des Elektrons" Ann. d. Phys. *198.* 487. 1. és 20 k. 639. I. (1906.)

---

* ha $n = \frac{a}{b}$, akkor $x^n = x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$

** Kisérleteirõl a francia fizikai társulat ülésén 1908. június 5-én számolt be.

*** *Michelson A. A.* és *Morley E. W.* kísérletei a Föld mozgásának a fény tovaterjedésére való hatásáról (American Journal of Science 3-dik sorozat, 34. k., 1887. 333. 1.) és *Trouton Fr. Th.* és *Noble H. R.* kísérletei, melyeknél egy felfüggesztett elektromos sûrítõ töltésénél és kisütésénél vizsgálták meg a Föld mozgásának hatását (London Transactions A. 202. k. 1903. 165. l.)
