A másodfokú egyenletek „ismeretlen” gyökei

A polinomegyenletek megoldásainak hiányosságai

> *„A matematika (...) egyáltalán nem lezárt tudomány. Még olyan alapvető dolgok területén is, mint a számok és mértani alakzatok, a tudatlanságunk sokkal nagyobb a tudásunknál.”*
> ***(Jordan Ellenberg)***[1]

1. Bevezetés

A matematikai végtelenfogalom módosításának szerteágazóak a következményei, ezek közül többet említettem már, ha részleteiben nem is fejtettem ki mindegyiket. Fontos tulajdonsága ennek a végtelenfogalomnak, hogy szoros kapcsolatban áll **Cantor** kontinuumhipotézisével (CH)[2], és vele a halmazelmélet axiomatikus megalapozásával, hiszen a CH és alternatíváinak számszerűsített változatával[3] három, a CH-ban különböző halmazelméletet „gyárthatunk”, hasonlóan ahhoz, amint a geometriában a háromszögek szögösszegeinek definiálásától függően más-más geometriához jutunk. A CH számszerűsített változatával a valószínűségszámítás is egységesíthető, és három eltérő változata axiomatizálható.[4] Ha mindez nem elég, akkor feltétlenül meg kell említeni, hogy a valós tereinket leíró legelemibb összefüggések is e CH-variációk számmodelljeivel, a kételemű számokkal[5] írhatók le, hiszen a parabolikus egységvektorokkal való szorzás a **Galilei**-transzformációt modellezi, a hiperbolikus egységvektorral való szorzás pedig a **Lorentz**-transzformációt.[6]

Nem írtam azonban olyan, az elemi algebrát érintő változtatási szükségletekről, amelyeknek szintén messzemenő következményei vannak. Ezek egyikéről szól ez a cikk.

2. A másodfokú egyenletek gyökei

Elsőként hangsúlyoznom kell, hogy a kételemű számok képzeteseihez a valós számegyenes végtelen-bővítésével jutottam, tehát éppúgy *számokat* jelölnek, mint *természetes* társaik. Egy korábbi cikkemben írtam arról, hogy e képzetesekben miképp jelennek meg a természetes számokat jellemző rendet és mennyiséget leíró tulajdonságok.[7]

---

[1] **Jordan Ellenberg**, *Hogy ne tévedjünk – A mindennapi élet rejtett matematikája*, Park Könyvkiadó, 2016, 20. oldal

[2] A CH feltételezése szerint a valós számok számossága – azaz a kontinuumszámosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság

[3] Lásd erről például a témát összefoglaló „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

[4] Lásd erről az „*Egy univerzális valószínűségszámítás felé, III., Befejező rész*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/374-egy-univerzalis-valoszinusegszamitas-fele-iii-befejezo-resz

[5] A kételemű számok legelemibb tulajdonságait lásd a Mellékletben.

[6] Lásd erről „*A Galilei-transzformáció és a parabolikus számok*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

[7] Lásd erről a „*Számok: rend és mennyiség*” című cikket, https://www.infinitemath.hu/matematika/430-szamok-rend-es-

Ugyan többször kitértem e képzetesek – $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq 0$, $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$ – bevezetésének azon következményére, hogy felfedezésüktől kezdve a gyökvonás művelete több értékű, mint amire eddig figyelmet fordítottunk, azaz nemcsak pozitív és negatív valós vagy komplex szám lehet, de pozitív és negatív hiperbolikus ($\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$), vagy parabolikus ($\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq 0$) képzetes is lehet, attól függően, hogy a gyök alatti kifejezés pozitív, vagy nulla. Ez természetesen magától értetődik, de hiányzik e következménynek megfelelő módosítások végigvitele a matematika megfelelő területein, majd a fizikai alkalmazásoknál a következmények végiggondolása.

Csak a legegyszerűbb példán, a másodfokú egyenletek megoldásán fogom bemutatni a fent említett következményt.

Az $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) másodfokú egyenlet jól ismert megoldóképlete a következő:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1}$$

A fenti egyenletben a D *diszkriminánstól* ($D=b^2-4ac$), azaz a négyzetgyök alatti kifejezéstől függően kaphatunk különböző megoldásokat:

1. Ha $D<0$, azaz $b^2<4ac$

   akkor az egyenletnek 2 komplex gyöke van:

   $$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\mathbf{i}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

   ahol **i** a komplex képzetes, azaz $\mathbf{i}^2=-1$.

2. Ha $D=0$, azaz $b^2=4ac$

   akkor az egyenletnek 3 gyöke van, 1 valós és 2 parabolikus:

   $$x_1=-\frac{b}{2a}$$

   $$x_{2,3}=-\frac{b}{2a}\pm\mathbf{j}\frac{1}{2a}$$

   ahol **j** a parabolikus képzetes, azaz $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq 0$.

3. Ha $D>0$, azaz $b^2>4ac$

   akkor az egyenletnek 4 gyöke van, 2 valós és 2 hiperbolikus:

   $$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

   $$x_{3,4}=-\frac{b}{2a}\pm\mathbf{k}\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

   ahol **k** a komplex képzetes, azaz $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$.

Tehát a gyökök száma bővült, természetesen minden esetben megmaradtak azok a gyökök, amelyekkel eddig is számoltunk, csak a diszkrimináns nulla és pozitív volta esetén jelentek meg új, eddig figyelembe nem vett – parabolikus és hiperbolikus – gyökök.

Az *algebra alaptétele* kizárólag komplex számtest felett értelmezett, így nincs ellentmondásban azzal, hogy parabolikus és hiperbolikus számok figyelembevétele esetén több gyök adódik, mint az

---

mennyiseg

alaptételben megfogalmazott – multiplicitással számolva – n gyök az n-edfokú polinomegyenletek esetén. A számfogalom kiterjesztése szükségessé teszi az algebra tételeinek megfogalmazását a bővebb számkörre is.

Mivel a kvadratikus alakok, gyökös kifejezések, polinomegyenletek nemcsak az algebrában, de a matematika – és így valamennyi természettudomány – számtalan összefüggésében jelen vannak, ezért ezeket át kell tekinteni és ki kell terjeszteni a bővebb számkörre. A bővebb számkörben megjelenő új megoldásokat értelmezni kell az alkalmazott matematikában, például a matematikai fizikában is. Egyetlen egy esetet említek meg példaként arról, hogy miképp kell jól alkalmazni a számbővítést és miképp kell annak elemeit helyesen értelmezni. Több cikkemben említettem[8] már **David Hestenes** – a geometriai algebra jeles művelője – példáját, aki ugyan alkalmazta a bővített számkört egy modellben, de ezt egyrészt hiányosan tette, másrészt egy matematikai elemét tévesen értelmezte. **Hestenes** a geometriai algebra eszközeivel modellezte a téridőt, és ebben a modellben mind a komplex, mind a hiperbolikus egységvektorral való szorzás matematikailag egyenértékű megoldást adott, de kimaradt a modellből a parabolikus (duális) egységvektor szorzásával modellezhető transzformáció, a téridőbeli eltolás. (Ez utóbbi nem véletlenül hiányzott **Hestenes** modelljéből, mivel a parabolikus képzetesnek – azaz a $\mathbf{j}^2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ számnak – nincs megfelelője a geometriai algebrában.) **Hestenes** téves értelmezése pedig a komplex egységvektorral való szorzás volt, amelyet helytelenül térbeli forgatásként kezelt, pedig ezt téridőbeli forgatásként kell értelmezni. Így a **Hestenes**-modell kiegészítve a parabolikus megoldással elvezethetett volna az egyedül helyes megoldáshoz, a **Lorentz**-transzformációt modellező hiperbolikus forgatáshoz, ugyanis a fénysebesség állandóságának figyelembevételével a parabolikus és a komplex eset kizárható.

Fontos megjegyezni, hogy a kételemű számok szoros kapcsolata **Cantor** kontinuumhipotézisével, valamint a valószínűségszámításokban és a téridő-modellekben játszott meghatározó szerepük sokat segít a számbővítéssel megjelenő új megoldások értelmezésében. Ez segített engem is a fent említett **Hestenes**-modell korrigálásában.

3. Összegzés

A kételemű számok képzeteseinek figyelembevételével olyan, az elemi matematikához tartozó összefüggéseknek, mint például a másodfokú egyenleteknek is új megoldásaira bukkanhatunk. Ez nem azt jelenti, hogy az eddigi eredmények hibásak lennének, csak azt, hogy nem teljesek, és léteznek olyan megoldások, amelyekre a fizikai világ modellezésénél szükség lehet, de eddig ezeket nem ismertük, mert az őket modellező matematika nem kínálta fel megoldásként. Fontos megjegyezni, hogy a kételemű számok képzetesei, bár speciális végteleneket jelölnek, de éppoly joggal nevezhetőek számoknak, mint a természetes számok, vagy a valós számok, és mélyen a fizikai világban gyökereznek nemcsak a matematikai fizikában való használhatóságuk miatt, de a speciális végtelent modellező szerepük felfedezése is a fizikai világhoz kötődik[9]. Így nagy hiányosság, ha a *számtan*, az *algebra*, vagy a *matematika bármely ágában* nincsenek figyelembe véve a kételeműek képzetesei a lehetséges megoldások feltérképezésekor.

[8] Lásd például a „*Szimmetriák és téridők” című cikket*”: https://www.infinitemath.hu/egyeb/426-szimmetriak-es-teridok
[9] Lásd erről például a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

Melléklet

A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{M1}$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \tag{M2}$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j}sp\varphi) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \tag{M3}$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \tag{M4}$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta\varphi} \tag{M5}$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{x - \boldsymbol{\delta}y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \tag{M6}$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ = i, j, k** aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta}y$ ha $z = x + \boldsymbol{\delta}y$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.