A kételemű számok, mint homogén koordinátával leírt számegyenesek

1. Előzmény

Egy korábbi cikkemben[1] írtam már arról, hogyha a kételemű számokat végtelen távoli pontokkal kiegészített számegyenesként értelmezem, akkor homogén koordinátákat definiálva ezeken a számegyeneseken; a kételemű számok síkjához juthatunk. Abban a cikkben csak a parabolikus számsík modelljét említettem, mert ez hozható összefüggésbe a klasszikus projektív geometriával, hiszen ez az a modell, amelynek képzetes eleme úgy tekinthető, hogy egyetlen végtelen távoli elemet illesztettünk a számegyenes tetszőlegesen nagy számai után. Érdemes végiggondolni a komplex és a hiperbolikus számsík számegyenesként való értelmezését is.

A projektív geometria szóhasználatát követve a (szám)egyenes végtelen távoli pontjait ideális pontoknak is fogom nevezni.

2. Homogén koordináták és a számegyenesek

Induljunk el azon az úton, amint a számsíkokon a számok polárkoordinátás alakjához jutunk:

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

Ahol $\boldsymbol{\delta}$ = **i, j, k** ($\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó.

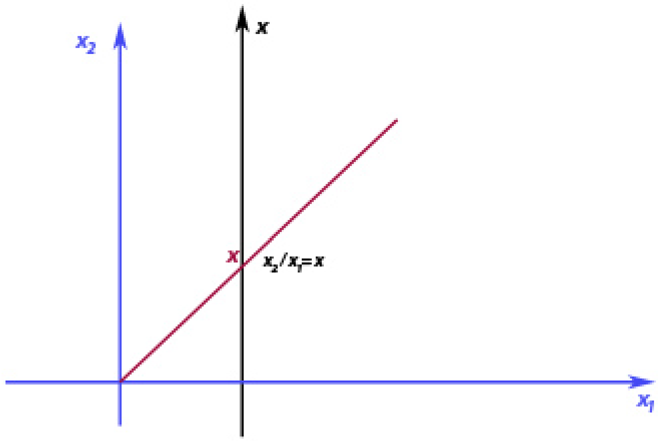
Az (1) egyenletben felírt alak szinte „kiált” egyfajta homogén koordinátarendszerbeli értelmezésért. A homogén koordináták haszna épp az, hogy a végtelen távoli pontokat véges koordinátákkal fejezzük ki. A kételemű számok tiszta képzetes részének végtelen-értelmezése is pontosan ezt teszi: a végtelent véges „koordinátájú” számponttal jellemzi.

2.1. Parabolikus (szám)egyenes

A parabolikus számegyenes esetén a számegyenesre egyetlen ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik.

A dimenziókról szóló cikkemben definiált homogén koordinátáktól[2] eltérően, most a következő módon vezetem be a homogén koordinátákat. Ha a (szám)egyenesen egy közönséges (szám)pont Descartes-féle koordinátája (x), akkor $x_1 \neq 0$ esetén az illesztett homogén koordinátarendszerben az x_2/x_1 homogén koordinátával leírható elemet rendelem, melyre $x = x_2/x_1$, melyek az origón átmenő x_2/x_1 meredekségű egyenesek. (Lásd az 1. ábrát).

[1] Lásd. „A dimenziókról” szóló cikk 7. oldalán „A kételemű számok és a projektív geometria” című szakaszt. http://www.infinitemath.hu/images/stories/dimek_v40.pdf
[2] Lásd az 1. lábjegyzetet



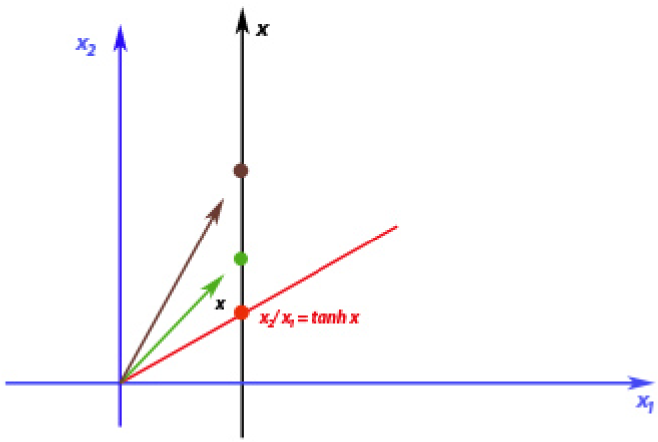
1. ábra

Az $x_1=0$ homogén koordinátájú egyenes pedig a számegyenes egyetlen végtelen távoli pontjának a megfelelője. Ily módon az origón átmenő valamennyi egyenesnek egyetlen számpont felel meg az x számegyenesen, melynek egyetlen végtelen távoli pontja van.

Azt mondom tehát, hogy az egyetlen végtelen távoli ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a parabolikus számsíkot adja.

2.2.Hiperbolikus (szám)egyenes

A hiperbolikus számegyenes esetén a számegyenesre végtelen sok ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak. (A 2. ábrán fekete színnel rajzolt számegyenes piros színnel jelölt pontja közönséges pont, a zöld és a barna pontok ideális pontok. Ezen az ábrán torzítottan a végtelen távoli pontok is a végesben vannak ábrázolva.)



2. ábra

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes közönséges Descartes-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához a számsík $x_2/x_1=\tanh x$ homogén koordinátával leírható elemét rendelem $x_1 \neq 0$ és $x_1 \neq x_2$ esetén, ezek az elemek olyan, az origón átmenő egyenesek, melyek meredeksége kisebb, mint egy. (Lásd például a 2. ábrát, és a piros színnel rajzolt egyenest.) Ily módon az origóra illeszkedő sugársorból csak egy nyaláb egyeneseit feleltettem meg kölcsönösen egyértelműen a számegyenesem közönséges pontjainak. A sugársor többi egyenesét a számegyenes végtelen távoli pontjaihoz rendelhetem. Az abszolutértékben egynél nagyobb meredekségű egyenesek meredekségét $x_1/x_2=\tanh x$ ($x_2 \neq 0$) módon írom le. (Ezek egyike a 2. ábrán barna színnel rajzolt egyenes.) Az $x_1=x_2$ egyeneshez a számegyenes „legkisebb” végtelen távoli pontját, az $x_1=-x_2$ egyeneshez a számegyenes negatív számtartományában legnagyobb végtelen távoli pontját rendelem. (Ezek egyike a 2. ábrán zöld színnel rajzolt egyenes.) Ily módon az origón átmenő egyenesek közül egy kivételével mindegyikhez egyetlen közönséges, vagy végtelen távoli – azaz ideális – számpont felel meg az x számegyenesen, melynek végtelen sok végtelen távoli pontja van. Az origóra illeszkedő sugársor egyenesei közül egyedül az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen sok ideális ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a hiperbolikus számsíkot adja.

2.3.Komplex, vagy elliptikus (szám)egyenes

A komplex számegyenes esetén a számegyenesre nem illeszkedik egyetlen ideális (végtelen távoli) pont sem. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak.

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes Descartes-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához $x_1 \neq 0$ és $|x|<\pi/2$ esetén a számsíknak a $\mathrm{tg}x=x_2/x_1$ homogén koordinátával leírható elemét rendelem, ezek az elemek az origón átmenő egyenesek. Ily módon az origóra illeszkedő sugársor $x_1=0$ elemének kivételével minden elemét hozzárendeltem a számegyenes $(-\pi/2,+\pi/2)$ szakasz számpontjaihoz. Így egy tetszőleges hosszúságú[3] véges nyílt szakasz pontjait tudtam kölcsönösen egyértelműen megfeleltetni az origóra illeszkedő sugársor egyeneseinek úgy, hogy az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen távoli ponttal nem rendelkező számegyenes, (pontosabban tetszőlegesen nagy számszakasz) homogén koordinátákkal való leírása a komplex számsíkot adja.

3. Összegzés

Visszatérve az (1) egyenlethez, mely a homogén koordinátarendszerben a következő alakot veszi fel:

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) = x_1\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{x_2}{x_1}\right) \qquad (2)$$

Ahol $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál bevezetve $\frac{x_2}{x_1}=\mathbf{tgx}$-t, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{x_2}{x_1}=\mathbf{thx}$-t a következőeket kapom:

[3] Tetszőleges hosszúságú, hiszen $\mathrm{tg}x=x_2/x_1$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$ esetén $x' = xL/\pi$ hozzárendeléssel egy L hosszúságú (-L/2,L/2) nyílt szakasz pontjait rendelhetem az origón átmenő egyenesekhez.

$$z = x_1(1 + \boldsymbol{i} \tan x) \tag{3}$$

$$z = x_1\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{x_2}{x_1}\right) \tag{4}$$

$$z = x_1(1 + \boldsymbol{k} \tanh x) \tag{5}$$

Az argumentum egyedül a parabolikus esetben – (4) egyenlet – egyezik meg $\frac{x_2}{x_1}$-szel. Ezt az esetet általánosítva azt mondom, hogy az argumentumnak megfelelő értékhez tartozó számegyenesbeli ponthoz rendelem az origóra illeszkedő sugársornak azt az elemét, melyre $\frac{x_2}{x_1}$ az argumentum (3), (4), és (5) egyenletekben definiált függvényének megfelelő értékével egyenlő.

Így a homogén koordinátákra való áttéréssel mindhárom számsíkot olyan számegyenesként értelmeztem, melyek tartalmazzák a végtelen nagy, azaz ideális számpontokat is a parabolikus és a hiperbolikus esetben. A projektív geometriák ezzel még nem épültek fel, csak az első lépést tettem meg: három – lényegesen eltérő – módon definiáltam (szám)egyeneseket. Az igazán érdekes rész ezután következik, amikor a számegyeneseket egyeneseknek tekintve a parabolikus eset – azaz a jelenleg ismert projektív geometria – mintájára felépítem a sík, és a tér hiperbolikus projektív geometriáját. Most úgy látom, hogy ehhez több dologra lesz szükségem; egyrészt a hiperbolikus geometria eszköztárára, másrészt a számfogalom újra gondolására.