Számok: rend és mennyiség

Töprengések

„Ősidők óta egyetlen kérdés sem kavarta fel annyira az emberek érzelmeit, mint a végtelennek a kérdése. Olyan gyümölcsöző hatással volt az észre, mint talán egyetlen más eszme sem. Mindamellett nincs még egy olyan fogalom, amely annyira tisztázásra szorulna, mint ez.”
(David Hilbert)[1]

1. Bevezetés

Ami itt következik az ugyan a számokról szól, de nem az egzakt matematika nyelvén. A számok egynémely tulajdonságával, mibenlétével kapcsolatos töprengéseimet foglalom össze.

A számok elvont fogalma több jelentéssel bír a gyakorlatban, hiszen még a nyelvtanban is megkülönböztetjük a sorszámokat a számoktól, azaz a számoknak valamiféle rendezettségre utaló jelentését a mennyiségre vonatkozó értelmétől. A számegyenesen pedig egy természetes számot jelölő pont, például a 3-at jelölő, egyszerre jelenti a harmadik természetes számot, továbbá az origótól való 3 egységnyi távolságot.[2] A számoknak e két értelme különböző műveleteket takar: az egyiket számolom, a másikat mérem. Ezzel szemben épp a mérésekkel kapcsolatban említettem egy korábbi cikkemben[3], hogy a számolás is szerves része a mérésnek, hiszen a mérés nem más, mint egy egységül *választott* alakzatot, mint mértékegységet – a mértékre invariáns transzformációval – „rámozgatva” a mérendő objektumra, megszámlájuk, hány mértékegységnyi alakzattal tudjuk „kitölteni” a mérendő objektumot.

Miközben a természetes számok mind rendelkeznek mennyiségi és rendezettségi jelentéssel, és csak egy adott szövegkörnyezet dönti el, hogy milyen jelentésben használjuk az adott számot, ugyanakkor a cantori végteleneknél élesen elkülönülnek a kardinális (mennyiségi) végtelenek az ordinális (rendszámok) transzfinitjeitől.

A természetes számok és a transzfinitek e két tulajdonságának eltéréséről egy réges-régen olvasott cikk jutott eszembe, amelyben felvetik azt a kérdést, hogy „nem kell-e ennek a különbségnek már a véges tartományban is megmutatkoznia”[4], azaz a számok mennyiségi és rendező jellegének

---

[1] „From time immemorial, the infinite has stirred men's *emotions* more than any other question. Hardly any other *idea* has stimulated the mind so fruitfully. Yet, no other *concept* needs *clarification* more than it does.”(**David Hilbert**, *„On the infinite”)*
https://math.dartmouth.edu/~matc/Readers/HowManyAngels/Philosophy/Philosophy.html

[2] A számok a rend és a mennyiség jelzésén kívül másra is használatosak, például címkézésre, azaz objektumok azonosítására.

[3] Lásd a „*Szimmetriák és téridők*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/egyeb/426-szimmetriak-es-teridok

[4] Lásd **B. A. Lasztocskin**, „*Végtelenség és valószínűség*” című cikkét a „*Végtelenség és világegyetem*” kötetben (103. oldal), amely a Gondolat kiadó gondozásában jelent meg 1974-ben. E kötet még ma is érdemes az olvasásra, mindenkinek ajánlom.

elszakadása már valahol a véges és végtelen „között” megtörténik. Furcsa felvetés, az írás további részére azonban nem szeretnék kitérni, mert légből kapott ötleteket vázol szerintem. Említésre méltónak csak azért tartom ezt a cikket, mert felhívja a figyelmet a számok rend- és mennyiségi jellegének eltérő voltára a természetes számoknál és a cantori végteleneknél.

Fontos szem előtt tartani, hogy – az általam is sokat emlegetett – kontinuumhipotézis (CH) a kardinális, tehát a mennyiségi végtelenekről állít valamit, feltételezése szerint a valós számok számossága – azaz a kontinuumszámosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. E hipotézis egyik állítása a **Cantor**-tétel, amely szerint a valós számok többen vannak, mint a természetes számok. Híressé és nagyon hasznossá vált átlós módszerével bizonyította **Cantor** ezt az állítás, ám a minőségi végtelenek tanulmányozásának tükrében két probléma is van a bizonyítással. Az indirekt állítás, miszerint a valós számok leképezhetők a természetes számokra – azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre közöttük – tulajdonképpen azt jelenti, hogy nemcsak a számosságuk, de a rendezettségük is azonos lehet, pontosabban a valós számoknak létezik a természetes számokkal megegyező rendezettsége. Tehát a bizonyítás során a feltételezés ellentmondásossága elsősorban nem a számosságok közötti különbségre utal, hanem lényegében egy rendezettségi eltérésre vonatkozik. Másrészt a [0,1) intervallumba eső valósok egyértelmű ábrázolásához **Cantor** feltételezte azt, ami ma is mindenki számára természetes, azaz a szokásos 10-es számrendszerben gondolkodva a valós törtszámok helyiértékes alakjában bizonyos végtelen sok 9-essel végződő és egyes végtelen sok 0-val végződő törtszámok egyenlőek – egyetlen számpéldán bemutatva – pl. a következő számok egyenlők: 0,4999…= 0,5000…. De a 9-es „végű” számok egyenlővé tétele a megfelelő 0 „végű” számmal azt jelenti, hogy az intenzív végtelen mennyiségeknél kizártam az aktuálisan létező végtelen infinitezimálisok létét, azaz feltételeztem, hogy 0-nál nagyobb, de minden n-re 1/n-nél kisebb szám nem létezik. Ezzel a CH intenzív végtelenre vonatkozó formáját becsempésztem a feltételek közé. E végtelen parányok létének tagadása **Cantor** idején természetes volt, hiszen a **Newton-Leibniz**-féle differenciál- és integrálszámítási módszerek infinitezimálisainak ellentmondásait épp azzal küszöbölték ki a matematikusok a XIX. század második felében, hogy létüket kizárva megalkották a határérték ma már klasszikus fogalmát.

I. Megjegyzés

Cantor bizonyításával kapcsolatban fontos hangsúlyozni, hogy a tétele igaz marad, ha a számosság helyett rendezettségre van kimondva és a számok egy szűkebb tartományára, azaz olyan számhalmazra, amelyre teljesül a CH.

A XX. század második felében **Abraham Robinson** munkája nyomán a „végtelen kicsi” fogalma ismét jogot nyert a matematikai gondolkodásban, de **Robinson** nemsztenderd analízise nem forradalmasította a matematikát, mivel nem hozott új eredményeket. Így a **mai napig a matematikai analízis teljes apparátusa feltételezi a CH-nak az intenzív végtelenre vonatkozó formáját,** tehát azt, hogy nincsenek 0-nál nagyobb, de minden n-re 1/n-nél kisebb infinitezimálisok.

2. A kételemű számok és a végtelen minőségi jellege

Tehát a CH szerint a valós számok számossága – azaz a kontinuum számosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. Ennek egyik alternatívája az, hogy létezik egyetlen ilyen számosság, a másik alternatívája szerint pedig végtelen sok ilyen számosság létezik. Ebben az értelemben a „köztes” végtelenek nemlétét a komplex képzetes ($\mathbf{i}^2=-1$), egyedi létét a parabolikus képzetes ($\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{j}\neq 0$), sokaságát pedig a hiperbolikus képzetes ($\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$) modellezi.[5]

[5] Lásd erről például a témát összefoglaló „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikket:

A kételemű számok képzetes eleme nemcsak képzetes jellegénél fogva modellez minőségi végtelent, hanem azért is, mert nem tesz különbséget a végtelen „mélységében” elképzelhető, azaz *intenzív* és „szélességében” elképzelhető, azaz e*xtenzív* volta között. A valós számegyenes végtelen kiterjesztésére gondolva nevezhetjük az *intenzív* végtelent oszthatósági, míg az *extenzív* végtelent kiterjedési végtelennek. Gondoljunk arra, hogy a hiperbolikus számoknál a **k** képzetes ($\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$) a …999 potenciálisan végtelen sok 9-et tartalmazó végtelen egész számot is modellezheti és a 0,999… potenciálisan végtelen sok 9-et tartalmazó törtszámot is.[6] E két szám mindegyikét azzal jellemezhetjük, hogy a négyzetük 1-gyel egyenlő, de maguk nem egyenlőek 1-gyel. Így jutunk a hiperbolikus számokhoz.

Könnyű elképzelni a végtelennek ezt a minőségi jellegét, ha egy konkrét esetre gondolunk, azaz például a téridőre. A speciális relativitáselméletben leírt téridőt a hiperbolikus számok reprezentálhatják, ha a teret leszűkítem egy dimenzióra[7]. Ekkor a valós elem az idő, az imaginárius elem pedig a tér modellje a matematikai nyelvben, tehát a fentiek értelmében a tér az idő végtelenje intenzív értelemben, és fordítva az idő a tér végtelenje extenzív értelemben, tehát azt mondhatjuk, hogy az egyik a másik végtelenje a cantori CH értelmében.

A térről és az időről alapjaiban eltérőek a tapasztalataink, nem mennyiségileg, hanem minőségileg másként érzékeljük a teret és az időt. Ebben az értelemben kell arra gondolnunk, hogy a végtelen új megközelítése ezt a tapasztalati különbséget tükrözi.

II. Megjegyzés

Ha valaki azt gondolja, hogy ezt nem lehet „szemléletesen” elképzelni, az téved. Természetesen ez a „szemléletesség” pontatlan, sőt félrevezető is lehet, mint általában a hasonlatok, metaforák, de a képzeletünket segítheti. (Matematikusok most nézzenek egy kicsit félre.) A teret, mint az idő végtelenjét intenzív értelemben a következőképpen képzelhetjük el. A potenciálisan végtelen valós számegyenes, mint *idővonal* minden (idő)pontjában merőlegest állítva az adott (idő)ponthoz („mosthoz”) tartozó *térként* interpretálom a merőleges egyenes pontjait, amelyek a valós számegyenes (idővonal) adott (idő)pontjától 0-nál nagyobb, de minden n-re 1/n-nél kisebb „időtávolságra” vannak. Így tér mintegy „beágyazódik” az idővonal minden időpillanatába. A fordítottját nehezebb elképzelni, de nem lehetetlen. A tér egyetlen dimenzióját tekintve, és minden pontjában merőlegest állítva az adott (térbeli) ponthoz („itthez”) tartozó *időként* interpretálom a merőleges egyenes pontjait, amelyek a (térbeli) egyenes adott (térbeli) pontjától minden n-re n-nél nagyobb „térbeli” távolságra” vannak. Ez utóbbi „idővonalat” a projektív geometria „végtelen távoli” pontjához hasonlóan sokkal inkább egy egyenes állásával, mintsem végtelen távolságával jellemezhetjük.[8]

3. A kételemű számok, valamint a számolás és a mérés fogalmai

A kételemű számok definíciójuknál fogva egy valós szám és egy képzetes szám – azaz minőségi végtelent reprezentáló szám – összege, tehát e minőségi különbség értelmében olyan, mintha össze nem tartozó dolgok összegeként tekintenénk a kételemű számokra, például almát adnánk a körtéhez.

III. Megjegyzés

Az alma és a körte hasonlat azért jó, mert megjegyezhetjük, hogy mindegyik gyümölcs, így az összegük a gyümölcsök számát jelenti. Ezt általánosítani is lehet, akármilyen különböző dolgot használok

---

https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

[6] Ehhez lásd „*Az idő, a tér és a végtelen*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/88-az-ido-a-ter-es-a-vegtelen

[7] A speciális relativitáselmélet gyorsulásmentes – azaz inerciarendszerekre – vonatkozik, amely a térirányok és a térbeli pontok egyenértékűségét feltételezi, így ebben az esetben leszűkíthető a tér egy dimenzióra.

[8] A kételemű számok képzeteseinek a projektív geometria elemeivel modellezett lehetőségeiről lás a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című **Mellékletét**: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

példaként az alma és a körte helyett, mindig van egy olyan általános kategória, amelybe mindkettő beletartozik.

Ha áttérek a kételemű számok polárkoordinátáira, akkor is azt látjuk, hogy egyikük, a kételemű szám *argumentuma* – azaz egy *szögmérték* – mindig képzetes szám[9], az adott számsík képzetese. A másik polárkoordináta *távolságot* jelöl – azaz a kételemű szám abszolútértéke vagy normája – általában valós számot takar, de a gyökös alakja miatt akár képzetes is lehetne, sőt a hiperbolikus számsíkon két síknegyedben a gyök alatti kifejezés negatív szám, azaz a kételemű szám normája ekkor képzetes – konkrétan komplex – szám. Milyen érdekes! A **k** hiperbolikus képzetes **i** távolságra van az origótól, ha a normát távolságként értelmezem.

Mit is jelentenek a kételemű számoknál a mennyiségi és rendezettségi tulajdonságok, amelyek a valós számok és a cantori végtelenek kapcsán merültek fel? Mindkét tulajdonság kapcsán problémába ütközünk a kételeműeknél:

- Egyrészt a mennyiség tekintetében eddig épp azt hangsúlyoztam, hogy a képzetesek nem mennyiségi végtelent jelölnek, hanem minőségit, miképp beszélhetnénk hát a kételemű számról, mint mennyiségről?!

IV. Megjegyzés

A **III. Megjegyzés** viszont lehetőséget sejtet arra, hogy a minőségében különbözőket egy általánosabb kategóriába sorolva beszélhetnénk a kettő összegének a mennyiségi értelméről.

- Másrészt bizonyítható, hogy nem lehetséges definiálni olyan ≤ rendezési relációt, amely összhangba hozható az összeadás és szorzás műveletével a kételeműeken. Természetesen ekkor lexikografikusan még rendezhetnénk a kételemű számokat, mint számpárokat, de ekkor az a probléma, hogy a képzetesek mind extenzív, mind intenzív értelmében vett végteleneket reprezentálhatnak a CH vonatkozásában, így a szám valós és képzeteseinek „sorrendje” csak akkor definiálható, ha különbséget teszek a képzetesek extenzív és intenzív értelemben tekintett végtelen-modelljei között.

V. Megjegyzés

Mivel minőségében más dolgokról van szó a valóst és a képzetest tekintve, ezért gondolhatunk arra, hogy nincs is értelme közöttük ≤ rendezési relációt definiálni.

Ezek alapján el kellene tekintenem a kételeműek mennyiségi és a rendezettségi tulajdonságaitól, de előtte végig kell gondolni ugyanezeket a szempontokat a polárkoordináták tekintetében is, annál is inkább, mivel a polárkoordináták azok, amelyek fizikai jelentéssel bírnak. A polárkoordináták fizikai jelentése azt jelenti, hogy a polárkoordináták, vagy valamely függvényük az, ami a valóságban mérhető: *lineáris mérték* a norma, és s*zögmértek* az argumentum. Így az az érzése támad az embernek, hogy a **Descartes** koordináták – és velük a számok algebrai alakja – *absztrakt* fogalmak és a kételemű számok *rendezettségi* tulajdonságait jellemzik, míg a polárkoordináták – és velük a számok trigonometrikus, valamint exponenciális alakja – a kételemű számok *metrikus, fizikai* tulajdonságait tárják fel. Mintha a cantori végtelenekkel szemben a kételemű számokban, mint végtelenmodellekben sem válnának szét a rend- és mértékjellemzők, azaz egy kételemű szám rendelkezik mennyiségi és rendszám jelleggel is, amint a természetes számok, bár ezek a tulajdonságok a számok más-más alaki megjelenésére vonatkoznak.

VI. Megjegyzés

A téridőt modellezve a polárkoordináták közül az argumentummal az időt mérjük a normával a teret. Ez a megállapítás tapasztalati, lásd ehhez például azt, amint **Feynman** a QED[10]-ben a komplex

[9] Lásd a **Melléklet** M6-os egyenleteit.

[10] **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.

számvektorokat hosszmértékkel – egy valószínűségi mező mértékével –, azaz *tér*jellemzővel látja el, a komplex argumentumot *idő*ként interpretálja. Ezek a tér- és időbeli jellemzők azonban nemcsak interpretációk, hanem *méréssel* – időmérővel és hosszmértékkel – megállapítható elemei a valószínűségszámításnak a QM-ben és a QED-ben.

4. Konklúziók

A halmazok elemeinek rendezettségi és mennyiségi tulajdonságairól van egyfajta intuitív képünk, amelyről elsőként **Cantor** *naiv halmazelmélete* fogalmazott meg összefüggéseket, ha nem is teljes matematikai korrektséggel. A XX. század elejére sikerült a halmazelméletet axiomatikus alapokra helyezni, bár neves matematikusok között is voltak, akik az alapok némely elemét – például **Henri Poincaré** a végtelen axiómát – helytelenítette.

VII. Megjegyzés

Fontos észrevenni azt, amit **A. Fraenkel** és szerzőtársai is megállapítottak, hogy „*axiomatikus szempontból nincs más mód a végtelen halmazok biztosítására, mint azok posztulálása.*”[11]

A jelen új végtelen-fogalma viszont csak potenciális végtelent feltételez, és abból konstruktív módon hozza létre aktuálisan létező végtelenek reprezentációit, amelyekben a végtelenek nem mennyiségi, hanem minőségi tulajdonságai hangsúlyosak. Egyelőre *naiv elgondolásnak* nevezhető ez az új eszme abban az értelemben, hogy még kidolgozatlan, jóformán csak az alapelemek körvonalazódnak. Bízom azonban abban, hogy a végtelen új megközelítése elkerülhetetlen a matematika fejlődése során, nemcsak azért, mert használhatóbb a cantori végtelen mennyiségeket posztuláló elképzeléseknél – hiszen mennyiségi végtelenről nincs tapasztalatunk, így csak potenciális végtelent feltételezhetünk – de azért is, mert a végtelenek új modelljei, a kételemű számok használata át- meg átszövi már a fizika szinte valamennyi területét. A kételemű számok hármas rendszerében is sok a kidolgozatlanság, hiszen közülük jóformán csak a komplex számok függvénytanát tekinthetjük jól felépítettnek. A kételeműek mennyiségi és rendezettségi kérdései is nyitottak, ezt próbáltam most körvonalazni. A rendezettség fogalmával vagyok a legkevésbé kibékülve, ezzel kapcsolatos problémáimat azok a következetlenségek szemléltetik legjobban, amelyek például **Cantor** bizonyításában találhatóak, amikor a természetes számok és a valós számok számosságát hasonlítja össze. Ezért is tértem ki erre részletesebben. Érdekes, hogy a fizika entrópia-fogalmánál is ellentmondásos egy rendszer rendezettségének kérdése. Többször kitértem arra[12], hogy helyesebb lenne a rendezettségi tulajdonság helyett egy rendszer bonyolultságának változásával leírni az entrópiát, nemcsak azért, mert a bonyolultságot matematikailag könnyebben kezelhetőnek tartom, de szerintem intuitíve is érthetőbb képét adja az entrópiaváltozásnak. A számfogalmaink egyelőre olyan egyszerűek, hogy kezelésükben nincs értelme a rendezettség helyett valamiféle bonyolultság-tulajdonságot használni, de a számfogalom további bővítése során lehetséges, hogy ez lesz a járhatóbb út.

---

[11] „From the axiomatic viewpoint there is no other way for securing infinite sets but postulating them.” (**A. Fraenkel** – **Y. Bar Hillel** – **A. Levy**, „*Foundations of Set Theory*” (Second Revised Edition), Elsevier, 1973, p. 46.)

[12] Például a legutóbbi cikkemben: „*A fizika matematikája és a matematika fizikája – Szubjektív vissza- és előretekintés*” https://www.infinitemath.hu/filozofia/428-a-fizika-matematikaja-es-a-matematika-fizikaja

Melléklet

A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (M1)$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \qquad (\mathrm{M2})$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j}sp\varphi) \quad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (\mathrm{M3})$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta\varphi} \qquad (M5)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{x - \boldsymbol{\delta} y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \qquad (M6)$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ = i, j, k** aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta} y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta} y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.