Hogyan tovább egy új számrendszerhez?

Desiderata

„Izgalmas lett a téli este
és körénk szállt a túlvilág:
számok nőttek elő a földből
és bujkáltak egymáson át”
/Szabó Lőrinc, Lóci meg a számok/

1. A szám fogalma

A számok fogalma nem pontosan definiált a matematikában, olyan alapfogalom, amelyet nem vezetünk vissza más fogalmakra, csak körülírjuk egyfajta axiómaként. Általában olyan matematikai objektumként jellemezzük a számokat, amelyek sorrendképzésre, számolásra, mérésre, mennyiségek összehasonlítására, és azonosításra (címkézésre) használhatók. A számok rendszere folyamatosan bővül, ahogy a matematika fejlődik, és ma nagyon jelentős változáson megy keresztül.

A számok legfontosabb képviselői az alábbiak, felfedezésük történeti sorrendjében:

- **Természetes** számok,
- **Egész** számok, azaz a természetes számok **0**-val és **negatív** számokkal bővítve,
- **Racionális** számok, az egészek hányadosaként megjelenő számok,
- **Valós** számok. azaz a racionális számok bővítése irracionális számokkal. Az irracionális számok a természetben előforduló olyan mennyiségek leírására alkalmasak, melyek racionális számként nem jellemezhetők.
- **Komplex** számok, melyek lehetővé teszik a gyökvonást negatív számokon,
- **Kételemű** számok, azaz a komplex számok és „testvér-számaik”, melyek jellemzője, hogy az egyik additív elemük valós szám, a másik additív elemük olyan nem valós, képzetes szám, melynek négyzete valós szám. Három, egymástól lényegesen eltérő típusuk van:
  - **komplex** számok, melyek képzetes egységének négyzete –1-gyel egyenlő,
  - **parabolikus** – vagy ismertebb nevén **duális** – számok, melyek képzetes egységének négyzete 0-val egyenlő, de nem azonos a 0-val,
  - **hiperbolikus** számok, melyek képzetes egységének négyzete +1-gyel egyenlő, de nem azonos a valós ±1-gyel.

A fentieken kívül vannak egyéb számfajták is, de azok kevésbé fontosak a vizsgálódásaim szempontjából. Minden útkeresésben sok lehetőség közül választhatunk, így van ez a számrendszereknél is. A címben utalt számrendszer a számok rendszerének olyan bővítése, melynek a fent felsorolt valamennyi számtípus a részét képezi. A 2. pontban azokat a feltételeket és szempontokat sorolom fel, melyek leszűkíthetik a választási lehetőségeket, és megkönnyíthetik – vagy éppen megnehezíthetik – az új számrendszer felfedezését, ha egyáltalán léteznek olyan számok, melyek megfelelnek a kívánság-lista követelményeinek.

Az utóbbi időben olyan sokat foglalkozom számokkal, hogy lassan a pitagoreusok – vagy, ahogy mostanában írják püthagoreusok – közé tartozónak érzem magam.[1] **Egyelőre nem gondolom, hogy számokkal minden leírható, viszont sokkal gazdagabb tulajdonságúnak látom a számokat, mint amit eddig fölismertünk bennük.** A számok „mindenhatóságának" gondolatát erősíti bennem a számítógépek és a mesterséges intelligencia térhódítása. Ezeket egyre kevésbé az anyagi hardver, mint inkább a szoftver működteti, azaz számokon végzett számokkal kifejezett műveletekből állnak.

Hosszú ideig a számok rendezési, azaz sorszám jellege mellett csak mennyiségi szerepüket tudatosították. A kezdetben pusztán matematikai szükségleteket kielégítő, és ezt a nevükben is tükröző *irracionális* és *képzetes* számok gyakorlati haszna is előbb-utóbb kiderült. Az irracionális számok már felfedezésükkel egy időben használhatóak voltak olyan megszerkeszthető szakaszok mértékéül, melyek nem bizonyultak mérhetőnek a racionális számok körében. A képzetes komplex **i** szám viszont jóval matematikai felfedezése és felhasználása után „találta meg a helyét" a fizikai számításokban. A komplex képzetesek „ikertestvérei" a hiperbolikus és a parabolikus (duális) imaginárius számok alig több mint száz éve ismertek. Hasznosításuk a fizikában csak néhány évtizede kezdődött, de azóta rohamosan növekszik a felhasználási területük; elsősorban a kvantumfizikában, és a relativitáselméletben.

A matematika legabsztraktabb fogalmai óriási eredményeket hoznak a felhasználási területek bővítésében és egységes kezelésében. Ezzel szemben ennek a felsőbb matematikának az alkalmazásakor komoly akadályokba ütközünk, amikor az – egyébként gyönyörű, és „matematikailag egyszerű" – elvont eszközrendszert a gyakorlatban is használni szeretnénk. Nem véletlenül nőtt hatalmas tudományterületté például az alkalmazott matematika vagy a numerikus módszertan. Bármit szeretnénk konstruálni, vagy akár csak megérteni a körülöttünk lévő világból, először is le kell fordítanunk a számok nyelvére a matematika legelvontabb összefüggéseit. **A számfogalom is absztrakció eredménye, de jóval közelebb áll a tapasztalatainkhoz, mivel sokkal inkább felfedezése a valóság összefüggéseinek, mintsem gondolati kreáció.** Ezért természetes vágy az, hogy a matematika legbonyolultabb összefüggéseit már maga a számrendszerünk tartalmazza. Mennyivel egyszerűbb lenne az élet, ha maga a számok világa lenne alkalmas tetszőleges modellezésre, mindenféle közbülső logikai konstrukció nélkül. Az ötlet nem teljesen légből kapott, gondoljunk arra, hogy a kételemű számok szorzásának geometriai képe a mozgások egy-egy alapfajtája: **körmozgás** a komplex számoknál, **hiperbolikus forgás** – azaz **Lorentz-transzformáció** – a hiperbolikus számoknál, és **eltolás** a parabolikus (duális) számoknál. Egy másik példa a **geometriai algebra**, ahol szintén szemléletes jelentése van az alapműveleteknek, a legegyszerűbb példa erre a külső szorzat nagysága, amely a tényezői által kijelölt **paralellotope többdimenziós térfogatával** egyenlő.

2. Desiderata – a számok bővítéséhez

Vázolom azokat a szempontokat, melyeket figyelembe szeretnék venni a kételemű számok bővítésénél. Nemcsak irányelveket fogok megfogalmazni, de bizonyos konkrét

[1] Miért gyönyörűek a számok? „*Olyan ez, mint megkérdezni, miért szép Beethoven IX. szimfóniája. Ha magadtól nem jössz rá, más nem tudja elmagyarázni. Tudom, hogy a számok gyönyörűek. Ha nem azok, akkor semmi sem az.*" (Erdős Pál)

tulajdonságokat is megnevezek, melyeket az új számrendszertől remélek. A rövidség kedvéért T-vel jelölöm e számok halmazát a kívánatos tulajdonságok listájában. Természetesen még az is kérdés, hogy létezik-e egyáltalán az alábbi elvárásoknak eleget tevő rendszer.

1. T rendszerének alapelemei kell, hogy legyenek a **kételemű számok**.
2. T-ben is értelmezhetőnek kell lennie a képzetes egységeknek, mint speciális **végtelen modellek**nek, mely a kételeműeknél a kontinuum hipotézist és annak két alternatíváját jelenti.
3. T elemein két alapművelet; egy összeadás és egy szorzás **kommutatív** művelet. (Ez lényegi eltérés a geometriai algebrától, hiszen ott a geometriai szorzat, mint a szorzás alapművelete nem kommutatív.)
4. T képzetes elemeinek valamely **véges hatvány**a valós számmal egyenlő.
5. A T számtérben definiálhatónak kell lennie egy **szimmetrikus bilineáris függvény**nek és a hozzá tartozó **kvadratikus form**ának, továbbá egy **nem elfajuló antiszimmetrikus form**ának, azaz egy **szimplektikus form**ának. E két követelmény olyan megszorítást jelent, amely segítheti az egyelőre ismeretlen T előállítását, ha az egyáltalán lehetséges. **A szimmetrikus formát a merőlegesség, a szimplektikus formát a párhuzamosság definiálására szeretném felhasználni.**

Megjegyzés

A **skalárszorzathoz, azaz a belső szorzathoz hasonlóan tulajdonképpen a külső szorzat is mérték**, méghozzá dimenzió-függő mérték: síkbeli/térbeli, pontosabban tetszőleges dimenziójú térfogatnak felel meg a nagyságát tekintve.

Érdekes, hogy a külső szorzat felfogható **ideális pontok irányított távolságaként** is, ha a síkot az ideális egyenesével jellemzem. Ekkor a bivektor egy irányított egyenes szakasz számszorosa ezen az ideális egyenesen. Ez egyben szemlélteti a bivektor végtelen-modell szerepét is, hiszen az ideális pontok „végtelen távoli” pontok, és a közöttük lévő irányított távolság azon egyenesek szögtávolságával írható le, melyek állása reprezentálja az ideális pontokat. Tehát a bivektor egyfajta irányított szögtávolságot is reprezentál. Így a – külső szorzattal jellemzett – szimplektikus geometria nemcsak „területi/térfogati” geometria, hanem végtelen távoli elemek geometriája is. A közönséges távolságokkal kapcsolatban már megjegyeztem egy korábbi cikkben[2], hogy helyesebb lenne képzetes számként értelmezni a távolságot, mert így egységes kezelést kaphatnának a hiperbolikus síkon a normára. Ehhez hasonlóan – és azonos okból – a szögmértéket is képzetes számként kellene definiálni. Ezek a megoldások annál is indokoltabbak, mivel az eddig ismert képzetes számok a végtelent modellezik és minősítik.

Egy olyan modell, amivel ideális pontok irányított távolságaként értelmezem a bivektort azért is szemléletesebb az irányított sík-szegmenshez képest, mivel egy vektor bivektorral való szorzata a vektor $\pi/2$-vel való elforgatását jelenti. Ugyanakkor a kételemű számok síkján – aminek bővített verzióját szeretném a geometriai algebra helyett használni – egy számvektornak a képzetes elemmel való szorzása szintén a számvektor $\pi/2$-vel való elforgatását jelenti a merőlegességnek az adott számsíkon való definíciója értelmében. (Általában is igaz, hogy a vektorok szorzása forgás az adott számsík forgás-definíciójának megfelelően, nagyítással együtt. A nagyítás pedig nem más, mint az idővektorral, azaz skalárral való szorzás.)

[2] Lásd például „*A negatív hiperbolikus valószínűségektől egy új és egységes matematikai eszköztár felé*” című cikk 3. pontját az 5. oldalon: http://www.infinitemath.hu/images/stories/moldoveanu_160703_v1.pdf

Ez mind szép lenne, de az ideális pontok távolságaként értelmezett mérték sajnos mégsem alkalmazható a bivektorra, mivel a bivektor, mint külső szorzat tetszőleges számú vektorpár szorzataként is előáll. Nem a vektorok által közbezárt szög mértéke jellemzi a bivektort, hanem a vektorok által kifeszített paralelogramma *területe* és egy *irány*; így ezzel a területtel rendelkező irányított kör is szemléltetheti. Ennek ellenére is érdemesnek gondolom szem előtt tartani a bivektor és az ideális elemek kapcsolatát, mert a végtelen-értelmezésük, illetve a forgás-iránnyal való kapcsolatuk sejtet valamiféle összefüggést.

A **kételemű számokon** definiált geometriai szorzatban a **bivektor nem más, mint egy külső szorzat a képzetes elemmel szorozva**, tehát a bivektor egy valós együtthatójú képzetes szám. A valós együttható pedig egy szimplektikus szorzat, így a területtel való összefüggés nyilvánvaló. A képzetes szám, mint szorzó viszont nem szerepel a bivektor klasszikus geometriai algebrabeli értelmezésében. (A definíciók ekvivalenciájának meghatározásához az is szükséges, hogy a „végtelen távoli" értelmezést át tudjuk vinni a kettőnél több dimenziójú r-vektorokra is.)

A **konjugált képzést** is meg kell gondolni, hiszen a kételeműeknél egy vektor hossza az adott vektor és konjugáltja szorzatának négyzetgyöke: $\sqrt{z\bar{z}}$. A skalárszorzat, valamint a szimplektikus szorzat definíciója is egy konjugált segítségével történik; az előbbi a $\bar{z}_1 z_2$ szorzatnak a valós része, az utóbbi pedig a képzetes része. Ez azt sugallja, hogy az új számkörben is **jó lenne egy vektor-konjugált fogalom**. (Fontos megjegyezni, hogy minden szimplektikus struktúra izomorf egy $V \oplus V^*$ formával, ahol V egy n-dimenziós vektortér és V* a duálisa. Ez az összefüggés esetleg segíthet az új számrendszer kialakításában.)

6. Arra gondolhatnék, hogy az előző 5. pontban említett definíciókkal legalább 3 felé ágazhatnak a T-rendszerek a kételemű számokhoz hasonlóan, hiszen akár a szimmetrikus/antiszimmetrikus függvényeket, akár a tetszőleges dimenziójú mértékeket definiálom először, mindkét esetben a trigonometrikus szögfüggvény, a hányados-képzés valamint a hiperbolikus függvény közötti választás más és más számrendszert eredményezne. **E számrendszerek egységes kezelése például az előbb említett három függvényrendszer egységes kezelésével lenne lehetséges.** Ez részben adott is a komplex argumentummal képzett trigonometrikus és hiperbolikus függvények közötti összefüggésekkel.
7. Fontos szempont **a kételemű számok téridő-modell szerepe**, azaz a valósok az időt, a képzetes tengely a teret modellezi. Az általános modell esetén egyetlen idő, azaz valós tengely, és a teret modellező képzetes tengelyből legalább 3-nak kell lennie a számtérben, mely utóbbiak a tulajdonságaikat tekintve felcserélhetőek. Tehát a geometriai algebra általánosított számvektoraival, a multivektorokkal ellentétben, itt a valós számtengelynek is merőlegesnek kell lennie a többi koordinátatengelyre a T rendszerben definiált merőlegesség értelmében. Tulajdonképpen a skalár is vektor, csak egydimenziós térben, ahol az irányát az előjele adja, a méretét pedig a skalár maga. Több dimenziós tér(idő)ben azt is mondhatom, hogy a skalárok tiszta idő-vektorok.
8. A kételemű számok végtelen értelmezése alapján **az időből generálom a teret, és nem fordítva**. Ennek a bővített T rendszerben is fenn kell állnia. Ez a tulajdonság is bizonyos szempontból eltér a geometriai algebrától, hiszen ott véges vagy végtelen dimenziójú euklideszi vektortérből generálom az algebrát, azaz a számvektorok rendszerét.
9. Irányelv, hogy a végtelen *minőségi* értelmére tekintettel a számmodell képzetes elemeinek nemcsak a végtelent, de a **megkülönböztethetetlenül nagy számok**at is

reprezentálnia kell, amint ezt a kételeműeknél már megjegyeztem.[3] Ezzel annak a tapasztalatnak is megfelel a számrendszer, hogy csak véges mennyiséget tapasztalok, végtelen mennyiséget nem.

3. Összegzés

Miközben ma még a matematika legegyszerűbb absztrakcióinak tartják a számokat[4], egyre inkább körvonalazódik egy olyan kép, melyben a számok a matematika legösszetettebb és legizgalmasabb fogalmának bizonyulhat.

A 2. pontban felsorolt szempontrendszerhez legközelebb a **geometriai algebra** eszközrendszere áll, de három **lényeges pontban el kell térni tőle**:

- A valós számok számegyenese **merőleges** a geometriai algebrát definiáló euklideszi térre, a merőlegességnek a skalárszorzat (belső szorzat) adta definíciója szerint.
- A geometriai algebra szorzás alapművelete nem **kommutatív**, míg az új számrendszertől egy olyan szorzási alapműveletet várok, amely kommutatív.
- A geometriai algebra egy n-dimenziós euklideszi térből származtatja az algebrát, viszont az új számrendszerben az időt reprezentáló **valós számegyenesből származtatom** a teret reprezentáló képzetes számegyeneseket.

A geometriai algebrához képest **lényegesen új szempontrendszer** a következő:

- Az egyik legfontosabb új megközelítésem **a valós számegyenes idő-dimenzióként való felfogása**. Bár a hiperbolikus számok szorzása, mint Lorentz transzformáció, már sejteti ezt az összefüggést, de az az általánosítás még hiányzott eddig, hogy a kételemű számok mindegyike egyfajta téridő modellnek tekinthető.
- Máig nem köztudott felfedezésem a kételemű számok értelmezésében **a képzetes elemek egyfajta végtelen-modellként való azonosítása**, melyet az új számrendszernek is meg kell örökölnie.
- Új és hasznos következménye a képzetes elemek *minőségi* végtelenként való értelmezésének, hogy ezt a modellt **megkülönböztethetetlenül nagy számokra is alkalmazhatjuk**, nem csak a végtelenként idealizált mennyiségekre.

A kérdés tehát az egész témával kapcsolatban, illetve minden egyes ponthoz:

vagy


[3] Lásd például „*Az idő, a tér és a végtelen*” című cikkben a 4.6 pont utolsó bekezdését: http://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/88-az-ido-a-ter-es-a-vegtelen

[4] „*Hogy minden szellemi tevékenység között a számtani a legalsóbb rendű, annak az a bizonyítéka, hogy ez az egyedüli, amelyet géppel is el lehet végezni.*” (Arthur Schopenhauer)