Szimmetriák és téridők

*„Szimmetria- és invariancia-megfontolások – valamint a megmaradási tételek is – kétségtelenül már korán szerepet játszottak a fizikusok, így Galilei és Newton gondolkodásában, s valószínűleg még őelőttük is. Ezeket a megfontolásokat azonban nem tekintették különösen fontosnak, és csak ritkán fogalmazták meg világosan.” (**Wigner Jenő**)*[1]

1. Bevezető

Már egy évszázada annak, hogy a csoportelmélet bevonult a fizika eszköztárába, és gyümölcsözőnek bizonyult. E matematikai fogalomrendszernek egyszerre előnye és hátránya a túlzott általánossága, hiszen egyrészt univerzális jellege folytán a fizika különböző területei írhatók le ugyanazzal az eszközzel, másrészt ahogy mondani szokták, ami mindenre jó, az igazán semmire sem jó, így egymás után jelentek meg specifikus algebrai struktúrák, amelyek egy adott területen már valóban használhatónak bizonyultak. Mindenesetre a matematikai fizikában a csoport-művelettel jól modellezhető egy-egy olyan fizikai változás, amelynek inverze is létezik, azaz megfordítható, és egységnyi változás – mértékcsoportnál mértékegység – definiálható vele kapcsolatban. A csoportelmélet fizikai alkalmazásában fontos szerepet töltenek be a szimmetriák, ezek olyan transzformációk, amelyek egy objektum bizonyos tulajdonságait változatlanul hagyják. Még ennél is szűkebb csoporttal fogok most foglalkozni, a mozgásszimmetriákkal. A velük kapcsolatos legfontosabb fogalmak tisztázása a célom, és a saját megközelítéseimről is újból szót ejtek, mert ezek magyarázata is szükséges a visszajelzések alapján.

2. Mozgásszimmetriák

A geometria és a fizika egyik legalapvetőbb szimmetriái a mozgásszimmetriák, de kezelésük még ma sem egységes. Sokan a mozgásokat az egybevágósági transzformációkkal azonosítják a geometriában[2]. Ezzel szemben a fizikában jogos az a felvetés, hogy a mozgás megnevezést olyan egybevágósági transzformációkra kell szűkíteni, amelyek fizikailag megvalósíthatóak. Meg sem kísérlem a fizikai mozgás definícióját megfogalmazni, hiszen olyan tapasztalati jelenségről van szó, amelyről csak egy intuitív képet kaphatunk a matematikai axiómákhoz hasonlóan. Így a mozgás alatt általában egy fizikai rendszer helyzetének folyamatos[3] időbeli változását értjük[4]. Ekkor az idő-kritérium kulcsfontosságú, hiszen egy mozgáshoz időre van szükség a való világban. Nem is kell ehhez az einsteini relativitáselméletekre, a téridő-

---

[1] **Wigner Jenő**, *Szimmetriák és reflexiók – Válogatott tanulmányok*, Gondolat – Budapest 1972, 25. oldal

[2] Lásd például; **H.S.M. Coxeter**, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, 46. oldal.

[3] A folytonosság kérdése is lényegi a mozgásokat tekintve, de jelen írásomban mellőzhetem a részletezését.

[4] Megfontolandó, hogy ennél általánosabb megfogalmazást adjunk, azaz nevezzük mozgásnak a fizikai rendszerek bármely konfigurációjának, állapotának folyamatos időbeli változását, arra gondolva, hogy ezek kvantumszintű helyzetváltozások eredményei.

szemléletre hivatkozni, elegendő a mindennapos tapasztalat és a józan paraszti ész annak megállapításához, hogy bármely nem nulla távolság megtétele – vagy egy rendszer valamely állapotából egy másik elérése – csak valamely nem nulla idő alatt lehetséges.

A fentiek alapján a tükrözések nem mindegyike mozgás, hiszen például egy n dimenziós tér n-1 dimenziós hiperfelületére való tükrözés az adott n dimenziós térben mozgással nem valósítható meg. Ezzel szemben a klasszikus geometria a **Lorentz**-transzformációt nem tartja mértékinvariánsnak[5], és így nem sorolja a mozgások közé, holott a fizikában – a tapasztalatok által többszörösen igazolt módon – mozgó rendszerek közötti koordináta-transzformáció a **Lorentz**-transzformáció, amely hiperbolikus forgást ír le, így speciális *mértékinvarianciával* rendelkező mozgást modellez.

Megjegyzés

Bizonyos szempontból – általában a matematikában – fontos lehet megkülönböztetni az aktív transzformációt a passzív transzformációtól. Aktív transzformáció az, amely egy mozgó objektumot ír le, a passzív transzformáció pedig ugyanannak az objektumnak a leírása különböző koordinátarendszerekben. A fizikusok általában nem tesznek különbséget közöttük, és én sem fogok, mivel az egyik eset tartalmazza a másikat, hiszen, ha egy *passzív* transzformáció során az egyes koordinátarendszerben leírt objektum maga a másik koordinátarendszer, akkor épp egy mozgó objektumot írunk le, azaz *aktív* transzformációról van szó.

A speciális relativitáselmélet inerciarendszerek – azaz egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgással mozgó (gyorsulásmentes) rendszerek – közötti transzformációról szól, amelyeknél az egyik rendszerből klasszikus méréssel nem ellenőrizhetőek a másikban mérhető téridőbeli távolságok. Csak fény útján és matematikai számításokkal szerezhető információ a másik rendszerről. A fény útján, azaz látással szerzett információ nem más, mint egy téridő-perspektíva az egyik rendszerből a másikra tekintve, amely éppúgy nem az igazi méreteket mutatja, ahogy a térben távoli tárgyak perspektivikus mérete sem. Az utóbbiról mindennapi tapasztalatunk, hogy a távoli tárgyakat kicsinyítve látjuk, az előbbiről pedig, azaz a nagy sebességű tárgyak téridő-perspektívájáról viszont nem égett a sejtjeinkbe még az a tapasztalat, hogy ilyenkor a mozgás irányába eső térbeli távolságot kicsinyítve, az időbélit pedig nagyítva látjuk. Ezzel a tapasztalattal csak mostanában szembesültünk a parányok és a csillagászati távolságok nagy sebességű eseményeit kutatva. Említettem a matematikai számításokkal megszerezhető információt, ez alatt azt értem, hogy két inerciarendszerbeli megfigyelő megállapodhat olyan algoritmusokban, amelyekkel a méréseik összehasonlíthatóak. Például megállapodnak a skalárszorzat matematikai definíciójában, és vele a hosszmértékben, továbbá abban, hogy a merőlegességről akkor beszélünk mindkét rendszerben, ha a skalárszorzat nulla. Így eljutunk egy mérték-invarianciához, azaz mindkét rendszer azonos értéket *számít* a mértékek meghatározásánál a saját koordinátarendszerében, ez szerepel **Einstein** speciális relativitáselméletében, de még ennél is több igazolódik, hiszen a skalárszorzattal definiált merőlegesség maga után vonja a *téridő* szögek invarianciáját is inerciarendszereknél, ahogy egy korábbi cikkemben[6] levezettem.

Tehát szemben a téridőbeli látási tapasztalat méret-torzulásaival, az egyeztetett matematikai algoritmus teljes mértékinvarianciát biztosít két inerciarendszer között.

[5] Például **H.S.M. Coxeter** a területtartó affinitások közé sorolja a **Lorentz**-transzformációt, „prokrusztészi nyújtásnak” nevezve az 2. lábjegyzetben említett könyvének 213. oldalán.

[6] Lásd erről a „*Két polárkoordináta invarianciája a speciális relativitáselméletben*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/matematika/404-ket-polarkoordinata-invarianciaja-a-specialis-relativitaselmeletben

3. Mérés és számolás

Van valami furcsaság a fent leírtakban. Ha a mérést érzékszervi tapasztalathoz kötöm, akkor inerciarendszerek esetén csak a látással szerzett információt fogadhatom el „megmért adatnak". Ekkor igazuk van azoknak – például a neves geométernek, **H.S.M. Coxeter**nek –, hogy a **Lorentz**-transzformáció nem mozgás[7], mert a látással szerzett információk alapján nincs mértékinvariancia. Viszont ugyanezt a logikát alkalmazva a hétköznapi életben tapasztalt térbeli perspektívára, azaz a látványban tapasztalt rövidülést is valósnak kellene gondolnom, ami viszont ellentmond ősi tapasztalatainknak. Így a mérés fogalmát ki kell terjesztenünk az érzékszervi tapasztalatból *következtetett* eljárásokra is, például mozgások esetén az érzékelt adatból *számolt* érték is *megmért mennyiség*nek tekintendő. Egyébként már a klasszikus hétköznapi mérésnél is végzünk *számításokat*, hiszen a választott mértékegységnek a mérendő mennyiségben való megszámlálásával[8] jutunk eredményre, tehát **a számolás kezdettől fogva a mérési tevékenység része.** Inerciarendszereknél nemcsak mértékegységet kell egyeztetni, de a mértéket szolgáltató számítási módszert is, jelesül skalárszorzatot kell egyeztetni, amely majd az inerciarendszerek saját koordinátarendszerében a mértékek kiszámításának alapjául szolgál. Ekkor pedig a **Lorentz**-transzformáció is mértékinvariánsnak bizonyul, így e kritérium alapján is a mozgások egyik fajtája.

4. Az elemi mozgások és a téridő

Visszatérve a mozgások fogalmára, három alapmozgást ismerünk:

- (párhuzamos) eltolás, transzláció,
- forgatás, körmozgás,
- hiperbolikus forgatás, **Lorentz**-transzformáció.

A fentieket figyelembe véve azonban ezek már nem a geometria „időtlen" transzformációi, hanem időigényesek, mint minden fizikai mozgás, így leírásuk is csak téridőbeli lehet. Mindig téridő-távolságot kell mérnem/számolnom és a megfelelő szögfogalom is csak téridőbeli lehet. Ezzel nem azt mondom, hogy a hétköznapi életben ne mérhetnénk pusztán térbeli távokat – például egy asztalosnak sem kell az időváltozást figyelembe venni, ha a megmunkálandó fát méri – vagy ne mérhetnénk csak időt a hétköznapi óráinkkal. Viszont vegyük észre, hogy teret vagy időt önmagában mérni csak „itt és most" lehet, az „ott és akkor" eseményeknél[9] csak téridővel számolhatok, így inerciarendszerek esetén, vagy például hétköznapjainkban a GPS-ek működtetésénél. Ezért egy fizikus jobb, ha mindig téridőben gondolkodik még akkor is, ha látszólag az idő a térhez, vagy a tér az időhöz képest elhanyagolható mértékben változik. Egy folyamat modellezése során ugyanis a kezdetben esetleg elhanyagolható értékek nagyon nagyra nőhetnek, így minden változás modellezésénél téridőbeli fogalmakkal – téridőbeli mértékkel, szöggel, függvényekkel – kell számolni, és csak egy számolási eljárás végén szabad eldönteni, hogy valamely eleme az eredménynek elhanyagolható-e, vagy sem.

Sokan követik el azt a hibát, hogy a **Lorentz**-transzformációt, mint a *téridőbeli* hiperbolikus forgatást[10] a *térbeli* körmozgással hozzák párhuzamba, holott már a fentiek miatt is gondolni

[7] Lásd a 5. lábjegyzetet.

[8] Ez a megszámlálás akár tekinthető ebben az esetben is „időfaktornak"!

[9] Figyelem! Az „ott és akkor" eseményei közé tartoznak a kvantumvilág eseményei is, mivel – pongyolán fogalmazva – ezek is túl vannak a hétköznapi érzékelésünk határain.

[10] A téridőbeli hiperbolikus forgatás alatt egy olyan egyenlőszárú hiperbola menti mozgásra kell gondolni, amelynek koordinátarendszerbeli ábrázolásánál az egyik koordinátatengely az időt, a másik a teret szemlélteti.

kellene arra, hogy egy mozgás csak téridőbeli lehet. Legutóbb egy neves magyar fizikus előadásán hallottam a térbeli körmozgás és a téridőbeli hiperbolikus forgatás közötti párhuzamról. Egy korábbi cikkemben[11] pedig említettem már, amint **David Hestenes** – a geometriai algebra jeles művelője – is a *téridőbeli* hiperbolikus forgatás analóg esetét a *térbeli* körmozgásban lelte meg.

Megjegyzés

Hestenes úgy jut ehhez a párhuzamba állításhoz, hogy miközben az általa geometriai algebrával modellezett téridő matematikájában mind a komplex, mind a hiperbolikus egységvektorral való szorzás matematikailag egyenértékű megoldást ad, a komplex egységvektorral való szorzást a térbeli körmozgás képének tekinti téridőbeli helyett. Az előző okfejtésünket figyelembe véve – azaz szem előtt tartva, hogy mindig téridővel kell számolni – észre kellett volna vennie **Hestenes**nek, hogy a komplex egységvektorral való szorzásnak is téridőbeli mozgást kell modelleznie. Ebből következően pedig ki is zárható a megoldások közül, ha figyelembe vesszük a fénysebesség állandóságának feltételét, amely csak a hiperbolikus forgatást leíró **Lorentz**-transzformáció esetén teljesül, a többi feltételnek egyébként eleget tevő lineáris transzformációk közül, beleértve a **Hestenes** által nem említett parabolikus (duális) egységvektorok szorzásával modellezhető transzformációkat, azaz téridőbeli eltolásokat is. Ez utóbbi nem véletlenül hiányzik **Hestenes** modelljéből, mivel a parabolikus képzetesnek – azaz a $\mathbf{j}^2 = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ számnak – nincs megfelelője a geometriai algebrában.

Ezek a tévedések két okból is érthetőek, egyrészt a komplex számvektorok geometriája sok hasonlóságot mutat a valós vektorokkal, másrészt nem közismert a kételemű számok képzetes elemeinek – komplex estén az **i** számnak $\left(\mathbf{i} = \sqrt{-1}\right)$ – a kapcsolata a kontinuumhipotézissel és vele a téridővel[12]. E kapcsolat ismeretében már tudni lehet, hogy a kételemű számok valós koordinátatengelye az időt, a képzetes pedig a térdimenziót – vagy bármely időben változó állapotot – modellez, tehát a komplex szám egységelemének szorzásával modellezett körmozgás téridőbeli és nem térbeli.

Megjegyzés

Feynman is rácsodálkozott[13] a komplex számok szerepére a hullámok interferenciájának leírásakor. Míg a kvantummechanikában (QM) csak és kizárólag komplex számként tudunk az amplitúdóval számolni, addig az anyaghullámok esetén elégségesek a trigonometriai vagy geometriai módszerek, viszont egyszerűbb ott is, ha komplex számokkal számolunk. Ez utóbbit **Feynman** maga is csak „matematikai fogásnak" nevezte. Bár nem ismerte a képzetes számok fenti tulajdonságait és értelmezését a QM-ben, mégis igazi fizikusként jól ráérzett arra, hogy anyaghullámok leírásakor a komplex számok használata csak matematikai trükk, de a QM-beli jelenségek ábrázolásakor *lényegi* szerepe van a komplexeknek, valamilyen mély értelmet hordoznak.

Visszatérve az alapmozgásokra, fontos tehát figyelembe venni, hogy ezeket, mint minden mozgást *téridőbeli* vektorokkal, koordinátákkal lehet korrektül leírni. Ekkor válik izgalmassá az a felfedezés, hogy a kételemű számok[14] egységelemeivel való szorzás az alapmozgások valamelyike:

- körmozgás a komplex számoknál,
- párhuzamos eltolás (transzláció) a parabolikus számoknál,
- hiperbolikus forgatás – azaz **Lorentz**-transzformáció – a hiperbolikus számoknál.

E mozgások szimmetriái, invarianciái azonban nem térbeliek, hanem a téridő szimmetriái, az invariáns hossz- és szögmetrikái téridőbeli invarianciák, a tér és az idő egy-egy speciális

---

[11] Lásd „*A téridő geometriai algebrái*" című cikket (8.oldal); https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/346-a-terido-geometriai-algebrai

[12] Lásd erről a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*" című cikket: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

[13] Lásd **Feynman – Leighton – Sands**, *Mai Fizika*, Műszaki Könyvkiadó, Budaest, 1969, 3. kötet, 44. és 150. oldal.

[14] A kételemű számok alaptulajdonságait lásd a Mellékletben.

viszonyát modellezik, azaz a kételemű számok a tér és az idő egy-egy speciális viszonyát modellezik, ha a teret leszűkítem egy dimenzióra[15].

5. Összegzés

Elsőként azt érdemes kiemelni, hogy az eddig „időtlen” matematikában megjelent a fizikai időfogalommal adekvát matematikai entitás, pontosabban a tér – vagy bármely időben változó állapot – és az idő viszonyát modellezők matematikai univerzuma, ezek között elsőként a legelemibbek; a kételemű számok, amelyeknek valós eleme az idő, imaginárius eleme pedig a tér – vagy bármely időben változó állapot – „képe” a matematikai nyelvben. E kételemű számok közül a komplexek már évszázadok óta ismertek, mivel nélkülözhetetlenek bizonyos matematikai egyenletek megoldásában, de a fizikával, és konkrétan a téridővel való kapcsolatuk elég újkeletű. Nélkülözhetetlenségük a fizikában csak a kvantumfizika megjelenésével vált ismertté, de téridő-szerepük a jelen felfedezése. Ez utóbbit akadályozták a komplex számvektoroknak a vektorokhoz hasonló tulajdonságai, a kvantumvilág megismerhetőségének nehézségei, valamint a másik két kételemű számfajta, a parabolikus és a hiperbolikus számok részbeni ismeretlensége. A komplexek téridőt modellező lehetőségére a másik kettő kételemű számfajta téridő-leírásban való használhatósága világított rá, hiszen a parabolikus egységvektorokkal való szorzás a **Galilei** transzformációt modellezi, a hiperbolikus egységvektorral való szorzás pedig a **Lorentz**-transzformációt. [16]

[15] Egyelőre gyorsulásmentes – azaz inerciarendszerekben – gondolkodunk, amely a térirányok és a térbeli pontok egyenértékűségét feltételezi, így ebben az esetben leszűkíthető a tér egy dimenzióra.
[16] Lásd erről „*A Galilei-transzformáció és a parabolikus számok*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

Melléklet

A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (M1)$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \quad \text{a komplex számoknál} \qquad (\mathrm{M2})$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j}sp\varphi) \quad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (\mathrm{M3})$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \quad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta\varphi} \qquad (M5)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{x - \boldsymbol{\delta}y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \qquad (M6)$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta}y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta}y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.