Az idő, a tér és a végtelen

A téridő új nézőpontból

Tartalom

Sokat írtam már arról, hogy mit tudok a címbeli fogalmakról és kapcsolatukról. Most elsősorban azokra a teljesen új összefüggésekre szeretnék fókuszálni, melyekkel a szakirodalomban még nem találkoztam. Különös aktualitást ad a témának az, hogy ez év elején a **Scientific American** egy különkiadásának[1] kizárólagos témája az *idő* volt. Ami pedig itt következik, abban az idő olyan tulajdonságáról lesz szó, ami nem szerepel az előbb említett magazinban sem.

Ez az írás elsősorban csak matematikai vázát adja a végtelenek – és általa nagyon sok egyéb fogalom – újfajta megközelítésének. Még nem törekedhettem arra, hogy a matematikai részek korrekt definíciókból, axiómákból, tételekből, bizonyításokból készült építményként álljon elő, mert ezek nagy része még kialakulóban van. Az új látványban még az állványzat az, ami szembetűnő, de mögötte már sejteni lehet a magasodó falakat.

1. Az idő-fogalom evolúciója

A tér és az idő érzékelése, majd fogalmának kialakulása lényeges módon eltér egymástól. A térhez képest az idő fogalma sokkal később alakult ki az evolúció során.[2] Az állatok és az ember érzékszervei a tér érzékelésére specializálódtak, mivel a táplálékszerzés és a külső veszély észlelése a térérzéktől függött. Az idő érzékelése sokkal bonyolultabb, nem kötődik konkrét érzékszervhez. Az időt „éljük", az idő velünk történik. A múlt és a jövő képzetének kialakulása igen bonyolult információ-feldolgozó rendszert feltételez. **Az embereknél a beszélt majd az írott nyelvek megjelenése hatalmasra tárta az emlékezés és a képzelet kapuit, és ezzel a múlt és a jövő, azaz általában az idő egyre pontosabb megismerését tette lehetővé**.

2. Kiragadott részletek az idő-fogalom gazdag irodalmából

Az idő fogalmának történetét áttekintve elkerülhetetlen elsőként megemlíteni Augustinus, azaz **Szent Ágoston** elmélkedéseit az időről. Le voltam nyűgözve, amikor először olvastam a *Vallomások*ban, hogyan képzeli el Augustinus az időt, hiszen korszerűbbek, okosabbak az időről szóló meglátásai, mint a ma élő iskolázott emberek többségének. Nem a sokat emlegetett gondolatait akarom idézni, hanem néhányat, melyek szintén korát megelőzőek voltak:

> *„Látom, hogy valami kiterjedés az idő. Látom-e, vagy csupán úgy látszik, hogy igazán látom."*[3]

Ebben az állításban/kérdésben benne érzem az idő egyedi dimenzióként való szemléletét.

> *„Ki tagadná, hogy a jövő még nincsen? A lélekben mégis ott van immár a jövőre való várakozás. És ki tagadná, hogy a múlt többé nincsen? A lélekben azonban ott van még a múlt emléke is."*[4]

---

[1] *A Matter of TIME – It begins, it ends, it's real, it's an illusion. It's the ultimate paradox.* /Special collector's edition of Scientific American, Volume 21 Number 1, http://www.sciamdigital.com/index.cfm?fa=Products.ViewIssue&ISSUEID_CHAR=3D549496-237D-9F22-E8FC406CC73CEDB8

[2] Lásd még: *A szabadságról és a szabad akaratról,* http://www.infinitemath.hu/index.php/filozofia/item/75-a-szabads%C3%A1gr%C3%B3l-%C3%A9s-a-szabad-akaratr%C3%B3l.html

[3] Vallomások, XI/XXIII/30

[4] Vallomások, XI/XXVIII/37

Ebben a gondolatsorban azt látom, amit a potenciális és aktuális létezésről írtam[5], azaz a **múlt** eseményei *már*, a **jövő** eseményei *még csak* **potenciálisan** léteznek, **de aktuálisan létezik a memóriánkban egy emlékkép a múltról, és a fantáziánkban egy jövőkép az elkövetkezendőkről**.

Forradalmi változást hozott a téridő kapcsolatának feltérképezésében Einstein relativitáselmélete. Einstein speciális relativitáselméletéből, pontosabban a Lorentz transzformációból következik, hogy **fénysebesség-közeli sebességgel mozgó koordinátarendszerben** a mozgás irányában **a tér „megrövidül"** a külső megfigyelő számára, ugyanakkor a mozgó koordinátarendszerben **idődilatációt** tapasztal, azaz a mozgó koordinátarendszerbeli időintervallumok meghosszabbodnak a külső megfigyelő számára. Szakszerűtlenül fogalmazva egy külső megfigyelő számára a fénysebességhez közeli sebességgel mozgó rendszerben a tér összenyomódik a mozgásának irányában, az idő viszont meghosszabbodik. **Olyan, mintha a térbeli veszteség időbeli nyereséggé alakulna, tehát mintha a tér és az idő átalakulhatna egymásba.** Ez természetesen **csak látszat[6], de valós ebben a képben az időnek a térhez hasonló valamiféle dimenzionális jellege**. A tér és az idő nem alakul át egymásba, hanem a „téridő látószöge" *változik,* amint változik két inerciarendszer egymáshoz viszonyított fénysebesség-közeli sebessége. Ez kizárólag az inerciarendszerek vonatkozásában tapasztaltakra igaz, jelen cikkben nem foglalkozom az általános relativitáselmélettel, és a speciális relativitáselméletet röviden csak relativitáselméletnek nevezem,

Szubjektív válogatásomban szeretnék néhány szót ejteni a Bergson-féle[7] időfogalomról is. Bergson megkülönbözteti a matematikai időt – mely alkalmas az élettelen rendszerek leírására – az élő, de elsősorban az ember által tapasztalt időtől[8], melyben az emlékezet, és annak folytonos gyarapodása okán a rendszer állapotaiban nincs ismétlődés, csak folyamatos fejlődés:

> *„Valójában a múlt megmarad magától, automatikusan. Kétségtelenül minden pillanatban mindenestül követ bennünket."*[9]

> *„A múltnak e megmaradásából folyik annak a lehetetlensége, hogy valamely eszmélet kétszer menjen át ugyanazon az állapoton."*[10]

Ezzel Bergson tulajdonképpen az „időnyíl" verbális megfogalmazását adja. Abban természetesen téved, hogy ez nincs meg az élettelen rendszereknél, hiszen azokban is megmarad valamilyen szinten az előző változások nyoma, csak sokkal kisebb mértékben, mint az embernél. Sőt olyan kicsi mértékben, hogy általában alkalmazható rájuk a matematika eddigi – a fejlődés[11] leírására alkalmatlan – idő és tér fogalma. Fontos megjegyezni, hogy Bergson „időnyila" az információval kapcsolatos entrópia-

[5] http://www.infinitemath.hu/index.php/filozofia/item/10-aktu%C3%A1lis-%C3%A9s-potenci%C3%A1lis-l%C3%A9tez%C3%A9s.html

[6] E transzformáció látszat-jellegét sokan vitatják, többek között a Föld gravitációs terébe érkező igen nagy sebességű kozmikus müonok bomlásidejének megnövekedését említve. Amint az egyik cikkemben már kitértem erre, ez azért hibás vélekedés, mert csak a müon hosszúság-kontrakciójával együtt állja meg a helyét. A lényeg az, hogy külső szemlélőként a tárgy *képében* tapasztalok valamit, amit a Lorentz transzformáció ír le. A müon példájában csúsztatást jelent az is, hogy itt nem inerciarendszerekről van szó, hanem gyorsuló rendszerekről. Hasonlóan rossz példák az órák, melyek a Föld különböző magasságaiban eltérő időt mérnek. Egyelőre nem térek ki az általános relativitáselméletre, jelen cikkben csak a speciális relativitáselméletre hivatkozom.

[7] Sok kritika érte már Bergson elképzelését az időről, és én sem értek egyet elgondolásainak egy részével, de vannak jó, sőt nagyon jó meglátásai is.

[8] Ez hasonló gondolat ahhoz, amit az 1. pontban említettem: az időt „éljük".

[9] Bergson, Teremtő fejlődés, Első fejezet (Dienes Valéria fordítása)

[10] U.o.

[11] Helyesebb lenne a „fejlődés" szó helyett „entrópia változással járó események" kifejezést használni.

fogalommal írható le: a *teremtő fejlődés* annak a növekedésnek a mintapéldája, ami a rendszerek bonyolultságában, információtartalmában végbemegy.

A tér- és az időfogalmainkkal kapcsolatos problémák a kvantumos méretek világának feltérképezésével, és a fénysebesség-közeli sebességek megismerésével váltak lényegessé.

3. A téridő ábrázolása a XX. században

3.1. Einstein algebrai leírása a téridőről

Az inerciarendszerek között a Lorentz-féle transzformációval leírt tér- és időkoordináták átszámításában a következő szorzószám szerepel:

$$\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Ahol v a két rendszer egymáshoz viszonyított sebessége, és c a fénysebesség.

Így ha egyetlen térkoordinátát és az idő koordinátát tekintjük, akkor a v sebességgel mozgó inerciarendszerben a koordináta-transzformáció a következő:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

Pontosabban:

$$x' = \frac{x - \frac{v}{c}tc}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt[2]{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2}$$

3.2. A téridő geometriai leírása, hiperbolikus függvények alkalmazása

Mélyebb elemzés helyett hivatkozom Taylor-Weeler *Téridő-fizika*[12] című könyvére, melyben nagyszerűen levezetik a szerzők, és a geometriáját is jól szemléltetik a Lorentz

[12] Lásd például: http://books.google.hu/books?id=9KfpAy3zEZkC&printsec=frontcover&dq=t%C3%A9rid%C5%91-

transzformációnak, mely sokkal szemléletesebb alakba hozható hiperbolikus függvények használatával. Így a koordinátákra a következő összefüggést kapjuk:

$$x' = x \cosh\Theta - ct \sinh\Theta$$
$$ct' = -x \sinh\Theta + ct \cosh\Theta \qquad (3)$$

Ahol Θ-ra az igaz, hogy

$$\tanh\Theta = \frac{x}{ct} \left(= \frac{v}{c}\right) \qquad (4)$$

Az (1)-es összefüggés kapcsán arról írt **Feynman**, hogy a transzformáció **hasonló a koordináta-elforgatásra vonatkozó transzformációhoz**, hiszen ott „az új x' a régi x-et és y-t kombinálja, hasonlóan az új y' is. Ugyanígy Lorentz-transzformáció esetén olyan új x'-t kapunk, amely x-ből és t-ből, továbbá olyan új t'-t, amely szintén x-ből és t-ből van «összekombinálva». Tehát a Lorentz transzformáció az elforgatáshoz hasonló, csakhogy ez az «elforgatás» *térben és időben* játszódik le."[13] Az (1)-es képletek egy kicsit elrejtik – bár a Lorentz transzformációra invariáns téridő-intervallum[14] már jól mutatta – a (3)-es egyenletekből pedig egészen jól *látható* jellegét a transzformációnak: **a koordinátatranszformáció egy hiperbolán való „forgatást" jelent, nevezhetjük hiperbolikus forgatásnak**, megkülönböztetve a kör- vagy általánosabban elliptikus forgatástól. Az érdekesség az, amire Feynman-idézet is felhívta a figyelmet, hogy **a forgatás nem térbeli, hanem téridőbeli**!

3.3. Hiperbolikus számok használata a téridő leírására

A fentiek nyílegyenest elvezethettek volna a hiperbolikus számok[15] használatához, mégis elég sok idő telt el, amíg a szakirodalomban megjelenik a használatuk[16], lásd például **Francesco Antonuccio**[17], **Francesco és Vincenzo Catoni**[18], valamint szerzőtársaik több cikkét.[19]

A hiperbolikus számok azok a számok, melyek

a + bk

fizika&hl=hu&sa=X&ei=_cPhT6PaEcWr-gbBxOCcAw&ved=0CDkQ6wEwAA#v=onepage&q=t%C3%A9rid%C5%91-fizika&f=false

[13] Feynman, *Mai fizika 2.*, (Relativisztikus mechanika, 15. oldal), Műszaki Könyvkiadó, 1968

[14] Ez a mennyiség a következő, ha csak egy térbeli koordinátát és az időt tekintem: $x^2 - c^2t^2$. Ez az összefüggés ugyanazt az eredményt adja, bármely x'-, y'-s inerciarendszerre térek át, azaz: $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$.

[15] Vagy más néven perplex számok, Lorentz-számok, (angolul még split-complex numbers) és sok más elnevezés bizonyítja, hogy még nincs egységes használatuk.

[16] Történetükről egy rövid áttekintés megtalálható a Wikipedian: http://en.wikipedia.org/wiki/Split-complex_number. Az utóbbi 15-20 év alatt kezdték használni egyre többen.

[17] http://arxiv.org/abs/hep-th/9812036

[18] Néhány link:
http://arxiv.org/abs/math-ph/0508014
http://arxiv.org/abs/physics/0509161

[19] Amikor ezt a cikket elkezdtem írni, még nem olvastam Garret Sobczyk könyvét, melyben már részletesen szó van a hiperbolikus számokról: Garret Sobczyk, New Foundations in Mathematics: The Geometric Concept of Number (Birkhäuser, 2013.) Erről a könyvről írtam előzetest a következő kis cikkemben:
http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/108-k%C3%B6nyv-el%C5%91zetes.html

alakban írhatók fel, ahol ’a’ és ’b’ valós számok, k-ról pedig csak annyit tudok, hogy nem egyenlő ±1-gyel, és

$$\mathbf{k^2 = 1}$$

Ezek a számok[20] a komplex számokhoz hasonlóan egy számsíkon ábrázolhatók, és a komplex számok trigonometriai alakjához nagyon hasonló alakban írhatók fel:

$$a + bk = \sqrt[2]{a^2 - b^2}\,(\cosh\Theta + \boldsymbol{k}\sinh\Theta)$$

Ahol Θ -ra az igaz, hogy

$$\tanh\Theta = \frac{b}{a}$$

Nevezzük a hiperbolikus számok fenti leírását trigonometrikus alaknak. Erre nem csak a komplex számok analógiája ad okot, de a trigonometrikus és hiperbolikus függvények ismert összefüggései is:

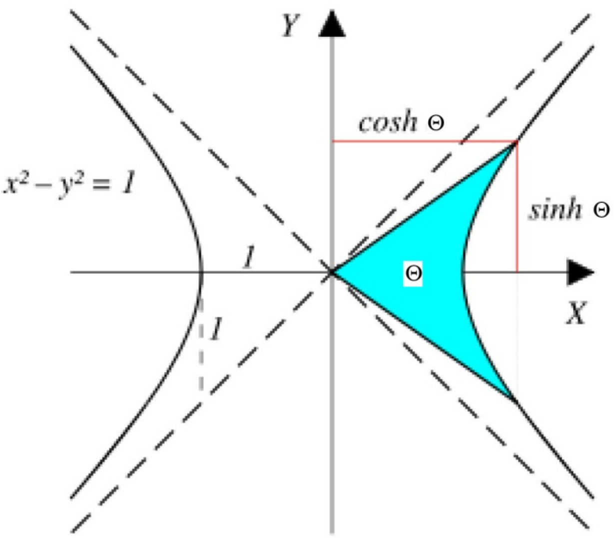
$\sinh\Theta = -i\,\sin i\Theta \quad és \quad \sinh i\Theta = i\,\sin\Theta$

$\cosh\Theta = \cos i\Theta \qquad és \quad \cosh i\Theta = \cos\Theta$

Azok a számok, melyekre

$$\sqrt[2]{a^2 - b^2} = \rho \tag{5}$$

egy olyan hiperbolán helyezkednek el, mely a számsík vízszintes, azaz a valós számokat tartalmazó tengelyét a ±ρ pontban metszik, ha ρ^2=1, akkor az úgynevezett egységhiperbolán helyezkednek el.



[20] **Catoni** cikkeiben az általam **k**-val jelölt számot **h**-val jelölték, feltehetően a hiperbolikus jellegre utalva. Én azért jelöltem k-val, mert a -1 gyökét jelölő ’i’ betűt az ábécében a ’j’ és a ’k’ követi, így arra gondoltam, hogy $\mathbf{i^2=-1, j^2=0, k^2=1}$ könnyen megjegyezhető jelöléssel sorolja fel a kételemű számok másodfokú alap-elemeit.

Ezekre a számokra is lehet exponenciális függvényt definiálni, majd exponenciális alakra hozni a komplex számokhoz nagyon hasonlóan:

$$a + bk = \rho\, e^{\Theta k}$$

Ahol

$$\rho = \sqrt[2]{a^2 - b^2} \quad \text{és} \quad \tanh\Theta = \frac{b}{a}$$

A hiperbolikus számok legfontosabb tulajdonságai megtalálhatóak a *Kételemű számok összehasonlítása* című cikkemben[21].

Itt két nagyon fontos tulajdonságát emelném ki a hiperbolikus számoknak:

- Két hiperbolikus szám szorzásakor – a fenti egyenletekben alkalmazott jelöléseket használva – a ρ-k szorzódnak, és a Θ-k összeadódnak, azaz a **hiperbolikus számok szorzásának egy olyan geometriai transzformáció felel meg, ahol a hiperbolikus forgatást nyújtással kombináljuk**, hasonlóan a komplex számokhoz, ahol a szorzás képe körön való elforgatás és nyújtás.
- A fenti ábra I. sík-negyedében[22] ρ-ra – a komplex számsíktól *eltérően* – a következő háromszög-egyenlőtlenség igaz:

$$\boldsymbol{\rho_{z+v} \geq \rho_z + \rho_v}$$

ahol ’z’ és ’v’ hiperbolikus számok az I. sík-negyedben.

E számok relativitáselméletbeli használhatóságát a már említett **Catoni**[23] és szerzőtársainak cikkei írják le, ezekből a leírásokból nem idézek, mert a későbbiekben tárgyaltak miatt csak egy lényeges dologra van szükségem a hiperbolikus számsíkot tekintve: ha a teret leszűkítem egyetlen dimenzióra, akkor **a hiperbolikus számsík a téridő geometriáját és topológiáját ábrázolja nagyon szemléletesen**. A számsík **egyik koordinátatengelye tekinthető az időkoordinátáknak, a másik koordinátatengely – az egyszerűség kedvéért egyetlen dimenzióra szűkített – térkoordinátáknak**.

Ezzel a geometriai ábrázolással érthetőbbé válik a 2. pontban leírt időtágulás (idődilatáció) és az ezzel együtt járó térvesztés dimenzionális jellege. Ez alatt azt értem, hogy a tér nem idővé „alakul át”, hanem a speciális értelemben, de *valóságosan* négydimenziós jelenség „látószöge” változik; kevesebbet „látok” az egyik térdimenzióból, és többet az adott inerciarendszer idődimenziójából.

4. A matematika új arcának körvonalai a XXI. század elején

A többelemű számok már régóta ismertek és tanulmányozottak – kvaterniók, Cayley-számok, hiperkomplex számok stb. – azonban érdekes módon az általam kételemű számoknak nevezett számok jelentőségének felismerése hosszú ideig a komplex számokra korlátozódott. A hiperbolikus számok relativitáselméletbeli alkalmazhatóságában az első igazi fellendülést az elmúlt 20-30 évben láttam a szakirodalomban, bár nem foglalkoztam komolyan a téma történetével. A hiperbolikus számok alkalmazhatóságának azonban két komoly akadálya van. Egyrészt a hiperbolikus számok, mint téridő

[21] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/15-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-alap-tulajdons%C3%A1gainak-%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.html
[22] Azaz olyan hiperbolikus számokra, melyeknél a+bk esetén a≥0 és a>b.
[23] Lásd a 18. lábjegyzetben idézett cikkeket.

modell[24] nagyon szemléletesek, ha a térnek csak az egyik dimenzióját használjuk, de a négydimenziós téridő modelljeként nem látszik még a használhatóságuk módja. Másrészt a hiperbolikus számsík analízise kidolgozatlan, szemben a komplex számok gazdag függvénytanával. A parabolikus számok használatára eddig csak, mint az egyik legegyszerűbb nem triviális szupertér[25] példájaként akadtam, szerintem a valószínűség-számításban lehetnek kulcsfontosságúak, és így a fizika szinte valamennyi jelentős területén.

4.1. A hiperbolikus számok, mint a kételemű számok egyike

Amint a *Kételemű számok és a geometria*[26] című korábbi cikkemben írtam, a kételemü számok alatt azokat a számokat értem, amelyek

$$a+b\mathbf{w}$$

alakban írhatóak, ahol 'a' és 'b' valós számok w-re pedig az igaz, hogy

$$\mathbf{w^2=-1 \text{ vagy } 0 \text{ vagy } +1}$$

és $w^2=1$ esetén w nem azonos a valós ±1-gyel, valamint $w^2=0$ esetén w nem azonos a valós 0-val. A szakirodalom ezeket a számokat **komplex**, **Study-féle**[27] vagy **duális,** illetve **hiperbolikus** vagy pl. **perplex számok**nak nevezi.

Amint korábban a 20. lábjegyzetben megjegyeztem, a $w^2=1$ esetben w-re a 'k' jelölést, $w^2=0$ esetben w-re a 'j' jelölést alkalmazom, egyszerűen azért mert a -1 gyökét jelölő 'i' betűt az ábécében a 'j' és a 'k' követi, így $\mathbf{i^2=-1,\ j^2=0,\ k^2=1}$ könnyen megjegyezhető jelöléssel sorolja fel a kételemű számok másodfokú alap-elemeit

Ezek közül a számok közül a komplexek jól ismertek, a hiperbolikus számokat vázoltam már a 3.3. pontban, illetve irodalmukra is tettem utalást.

Érdemes néhány szót ejteni a parabolikus számokról is.

4.2. A parabolikus számok, mint a kételemű számok egyike

Parabolikus számok alatt azokat a számokat értem, amelyek

$$a+b\mathbf{j}$$

alakban írhatóak, ahol 'a' és 'b' valós számok j-re pedig az igaz, hogy

$$\mathbf{j^2= 0}$$

és j nem azonos a valós 0-val. Számsíkjuk matematikája még a hiperbolikus számsíknál is kidolgozatlanabb. Most csak a legelemibb összefüggéseket fogom megemlíteni, melyek legfontosabb tulajdonságai szintén megtalálhatóak a *Kételemű számok összehasonlítása*[28] című cikkemben.

---

[24] Nem csak téridő modellként használatosak, de a fizika más területén is pl. http://arxiv.org/pdf/0709.3242v1.pdf , http://arxiv.org/pdf/hep-th/9812036v1.pdf,

[25] Lásd a definícióját a Wikipédiában: http://hu.wikipedia.org/wiki/Szupert%C3%A9r , és a Grassmann számokat szintén ott: http://hu.wikipedia.org/wiki/Grassmann-sz%C3%A1m

[26] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/20-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-%C3%A9s-a-geometria.html

[27] Eduard Study, http://en.wikipedia.org/wiki/Eduard_Study

[28] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/15-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-alap-

A komplex, és a hiperbolikus számokhoz hasonlóan a parabolikus számok is felírhatóak egy trigonometrikusnak nevezhető alakban:

$$a + b\boldsymbol{j} = \sqrt[2]{a^2}\,(\operatorname{cosp}\Theta + \boldsymbol{j}\operatorname{sinp}\Theta)$$

Ahol Θ -ra az igaz, hogy

$$\operatorname{tanp}\Theta = \frac{b}{a}$$

Ezekre a „parabolikus szögfüggvényekre” a következők igazak:

$$\operatorname{cosp}\Theta\boldsymbol{j} = 1$$

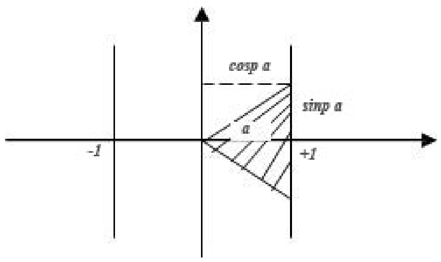
$$\operatorname{sinp}\Theta\boldsymbol{j} = \Theta\boldsymbol{j}$$

Valós x értékekre is definíció szerint:

$$\operatorname{cosp} x = 1$$

$$\operatorname{sinp} x = x$$

$$tanp\ x = x$$



Itt is definiálható exponenciális függvény, és ennek alapján a szám exponenciális alakra hozható:

$$a + b\boldsymbol{j} = \rho\, e^{\Theta \boldsymbol{j}}$$

Ahol

$$\rho = \sqrt[2]{a^2} \quad , \quad \operatorname{tanp}\Theta = \frac{b}{a} \quad \text{és általában} \quad e^{\Theta\boldsymbol{j}} = 1 + \Theta\boldsymbol{j} \qquad (6)$$

Itt is két nagyon fontos tulajdonságát emelném ki a parabolikus számoknak:

- Két parabolikus szám szorzásakor – a fenti egyenletekben alkalmazott jelöléseket használva – a ρ-k szorzódnak, és a Θ-k összeadódnak, azaz a **parabolikus számok szorzásának egy párhuzamos egyenes-pár egyikén való eltolás, mint geometriai transzformáció felel meg, esetlegesen nyújtással kombinálva**. Mivel a **párhuzamos egyenes-pár egy elfajult parabola**, ezért nevezem én ezt az eltolást **„parabolikus forgatásnak”**.
- A parabolikus számsík pozitív valósakat tartalmazó síkfelében – a komplex, és a

tulajdons%C3%A1gainak-%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.html hiperbolikus számsíktól *eltérően* – a következő háromszög-egyenlőtlenség igaz:

$$\boldsymbol{\rho}_{z+v} = \boldsymbol{\rho}_z + \boldsymbol{\rho}_v$$

ahol 'z' és 'v' parabolikus számok.

4.3. A kételemű számok és a geometriák

Az itt következők részletesen szerepelnek a „*Kételemű számok és a geometria*"[29] című cikkemben.

„*A kételemű számok alaptulajdonságainak összehasonlítása*"[30] című anyagban már írtam arról, hogy e számok összeadásának síkbeli képe vektorok összeadása, tehát a paralelogramma-szabályt követi. Írtam ugyanitt arról is, hogy az azonos előjelű, valós abszolút-értékű kételemű számokra felírható háromszög-egyenlőtlenségeknek érdekes az eltérése:

1. $\|\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2}\| \leq \|\mathbf{z_1}\|+\|\mathbf{z_2}\|$

   a **komplex** számoknál az egész számsíkon,
2. $\|\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2}\| = \|\mathbf{z_1}\|+\|\mathbf{z_2}\|$

   a **parabolikus** számoknál a számsík azon felén, melyekre a szám valós része nem negatív,
3. $\|\mathbf{z_1}+\mathbf{z_2}\| \geq \|\mathbf{z_1}\|+\|\mathbf{z_2}\|$

   a **hiperbolikus** számoknál a számsík I. sík-negyedében, tehát azokra a számokra, melyek valós része pozitív, és nagyobb, mint az imaginárius elem valós szorzója.

A fenti összefüggésekben a **||..** ||-vel jelölt normák, vagy abszolútértékek a következők:

1. z = a + b**i** esetén || z || = $\sqrt[2]{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$ a **komplex** számoknál,
2. z = a + b**j** esetén || z || = $\sqrt[2]{\boldsymbol{a^2}}$ a **parabolikus** számoknál,
3. z = a + b**k** esetén || z || = $\sqrt[2]{\boldsymbol{a^2 - b^2}}$ a **hiperbolikus** számoknál.

A komplex számok köréből ismert összefüggés, valamint „*A kételemű számok alaptulajdonságainak összehasonlítása*" című anyagban leírtak szerint:

sin y**i = i** sinh y

sin y**j** = y**j**

sin y**k = k** sin y

Ha egy gömb sugarát R, görbületét ρ-val jelölöm és az arányukra a következő igaz:

1. $\boldsymbol{i = \frac{\rho}{R}}$ a **komplex**, vagy elliptikus esetben
2. $\boldsymbol{j = \frac{\rho}{R}}$ a **parabolikus** esetben (7)
3. $\boldsymbol{k = \frac{\rho}{R}}$ a **hiperbolikus** esetben

akkor ezeken a gömbökön leírt síkgeometria a gömbi, az euklideszi és a hiperbolikus síkgeometria modellje.

---

[29] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/20-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-%C3%A9s-a-geometria.html

[30] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/15-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-alap-tulajdons%C3%A1gainak-%C3%B6sszehasonl%C3%ADt%C3%A1sa.html

Ugyanis ezeken a gömbökön egy r sugarú kör kerületét g-vel jelölve a következőket kapom:

1. Ha **ρ=Ri**
   akkor **g**=2πρ/i sin ir/ρ = **2πρ sinh r/ρ**
2. Ha **ρ=Rj**
   akkor **g**=2πρ/j sin jr/ρ = **2πr**
3. Ha **ρ=Rk**
   akkor **g**=2πρ/k sin kr/ρ = **2πρ sin r/ρ**

Felhasználva azt az abszolút tételt, hogy bármely egyenesvonalú háromszögben az oldalakkal egyenlő sugarú körök kerületei úgy aránylanak egymáshoz, mint a velük szemközti szögek szinuszai, **a fenti összefüggések valóban a hiperbolikus, az euklideszi, és gömbi trigonometriához vezetnek**.[31]

4.4. Rejtett feltételezések Cantor diagonális módszerében

Ez a téma szerepel az egyik korábbi cikkemben[32].

Cantor **aktuális létezőnek** nyilvánította az extenzív értelemben végtelenül nagy számokat, amelyek minden természetes számnál nagyobbak. A korábbi végtelen fogalomtól megkülönböztetve **transzfinit számoknak** nevezte őket. Az a probléma ezekkel a számokkal, hogy kimélyítették a diszkrétség és folytonosság közötti szakadékot. A matematika infinitezimálisokról szóló, évszázadok alatt kidolgozott technikája szilárdnak tűnő hidat épített a diszkrét mennyiségek közé, megteremtve a folytonosság fogalmát. A transzfinit bevezetése épp a fordítottját tette; „szakadékokkal elválasztott”, azaz diszkrét mennyiségek létét definiálta. **Cantor transzfinitjei „megközelíthetetlenek”, mivel egy potenciálisan végtelen számsor előzi meg őket, melynek minden eleme végtelen távol van a transzfinittől**. Cantor nem viszi végig az extenzív végtelenben megtett utat az intenzív végtelen felé is, azaz nem beszél olyan parányokról, amelyek kisebbek az 1/n sorozat minden eleménél, de nagyobbak 0-nál. Nem tette ezt meg, mert ezzel megszüntette volna a folytonosság kiforrott, jól használható fogalmát, hiszen ugyanolyan mély szakadék nyílt volna meg az intenzív végtelenben is, mint az extenzív végtelenben, azaz a számegyenes minden véges pontjában.

Az előbb leírt problémánál nagyobb baj az, hogy rejtett feltételezések vannak a végtelenek, a számosságok és rendezettségek Cantor-i technikájában.

Amikor a valós számok és a természetes számok számosságát hasonlítjuk össze Cantor diagonális módszerével, akkor **két dolgot hallgatólagosan felteszünk**:

- Mint általában az indirekt bizonyítások során; azt gondoljuk, hogy pontosan

[31] Bolyai János komplex *sugarú* gömbön modellezte a hiperbolikus geometriát, én viszont a görbületeket tekintettem imaginárius mennyiségeknek. Az elliptikus – azaz komplex – és a hiperbolikus esetben ez formálisan mindegy, de a parabolikus esetben a sin **j** helyett sin 1/**j**-vel kellett volna számolnom, ez viszont nem meghatározott, szemben a sin **j**-vel, ami elemi összefüggésekből levezethető. Ugyanakkor a 2. összefüggésben az 1/j szintén „határozatlan” kifejezés, mert amint 0-val nem oszthatunk, úgy j-vel sem. Tekinthetjük azonban úgy, hogy (1/j)*j az egyetlen művelet, ami 1/j-vel elvégezhető, és eredményül 1-et kapunk, azaz (1/j)*j=1.

[32] „*Problémák Cantor diagonális módszerének használatában*”; http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/38-probl%C3%A9m%C3%A1k-cantor-diagon%C3%A1lis-m%C3%B3dszer%C3%A9nek-haszn%C3%A1lat%C3%A1ban.html

kizártunk egy harmadik lehetőséget, tehát az állításunk, illetve annak tagadása korrektül megfogalmazott.

- A valós számok helyiértékes ábrázolását egyértelműnek gondoljuk.

A fenti két feltételezések mindegyikével baj van a természetes és a valós számok összehasonlításában:

- Az első feltételezés azért problémás, mert a természetes számoknál a számosság és a rendezettség még ugyanazt jelenti, de ez nem igaz a valós számokra. Tehát az indirekt állítás, miszerint a valós számok leképezhetők a természetes számokra, nem csak azt jelenti, hogy számosságuk azonos, hanem rejtetten azt az állítást *is* megfogalmaztam ezzel, hogy a rendezettségük azonos. Tulajdonképpen **azt állítom az indirekt feltevéssel, hogy a valós számok jól rendezettek**. A Cantor-féle diagonális módszer alkalmazásával nem csak, sőt elsősorban **nem az következik, hogy a valós számok többen vannak, mint a természetes számok, hanem az következik, hogy *nem* jólrendezettek**.
- A valós számoknál a [0,1) intervallumba eső számokat – azaz az 1-nél kisebb pozitív valós törteket és a 0-t – szokták összehasonlítani a természetes számok halmazával, azzal az indokkal, hogyha ezek halmaza nagyobb számosságú a természetes számoknál, akkor a valós számokra is igaz ez. Persze a felhasznált szám-intervallum rendezettsége nem egyezik meg a természetes számokéval, így már itt is csúsztatásról van szó, hiszen fent említettük, hogy a természetes számok rendezettsége és számossága nem szétválasztható fogalom, így rendezettségek összehasonlításáról van tulajdonképpen szó akkor, amikor számosságot szeretnék összehasonlítani. De van itt más baj is. Az **egyértelműség biztosítására a [0,1) intervallumba eső számokból ki kell zárnom azokat, melyek végtelen sok 9-est tartalmaznak, ha a szokásos 10-es számrendszerben gondolkodunk**. És épp **ez a lépés az, amikor rejtett feltételezéssel élek**. Mindenkinek természetes, hogy – egyetlen számpéldán bemutatva – pl. a következő számok egyenlők: 0,4999…= 0,5000… . Valóban egyenlők?[33] **Nem lehet, hogy léteznek olyan parányok, amelyek kisebbek az 1/n sorozat minden eleménél, de nagyobbak 0-nál?** Tulajdonképpen a 9-es „végű” törtszámok kizárása, azaz gondolatban egyenlővé tétele a megfelelő 0 „végű” törtszámmal azt jelenti, hogy **az intenzív végtelen mennyiségeknél kizártam a végtelen infinitezimálisok aktuális létét. Ezzel a kontinuum hipotézis egyik speciális, az intenzív végtelenre átírt[34] fajtáját becsempésztem a feltételek közé**.

4.5. A kételemű számok, mint az extenzív és intenzív végtelenek modelljei

Ebben az írásban nem törekszem arra, hogy a halmazelmélet axiómarendszereit átértékeljem a fentiek ismeretében. Pusztán rá szeretnék világítani néhány fontos következményre, és felvázolni igyekszem azokat a megoldandó feladatokat, és lehetséges útirányokat, amiket a későbbiekben követni érdemes.

[33] A 0,999... = 1 egyenlőséggel kapcsolatos gondolatok, viták, bizonyítások egy tűrhető leírása megtalálható a **Wikipédián**.

[34] Lásd a 4.5.2 pontot.

4.5.1. A kételemű számok és az extenzív végtelen

Ezt a témát már érintettem *„A kételemű számok és a végtelen”*[35] című cikkemben.

Cantor tehát olyan végtelen számokat definiált, melyek a megszámlálhatóan sok természetes számokon túl helyezkednek el, transzfinitek.

A negatív számok gépi ábrázolása adta az ötletet, hogy a végtelen nagy számokat a valós tört számok helyiértékes számábrázolásához hasonlóan írjam fel, például egy speciális végtelen szám a következő helyiértékes[36] alakban írható fel:

…999 (8)

Azaz a **…999** szám esetében megszámlálhatóan sok 9 szerepel az egész számok ábrázolására használt helyiértékeken a 10-es számrendszerben.

Láthatóan semmi mást nem csináltam, mint a valós törtek helyiértékes ábrázolásánál.

Mit tudunk elmondani erről a fenti végtelen nagy számról? Mindenekelőtt azt, amit a valós ’-1’-ről, azaz

$\ldots\mathbf{999}^2=1$ (9)

A fenti egyenlőséget az ember idegenkedve nézi, hiszen azt kaptam, hogy egy végtelen nagy szám négyzete véges nagy. Hasonló történt, mint a gépi számábrázolásban, ott ez az un. túlcsordulás jelensége, és épp ezért alkalmas a véges sok 1-et tartalmazó kettes számrendszerbeli 111…111 a ’-1’ gépi ábrázolására.

Ilyenformán mondhatjuk azt, hogy a (9) egyenletet egy szorzáskor előfordult „túlcsordulás” magyarázza, és akkor áll elő, ha a számábrázolásom nem terjed ki az un. **transzfinit – azaz minden természetes számnál nagyobb –** ***helyiértékek*** ábrázolására. **Cantor** fogalmait használva ez az a végtelen, amit $\mathbf{10^{\mu}}$ formában írhatok fel, ahol **μ** a természetes számok számossága, azaz olyan végtelen, melynek „helyiértékes ábrázolásában” a sorrendben „μ-dik” helyiértéken értékes, azaz nem 0 számjegy áll. Ugyanakkor vannak olyan végtelen nagy számok, melyek minden természetes számnál nagyobbak, de kisebbek a *transzfinit helyiértékeken* is értékes – azaz nem 0 – számjegyeket is tartalmazó számoknál. Ezen számok egyike a (8)-ban megnevezett …**999** szám is, tehát általában azok a számok, melyeknél a transzfinit helyiértéken lévő esetlegesen értékes számjegyekkel nem számolhatok, mert „nincs rá helyem”[37], de tetszőlegesen nagy természetes számhoz tartozó helyiértéken van nem 0 számjegyük..

A …**999** nem adható össze a véges természetes számokkal – különben a negatív számokat ábrázolná – ezért egy betűt használok a jelölésére: ’**k**’.

[35] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/34-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-%C3%A9s-a-v%C3%A9gtelen.html

[36] A végtelen számok helyiértékes ábrázolására találtam példát a szakirodalomban: http://arxiv.org/pdf/1203.4141.pdf

[37] **A „nincs helyem” kifejezés azt tükrözi szemléletesen, hogy a kételemű számoknál az egész számokra csak megszámlálhatóan sok helyiértéken ábrázolható szám jeleníthető meg, ezek tehát elemei a hiperbolikus számsíknak, de a „μ-dik” helyiértéken ábrázolható, illetve az annál nagyobb számok, már nem elemei a számsíknak.**
Azok a számok tehát, melyek leírására a helyiértékes számábrázolásban a transzfinit helyiértékekre is szükség van nem elemei a kételemű számsíkoknak, hasonlóan a projektív geometria ideális térelemeihez.

Ezzel el is jutottam a **hiperbolikus számok**hoz, azaz azokhoz a számokhoz, melyek az alábbi alakban írhatók fel:

x + yk ahol $\mathbf{k^2=1}$

Így a **hiperbolikus számok** azt a fajta végtelent modellezik, amikor ***végtelen* sok olyan végtelen**[38] **nagy szám van, amely egyben a 10^{μ} transzfinit számnál kisebb.** A **k**-val jelölt …**999** aktuálisan létező szám, és valamennyi valós számmal való szorzata ilyen számot ad.

A **parabolikus számok** egy olyan végtelent modellezhetnek, ahol ***egyetlen* olyan végtelen nagy szám van, amely egyben a 10^{μ} transzfinit számnál kisebb.** Ezt a számot is el lehet képzelni helyiértékes alakban, mégpedig …**000** formában, ahol a nullák úgynevezett értékes nullák, mivel a helyiértékek transzfinit tartományában vannak nem nulla számjegyek, de ezek ábrázolására „nincs helyem”. Itt is egyfajta túlcsordulásként képzelem el a …**000** négyzetre emelését, és ezt …**000**^{2}=0-val fejezem ki. Így máris a parabolikus számokhoz jutottunk.

A **komplex számok** pedig azt modellezik, amikor **nincs egyetlen egy végtelen szám sem, amely egyben a 10^{μ} transzfinit számnál kisebb.** Ezt a hiányt az egész számokhoz hasonló módszerrel negatív számmal jellemzem, csak itt egy olyan szám jelzi a hiányt, melynek a négyzete mínusz egy, hiszen a négyzetre emeléssel tudom megjeleníteni a „túlcsordulást”.

A fentiek „értelmességét” az is alátámasztja, ha a projektív geometriát használjuk analógiára, és az ott bevezetett ideális pontokra gondolunk. A projektív geometriában az egyenes ideális pontját sokszor nevezik végtelen távoli pontnak, de az ideális pont elnevezés elterjedtebb. Ennek okára Hajós György is felhívja a figyelmet a „*Bevezetés a geometriába*” című könyvében az ideális térelemekről szóló fejezetben:

> *„Az új térelemek bevezetésekor nem volt szó arról, hogy egy pont vagy egy egyenes minden határon túl eltávolodik. Ha valaki így akarna szemléletes jelentést adni az újonnan bevezetett pontoknak, és egyeneseknek, és azokat «végtelenbe távozott» pontoknak és egyeneseknek látja, akkor jelentős akadályok állják útját a szemléletes kép kialakulásának. Ilyen akadályt jelent az a kijelentés, hogy ha egy egyenesen az egyik vagy a másik irányban «távozik a végtelenbe» egy pont, akkor ugyanahhoz a határhelyzethez jut, s hogy a különböző irányokban «végtelenbe távozott» pontok nem kört, hanem egyenest alkotnak. Jobb tehát, ha lemondunk arról, hogy az újonnan bevezetett pontoknak és egyeneseknek ilyesfajta szemléletes jelentést adjunk. Jobbnak mondhatjuk ezért az ideális pont és ideális egyenes elnevezéseket, mert a «végtelen távoli» jelző zavaros gondolatokra csábíthat. ”*

Hajós György tanácsát én is követhettem volna a kételemű számok, mint végtelen modellek esetében, de szívesebben játszottam el a „végtelen távoli” jelzővel. Ha az ember ismeri a veszélyt, akkor csökken a tévedés kockázata. A kételemű számokhoz eleve azzal a „szentségtörő” gondolattal jutottam el, hogy helyiértékes alakban ábrázoltam a „valós végtelen egész számot”.

Érdemes itt idézni Péter Rózsa „Játék a végtelennel” című könyvének 15. fejezetében szereplő „Írja hadnagy” hasonlatot, aki egy adminisztrációs hibaként megjelent nem-létező ember, de megjelenése után elkezd önálló életet élni. Péter

[38] A „végtelen nagy” itt azt jelenti, hogy minden n természetes számnál nagyobb számról van szó.

Rózsa is eljátszik az ideális pont, mint végtelen távoli pont gondolatával.

Egyúttal érdemes megjegyezni, hogy **a projektív geometria ideális pontjához hasonlóan a kételemű számok imaginárius elemének sem a „végtelen nagy" tulajdonsága van modellezve, azaz nem mennyiségileg, hanem minőségileg van megkülönböztetve a valós számoktól** azáltal, hogy dimenziójában különbözik tőlük.

4.5.2. A kételemű számok és az intenzív végtelen

A „*Problémák Cantor diagonális módszerének használatában*"[39] című cikkemben már utaltam olyan számhalmaz elképzelhetőségére, amelynél 0,999… < 1,000… . Ez az az eset, amikor léteznek olyan számok, melyek 1/n-nél kisebbek minden n-re, de nagyobbak 0-nál. Az extenzív végtelenek esetében adott példához hasonlóan ez úgy képzelhető el, hogy ezek – nevezzük őket transzfinit törteknek – olyanok, hogy a törtszám transzfinit helyiértékein is értékes, azaz nem 0 számjegyek szerepelnek, de ezek ábrázolására „nincs helyem"[40]. Ugyanakkor a 0,999… < 1,000… egyenlőtlenség, és ennek az alábbiakban vázolt következménye megjelenik a törtszám nem transzfinit helyiértékén is. Így ha nem is volt „helyem" a transzfinit helyiértékeken lévő számjegyek ábrázolására, de a 0,999… < 1,000… egyenlőtlenség alkalmas ezen számok *létezésének* modellezésére.

Erre a számhalmazra ugyanaz mondható el, mint amit fentebb a …999 számról állítottam: $0{,}999\ldots^2 = 1$. **Azaz innen, az intenzív végtelenek felöl is eljuthatok a hiperbolikus számokhoz.** A $0{,}999\ldots^2 = 1$ egyenlőség itt is hihetetlennek tűnhet: hogyan lehet egy egynél kisebb szám négyzete 1-gyel egyenlő. A magyarázat hasonló, mint a $\ldots999^2 = 1$ esetében: itt az aktuálisan végtelen parányok „hatása" *nagyítódik fel*, és jelenik meg az eddig már jól ismert valós számok körében.

Az extenzív végtelenhez hasonlóan itt is elmondhatóak a következők:

1. A **hiperbolikus számok** azt a fajta intenzív végtelent modellezik, amikor ***végtelen* sok végtelen kicsi**[41] **infinitezimális szám létezik, amely egyben a $10^{-\mu}$ transzfinit infinitezimális számnál nagyobb.** Például az (1,000… - 0,999…)[42] és egy valós szám szorzata ilyen számot ad.
2. A **parabolikus számok** egy olyan végtelent modellezhetnek, ahol ***egyetlen* olyan végtelen kis szám van, amely egyben a $10^{-\mu}$ transzfinit infinitezimális számnál nagyobb.** Ezt a számot is el lehet képzelni helyiértékes alakban, mégpedig 0,000… formában, ahol a nullák úgynevezett értékes nullák, mivel a helyiértékek transzfinit infinitezimális tartományában vannak nem nulla számjegyek, de ezek ábrázolására „nincs helyem"[43]. Itt is egyfajta túlcsordulásként képzelem el a 0,000… négyzetre emelését, és ezt

[39] http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/38-probl%C3%A9m%C3%A1k-cantor-diagon%C3%A1lis-m%C3%B3dszer%C3%A9nek-haszn%C3%A1lat%C3%A1ban.html

[40] A 37. lábjegyzetben leírtakhoz hasonlóan itt is arról van szó, hogy **a „nincs helyem" kifejezés azt tükrözi szemléletesen, hogy a kételemű számoknál a tört számokra csak megszámlálhatóan sok helyiértéken ábrázolható szám jeleníthető meg, ezek tehát elemei a parabolikus számsíknak, de a „-μ-dik" helyiértéken (a törtszámok „μ-dik" helyiértékén) ábrázolható, illetve az annál kisebb számok, már nem elemei a számsíknak.**

[41] A „végtelen kicsi" itt azt jelenti, hogy minden n természetes számra 1/n-nél kisebb, de a 0-nál nagyobb számról van szó.

[42] Hiperbolikus számsíkon (1-k) szám.

[43] L. a 40. lábjegyzetet.

0,000… ^{2}=0-val fejezem ki. Így máris a parabolikus számokhoz jutottunk.

3. A **komplex számok** pedig itt is azt modellezik, amikor **nincs egyetlen egy végtelen kicsi szám sem, amely egyben a $10^{-\mu}$ transzfinit infinitezimális számnál nagyobb lenne.**

4.6. A kontinuum hipotézis különböző megfogalmazásai

A kételemű számok, mint végtelen-modellek fent vázolt leírása a kontinuum-hipotézist[44] nem tagadja, hanem – a geometriabeli párhuzamossági axiómákhoz hasonlóan – három lehetséges változatát nyújtja a Cantor által megfogalmazott „nincsenek közbülső számosságok” féle állításnak. (A klasszikus kontinuum hipotézis a komplex számsík által modellezhető.) Fontos, hogy a három számsík egyikéhez sem tartozik hozzá aktuális létezőként a 10^{μ} formában felírható nagy szám, ahol μ a természetes számok számosságát jelöli.[45] Aktuálisan létező, tehát a számsíkon konkrét számként megjelenő végtelen, azaz minden n természetes számnál nagyobb szám, mely ugyanakkor definíciója szerint 10^{μ}-nél kisebb végtelen: a *parabolikus számsíkon egyetlen* létezik, a *hiperbolikus számsíkon viszont végtelen sok* van belőle. A *komplex számsíkon pedig nem létezik* konkrét számként megjelenő, azaz aktuálisan létező végtelen nagy szám.

Ilyen módon a háromféle számsík, mint szám-modell megfeleltethető a kontinuummal kapcsolatos állítás egy speciális megfogalmazásának.

Igen nagy előnye ezeknek a modelleknek, hogy a bonyolult rendezési, és kiválasztási definíciók helyett **nagyon szemléletes szám-modelleket adnak**. Igazán használhatóak akkor lesznek ezek a modellek, ha a komplex számok függvénytanához hasonlóan a parabolikus, és a hiperbolikus számsík analízise is elkészül, vagy legalábbis gazdagabb lesz a jelenlegi ismereteinknél. A kevés ismeret alapján is nagyon sok tudott már a két új számsíkról, ezek egyike az, hogy a klasszikus értelemben vett folytonosság nem definiálható rajtuk.

Másik nagy előnyét abban látom ezeknek a szám-modelleknek, hogy **nemcsak a végtelen számosságok jellemzésére használhatóak, de alkalmazhatóak olyan igen nagy, de véges számok esetére is, amikor bizonyos mennyiségi változások[46] minőségi változássá alakulnak**, például a fizikai rendszerek *fázisátalakulásánál*.

4.7. Az extenzív és az intenzív végtelen dualitása

A 4.5 pontból az következik, hogy akár az extenzív, akár az intenzív értelemben aktuálisan létező végtelen egy speciális fajtájának, vagy éppen az aktuális végtelen

[44] Lásd például egyszerű megfogalmazásban a Wikipédiában: „nincs olyan halmaz, amelynek számossága a valós számok számossága (kontinuum-számosság) és a természetes számok számossága (megszámlálhatóan végtelen) közé esne.” http://hu.wikipedia.org/wiki/Kontinuumhipot%C3%A9zis

[45] Arról egyelőre nincs szó, hogy *potenciális létezőként* hozzá lehet-e rendelni a számsíkhoz egyetlen *határozatlan* végtelent, ahol a *határozatlanság* alatt a végtelen potencialitását értem, ahogy a komplex számsíknál is definiálnak ilyen végtelent.

Ismét érdekes a geometriai párhuzam: a sík-geometriák is csak nyílt felületen modellezhetők ellentmondásmentesen.

[46] A mennyiségi változások *számának határozatlansága* teszi hasonlóan kezelhetővé a természetes számok *potenciális végtelenségéhez*. Mondhatom például azt, hogy „megfelelően nagy” N-re 10^N már nem eleme a szám-modellnek, mert 10^N „jóval nagyobb” annál a mennyiségnél, amelynél a minőségi változás bekövetkezik. Kérdés, hogy miben különböznek azok a változások, melyek a hiperbolikus számsíkon modellezhetők azoktól, melyek a parabolikus, vagy az elliptikus számsíkon.

hiányának a modellezésére alkalmasak a kételemű számok, ezért mondhatjuk azt, hogy a **számmodell nem tesz különbséget a végtelen extenzív és az intenzív volta között**, a végtelen legalapvetőbb tulajdonságát, a – klasszikus értelemben vett – megközelíthetetlenséget ábrázolja.

4.8. A határérték és a folytonosság kérdése

Többször utaltam arra, hogy a háromféle számsíknak csak egyikén, a jól ismert komplex számsíkon definiálható hagyományos konvergencia és folytonosság. A parabolikus és a hiperbolikus számsíkon hagyományos értelemben csak a kételemű szám egyes elemeinek – vagy vektorként kezelve a koordinátáik – konvergenciájával definiálható a határérték klasszikus fogalma. Ezeken a számsíkokon a számpontok különbség-vektora általánosított abszolútértékének, vagy mértékének nullához tartásából nem következik a koordináták konvergenciája. Fordítva igaz az állítás, azaz a koordináták konvergenciájából már egyértelműen következik a különbség-vektor mértékének 0-hoz tartása.

4.8.1. Metrika definiálása a kételemű számsíkokon először

A klasszikus metrika definíció a következő

$$\begin{aligned} &a) \quad 0 \le \rho < \infty\,,\ \rho(x,x) = 0 \\ &b) \quad \rho(x,y) = \rho(y,x) \\ &c) \quad \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) \\ &d) \quad \rho(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

Ha c)[47] egyenlőtlenség csak a komplex számsíkra igaz, a parabolikus sík pozitív valós síkfelében egyenlőség áll fenn, a hiperbolikus számsík azon síknegyedében, ahol a valósak pozitívak, és x>y ott az egyenlőtlenség megfordul. A d) is csak a komplexek körében igaz.

4.8.2. Metrika definiálása a kételemű számsíkokon másodszor

A kételemű számokon a fenti metrika a), b), és c) pontja szerint tudok definiálni félmetrikus teret. (A c)-nek megfelelő definíciót még mérlegelni kell, de a számsíkok eddigi vizsgálata bíztató.)

Félmetrikus térből kiindulva és az ekvivalencia-osztályokra áttérve, metrikus térhez jutunk.[48] Ezt a félmetrikus teret adó parabolikus, és hiperbolikus számsíkon is megtehetem:

$$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0$$

A fenti csak akkor használható, ha a számsíkok ideáljain a metrikát 0-nak, és nem j-nek definiálom. Ez még megfontolást igényel, mert a j-vel való definiálás sok szempontból jobbnak tűnik.

A parabolikus síkon az ekvivalencia-osztályok az y tengellyel párhuzamos egyenesek. A hiperbolikus síkon viszont gond van: egy adott valós számból kiindulva – az ehhez „illeszkedő" ideálok és hiperbola-seregek tekintetében az ekvivalencia-osztályoknál érvényesül a tranzitivitás, és diszjunkció, de az egész síkra nincs olyan ekvivalencia osztály besorolás, hogy a metrika d) tulajdonsága

[47] A metrikák jelentése a különböző számsíkokon a 4.3 pontban a 11. oldalon található.
[48] Császár: Bevezetés az általános topológiába, 35. oldal.

érvényesüljön, és a felosztás diszjunkt halmazokat eredményezzen, tranzitív tulajdonsággal egy adott elem tartalmazására. (Pl. az origó, azaz a 0 számelem a 2+2k számtól 0 távolságra van, viszont a 4 valós szám is 0 távolságra van 2+2k-tól, de a 0 számelemtől a távolsága 4.)

4.8.3. Általánosított metrika fogalom

Egyelőre több megoldás körvonalazódik, végig kell gondolni mindegyiket.

5. A XXI. századra megérlelődött gyümölcs: a téridő új szemlélete

5.1. A tér, mint a végtelen idő

A téridő hiperbolikus függvények használatával történő ábrázolásában a következő összefüggést kaptam a koordinátákra[49]:

$$z' = z\ \cosh\Theta - ct\ \sinh\Theta$$

$$ct' = -z\ \sinh\Theta + ct\ \cosh\Theta$$

Ahol Θ tangenshiperbolikus függvénye egy sebesség-jellegű mennyiség. A „nem vesszős” koordinátarendszerből nézve a „vesszős” koordinátákkal jelölt rendszer sebességét ν-vel jelölve igaz, hogy:

$$\tanh\Theta = \frac{z}{ct} = \frac{v}{c}$$

Ahol tehát ν=z/t a két koordinátarendszer relatív sebessége.

Válasszuk meg úgy a mértékegységeket, hogy a c fénysebesség legyen 1-gyel egyenlő, így:

$$\tanh \Theta = \nu$$

Ahol most már a ν sebesség mértékegység nélküli szám, a fénysebesség ν-szeresét jelöli.

Mivel a Θ-ra a következő igaz a hiperbolikus számsíkon:

$$\tanh \Theta = y/x$$

A fentiekből következik, hogy a Lorentz transzformáció hiperbolikus számsíkbeli modelljében

$$\nu = y/x$$

Ahol ν sebesség-jellegénél fogva az y koordinátatengelyt képzelhetjük – az egydimenziósra szűkített – tér dimenziójának, és az x koordinátatengelyt gondolhatjuk az idő megfelelőjének.

A Lorentz transzformáció modellezése hiperbolikus számokkal arra az érdekes következtetésre vezetett, hogy a hiperbolikus szám valós része az idő-dimenziónak,

[49] Természetesen akkor, ha a teret leszűkítem egyetlen dimenzióra. A térbeli kiterjedést azért jelöltem z-vel, mert a későbbiek x- és y-nal jelölöm a hiperbolikus számsík koordinátatengelyeit.

az imaginárius része pedig a tér-dimenziónak az ábrázolása.[50] A hiperbolikus számok és a végtelen kapcsolatából a 4.5. pontban írtam le, ebből következik, hogy **a tér végtelen időként fogható fel**.

A kételemű számok és a véges/végtelen viszonyának értelmében a három számsík mindegyikén az x tengely az eddig valós számoknak nevezett számok számegyenese, az y tengely pedig, mint számegyenes azokat a számokat tartalmazza a parabolikus és a hiperbolikus síkon, melyek 10^{μ}-nél kisebbek, de minden természetes számnál nagyobbak, vagy $10^{-\mu}$-nél nagyobbak, de minden valós törtnél kisebbek, a komplex számsíkon pedig az y tengely az ilyen típusú számok hiányát jelöli.

Így a téridő és a hiperbolikus számsík-modell kapcsolata alapján mondhatjuk azt, hogy a – kontinuum számosság és a megszámlálhatóan sok „közé” eső számosságú – végtelen idő jelenik meg térként.

Az előző bekezdésben azért tettem idézőjelbe a „közé” szót, mert a 4.5 pontban leírtak alapján a számmodellek nem tesznek különbséget a végtelen extenzív és az intenzív volta között, így az ábrázolt számoknál nem dönthető el, hogy a távolságuk végtelenül nagy, vagy végtelenül kicsiny. Azaz a számsík számainak rendezettsége nem adható meg egyértelműen.

5.2. A téridő új szemléletének következményei

Egyelőre csak vázlatosan a következőkben foglalhatjuk össze a végtelenek újfajta számmodelljei és ezek téridő kapcsolatának következményeit:

1. A valós terünk geometriájának – a három tér-dimenziót egy dimenzióra szűkítve vett – egyszerű modellje lehetnek a hiperbolikus számok.
2. A hiperbolikus számsíkon az y koordinátatengelyt képzelhetjük – az egydimenziósra szűkített – tér dimenziójának, és az x koordinátatengelyt gondolhatjuk az idő megfelelőjének.
3. A fenti általánosításaként elmondhatjuk, hogy a kételemű számok számsíkjai a téridő egyfajta geometriáját modellezik, ahol az x tengelyen mindig az idő van ábrázolva, az y képzetes tengely pedig térdimenzió.
4. A kételemű számok egyúttal a végtelenek modellje is, így a tér az idő végtelenjének képe.
5. A kételemű számok, mint végtelen-modellek a kontinuum-hipotézis három lehetséges változatát nyújtják.

Az einsteini relativitáselmélet és a kvantumfizika egyesítésének az az alapvető akadálya, hogy a relativitáselmélet egy **háttérfüggetlen** leírás, ami azt jelenti, hogy a tér és az idő dinamikusan változik az anyagtól függően, míg a kvantumfizika eseményei egy időben változatlan geometriájú klasszikus téridő hátterén íródnak le. A fenti probléma megoldásához fogódzót jelenthetnek a kételemű számok, hiszen ezek egyike; a hiperbolikus számsík a speciális relativitáselméletbeli téridő geometriájának topológiáját

[50] Ez látszólagosan ellentmondásban van a 4. oldalon az első bekezdésben leírtakkal; azaz azzal, hogy a múlt és a jövő csak potenciálisan létezik. Az ellentmondás pszeudo jellege alatt azt értem, hogy mivel az idő valójában bennünk zajlik (lásd az 1. pontot), tulajdonképpen szerves részünk, így valóságos léttel bír számunkra. A tér az, ami képzetes, azaz leképződik ránk, de kívül van. Nem véletlen, hogy van olyan filozófiai irányzat – a szolipszizmus – mely szerint minden létező csak a tudatom terméke, rajtam kívül nincs létező. Ennek a szemléletnek épp a tér imaginárius volta az oka.

ábrázolja nagyon szemléletesen. A kvantumfizikában pedig a komplex számoknak meghatározó a szerepük a valószínűségi amplitúdók leírásánál. Ha a komplex számsíkot is a tér és az idő egyfajta topológiai modelljének tekintem, akkor – elrejtve a valószínűségi amplitúdókban – egyáltalán nem a klasszikus teret és időt kapjuk háttérként a kvantumfizikában sem. A harmonizáláshoz végig kell még gondolni, hogy a kvantumfizikában miképpen vonható össze a klasszikus tér és idő, mint háttér a valószínűségi amplitúdóban rejlő dinamikus téridő-topológiával.