Tér és idő helyett téridő a valószínűségszámításban

Kételemű számok, mint téridő-elemek a valószínűségszámításban

1. Bevezető gondolatok

Néhány hete olvastam egy cikket az ÉS-ben; *„A politikában nem a valószínűségek döntenek*”[1] címmel. A cikk egy szociológussal készített interjú, és elsősorban az Európai Unió jelenlegi helyzetéről és jövőjéről szól. Nem ez a cikk adta írásom apropóját, de akár adhatta volna, ugyanis a cikk a fő mondandóján kívül azt is érzékelteti, hogy mennyire nem értik a valószínűségszámítás matematikáját még azok sem, akiknek munkaeszköze. Nem figyelnek oda azokra a forradalmi változásokra, melyek jelenleg a valószínűségszámítás módszertanát érintik.


„A politikában nem a valószínűségek döntenek”

A témával kapcsolatban alapvető problémának érzem, hogy nem vesszük elég komolyan a több mint száz éve tudottakat a téridőről, arról, hogy a tér és az idő nem önmagukban külön-külön létező entitások, csak együtt létezhetnek, az egyik változása magával vonja a másik változását. Sok tudományterület figyelmen kívül hagyja mindezt, közöttük a kiemelkedően fontos valószínűségszámítás is, és ennek eredményei illetve ellentmondásai áthatják a tudomány egészét. A tér és az idő egymástól függő változásának felismerése a speciális relativitáselmélettel kezdődött, de kevésbé tudott, hogy a kvantummechanikában – továbbiakban QM – a komplex számok használatának is az az oka, hogy a változások téridőben történnek, és nem az abszolút tér és az abszolút idő hátterén írhatóak le az események. Közel száz évnek kellett eltelnie, hogy megjelenjen a gondolat; a QM-beli valószínűségszámítás módszertana általánosan kötelező minden valószínűségszámításban, de nem úgy, ahogy kezdetben néhányan gondolták. Ennek az új felismerésnek az első lépcsője az volt, amikor néhány éve – elsősorban **Andrei Khrennikov**[2] írásaiban – megjelent a hiperbolikus QM lehetősége. Ennek az elképzelésnek a tovább gondolásával tudtam levezetni, hogy a parabolikus QM alap-összefüggései a klasszikus valószínűségszámítás alapműveleteivel egyeznek meg.[3]

---

[1] *„A politikában nem a valószínűségek döntenek – Bruszt László szociológussal Rádai Eszter készített interjút*”, Élet és Irodalom, LX. évfolyam, 34. szám, 2016. augusztus 26. 7. oldal; http://www.es.hu/radai_eszter;8222;a_politikaban_nem_a_valoszinusegek_dontenek8221;;2016-08-25.html

[2] Lásd például **Adrei Khrennikov**, *„Hyperbolic quantum mechanics*” című írását; http://arxiv.org/abs/quant-ph/0101002

[3] Lásd például *„Széljegyzetek Andrei Khrennikov hiperbolikus kvantummechanikájához*” című cikkemet; http://www.infinitemath.hu/egyeb/201-szeljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanikajahoz

2. A valószínűségszámítás és a téridő

Hasonlóan a relativitáselmélet és a QM egységbe foglalási próbálkozásához sok kísérlet történt a QM-beli valószínűségszámítás módszertanának és a klasszikus valószínűségszámításnak az ötvözésére. Ezen egységesítési kezdeményezésektől alapvetően különbözik az, amit a kételemű számok valószínűségszámításban betöltött szerepe, és a téridőt modellező funkciója sugall. A kételemű számok jelenleg elsősorban az eltéréseket szemléltetik mind a valószínűségszámítási, mind a téridő modellek között. E modellek igazi egységesítése a kételemű számok közös keretrendszerbe foglalását igényli, tehát egy olyan számrendszerét, melynek a kételemű számok valamiféle egység-elemei. Magyarán szó nincs arról, hogy egy relativisztikusan kovariáns kvantumelméletet hozzunk létre, vagy a klasszikus valószínűségszámítás módszerét a kvantumos valószínűség-kalkulációk valamiféle határátmeneteként gondoljuk el. A kvantumjelenségek egy, a speciális relativitáselmélet téridejétől eltérő téridőben zajlanak. Az előbbiek téridő-metrikája euklideszi, pontosabban komplex, az utóbbi téridejében az intervallum-invariáns a hiperbolikus számoké. A valószínűségszámítás és a kételemű számok kapcsolata hasonló összefüggéseket feltételez.

Összefoglalom; miképp is szeretném ötvözni a valószínűségszámítást egyfajta téridő fogalmával. Előbb a legfontosabb okokat sorolom fel:

- **A kételemű számok használata alapvető fontosságú a valószínűségszámításban**.
  - A *QM* komplex változós valószínűségi amplitúdói, és ezek összegzése a komplex számsík számvektorainak összegzési szabályát követi.
  - **Andrei Khrennikov** több írásában foglalkozik egy általa *hiperbolikus kvantummechanikának* nevezett területtel, melyben a valószínűségi amplitúdók a hiperbolikus számvektorok összegzési szabályai szerint adódnak össze. Szerintem ezek a hiperbolikus valószínűségek az információs folyamatokat jellemzik. Egyelőre ez még feltáratlan terület, kevesen ismerik, és közülük is többen kétségbe vonják ennek a hiperbolikus QM-nek a használhatóságát.[4]
  - A parabolikus – vagy jelenleg ismertebb nevén duális – számok, mint valószínűségi amplitúdók összegzéséből a klasszikus valószínűségek összegzési szabályához jutunk. Erről korábbi cikkeimben írtam már.[5]

  Összegezve elmondható tehát, hogy **a két jelenleg használt valószínűségszámítás** – a klasszikus, és a QM-beli – **kételemű számok használatával írható le**. Vannak továbbá olyan tudományterületek, ahol e két valószínűségi módszertan nem működik. Ilyen esetekben esélyesnek látszik a hiperbolikus számokkal jellemezhető probabilisztikus modell használata.

[4] Az írásom elején említett ÉS-beli cikkben idézett szociológus épp azért vont le hibás következtetéseket a valószínűségszámítással kapcsolatban, mert nem ismeri a hiperbolikus valószínűségszámításnak a módszertanát. Mentségére szóljon, hogy amint említettem; kevesen ismerik, és nemcsak a kidolgozatlansága miatt, de a téma viszonylagos újdonsága okán is. Akik találkoztak már ezzel az új elképzeléssel, azok először visszariadnak a hiperbolikus valószínűségszámításban előforduló negatív valószínűségek lehetőségétől. Jobban belegondolva viszont örömmel fogadja az ember az új matematikát, hiszen megfelelő eszköz lehet azoknak a folyamatoknak a leírásánál, ahol nem érvényesülnek sem a klasszikus, sem a QM-beli valószínűségszámítás előrejelzései. Ilyen terület lehet a politika is. Az ÉS-beli cikk címe helyesebben így szólhatna; „A politikában nem az ismert valószínűségi modellek használhatóak".

[5] Lásd a 3. lábjegyzetben idézett cikket.

- A **kételeműek** képzetes elemei egyfajta **kvalitatív végtelent modelleznek**, mégpedig a kontinuum hipotézist és annak két másik alternatíváját, azaz **Cantor** nyomán a megszámlálható sok és a kontinuum sok közötti végtelenek létének/nem-létének eseteit ábrázolják.

- Mivel az egyik kételemű számfajta – **a hiperbolikus számsík** – az einsteini **téridőt modellezi**, ha a teret leszűkítem egy dimenzióra, így az a következtetés vonható le, hogy **a tér végtelen idő**, a végtelennek az előbbi értelmében.[6]

  Nemcsak a nem-euklideszi téridőnk, de egy euklideszi téridő is modellezhető az egyik kételemű számfajtával, mégpedig a parabolikus (duális) számsíkkal. Így szerintem jogosan **feltételezzük, hogy mindhárom kételemű számfajta egy-egy speciális téridő topológiáját modellez**.[7]

A fentiek értelmében a lehetséges és egymást kizáró események valószínűségeinek összegzése olyan kételemű számok összegzését jelenti, melyek normanégyzetének összege 1-gyel egyenlő. A tapasztalat által megerősített valószínűségeket ezek a normanégyzetek jelentik minden esetben, és nem a kételemű számmal kifejezhető – most már nevezzük így a QM-nek megfelelően – valószínűségi amplitúdók. **Nagyon elgondolkodtató az a tény, hogy ezek a valószínűségi amplitúdók viszont a téridőt modellezik.** Így ez a szemlélet választ ad arra a kérdésre, hogy van-e egyáltalán jelentése maguknak a valószínűségi amplitúdóknak, ha a valószínűségek csak ezeknek az amplitúdóknak a normanégyzetéből számolhatóak. A válasz az, hogy **ezek a valószínűségi amplitúdók valamiféle lokális téridő vektort kapcsolnak az eseményekhez**. Ezeknek a téridő-vektoroknak a normanégyzetével kapcsolatban pedig nem szabad elfeledni az adott téridőre jellemző mérték-invarianciát.

Arra kell tehát gondolnunk, hogy a valószínűségszámítás korrekt leírása nem egyfajta időbeli gyakoriságról, sem valamilyen térbeli előfordulásról szól, hanem az események térben és időben, azaz téridőben való előfordulásáról. Okkal gyanakodhatunk arra is, hogy az eddigi klasszikus valószínűségszámítási módszerek paradoxonjai abból származhatnak, hogy matematikájuk a valós számokon alapszik, és nem a parabolikus (duális) számokon, melyek tulajdonságai sok tekintetben megegyeznek a valós számokéval, de el is térnek tőlük. A legfontosabb eltérések a konvergencia és a folytonosság kérdéseit érintik. **A valós számok használata a parabolikus számok helyett azt jelenti, hogy az eseményeknek csak egydimenziós – időbeli (gyakoriság) – viszonylataira vonatkozik a valószínűségszámítás, holott az események mindig téridőben zajlanak.** Meg kell jegyezni, hogy a parabolikus számok használatával továbbra is megmarad a klasszikus valószínűség értelmezésének szoros kapcsolata a pusztán időbeliséget takaró gyakoriság fogalmával, hiszen a parabolikus számok normája[8] olyan valós szám, mely csak a szám „idő-koordinátáját" tartalmazza. Ez az

[6] A kételemű számok minőségi végtelenként való értelmezéséhez lásd például a „*A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen*" című cikket; http://www.infinitemath.hu/matematika/199-a-geometriai-algebraban-rejtozkodo-vegtelen

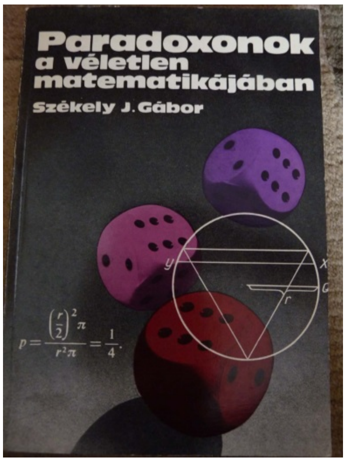
[7] Végre találtam két olyan cikket – forrásuk nyomán több hasonlót – melyekben felmerül a komplex egység és az időfogalom szoros kapcsolata a kvantummechanikában; a kvantumgravitációval és a kvantumkozmológiával kapcsolatban. Távolról sem azonosak ezek az elképzelések az általam vázoltakkal, ennek ellenére nagyon fontosak számomra. Egyrészt különbözőségük ellenére megerősítik a bennem kialakult modellt, hiszen kapcsolatba hozzák a képzetes i számot egy olyan fizikai fogalommal, mint az idő. Másrészt az eltérő okfejtést olvasva újra vizsgálhatom, ellenőrizhetem a saját elképzeléseimet. A két cikk gondolatmenetére ki fogok térni egy másik írásomban, előzetesként az elérhetőségük a következő:
http://www.platonia.com/complex_numbers.pdf és https://arxiv.org/pdf/1111.0457v1.pdf

[8] A parabolikus – vagy más néven duális – számok normájának definícióját és alaptulajdonságait lásd a 3. lábjegyzetben szereplő cikk 1. Mellékletét.

összefüggés rejthette el eddig a kételemű parabolikus számok használatának szükségességét a klasszikus valószínűségek számításainál.

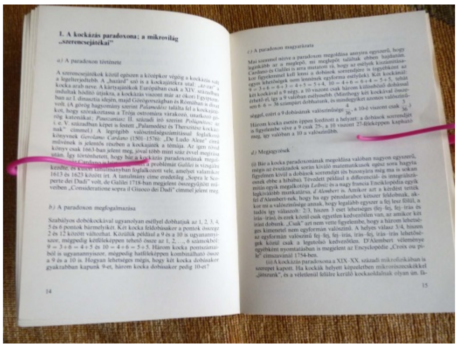
3. A valószínűség fogalmának különböző értelmezései és problémái

1982-ben jelent meg először **Székely J. Gábor** könyve a véletlenek matematikájának paradoxonjairól[9]. Nagyon tanulságosak a könyv példái, és jó áttekintést kapunk a valószínűségszámítás kialakulásáról, és nehézségeiről.



E fejezet címében én szándékosan használtam a „probléma” szót a paradoxon helyett, mivel az esetek többségében nem is jutunk el az ellentmondások felfedezéséhez, csupán valamiféle problémát érzékelünk.

Klasszikus valószínűségszámításnak általában a laplace-i módszert nevezik, mely szerint véges számú lehetséges eseménynél a kedvező események valószínűsége a kedvezők és az összes esemény számának hányadosával egyenlő. Ebből a számítási technikából eredeztethető, hogy a későbbi, ettől eltérő módszereknél is a valószínűségeket 0 és 1 értékek közé szorították, azaz 1-re normáltak a lehetséges események valószínűségei.



A valószínűségszámítás viszonylag új területe a matematikának, de **Laplace** módszertanának már voltak előzményei, ezek közül kiemelkedőek **Fermat** és **Pascal** ezirányú elgondolásai. Ezek a korai megközelítések általában a szerencsejátékok által felvetett problémákon alapszanak, de például **Pascal** a hétköznapi élet választásainál is fontosnak tartotta a valószínűségszámítási ismereteket, sőt Isten létének kérdését is ebből a szempontból közelítette meg; az előnyök és hátrányok vizsgálata alapján *fogadást tett*[10] Isten létére.

Laplace valószínűségszámítását én inkább *véges*, vagy *kombinatorikus* jelzővel illetném, és a *klasszikus* jelzőt **Kolmogorov** axiomatikusan megalapozott elméleténél használnám, hogy megkülönböztessem a ma alakulóban lévő forradalmian új valószínűségszámítási módszertantól.

A valószínűségszámítással kapcsolatos problémák közül kiemelném hármat példaként; az úgynevezett **Bertrand** paradoxont, a relatív gyakoriságból származó, egyfajta határértékként definiált valószínűség ellentmondásait, és **Kolmogorov** valószínűség-elméletét.

[9] **Székely J. Gábor**, *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982

[10] *„… végtelenül boldog, örök életet lehet nyerni, a nyerés esélye véges számú vesztési eséllyel szemben áll, s az is véges, amit kockáztat. Így ez már nem is fogadás: ahol a végtelen forog kockán, és nem áll szemben végtelen számú vesztési esély a nyerési eséllyel, nincs helye mérlegelésnek, mindent fel kell tennünk.*” (**Pascal**, *Gondolatok*, Gondolat Kiadó, 1978, 98. oldal, 233.)

3.1. A Bertrand paradoxon és feloldása

A **Bertrand** paradoxonként ismert gondolatjáték annak a valószínűségére kérdez rá, mely a körnek egy véletlenszerűen kiválasztott húrjától azt várja, hogy legyen hosszabb a körbe írt szabályos háromszög oldalánál.

A valószínűség egyik meghatározása abból indul ki, hogy a körön egy pontot rögzítve annak valószínűségét keressük, hogy a kör egy másik pontjával összekötve a húr hossza legyen nagyobb az említett oldalhossznál. A kört három egyenlő körívre bontva, melynek egyike a rögzített pont, bizonyítható, hogy egyetlen részkörív pontjaiból húzott húrok felelnek meg a követelményeknek, így a keresett valószínűség ⅓.

Egy másik meghatározás alapja az a tény, hogy a kör húrját egyértelműen meghatározza a középpontjának a helye a kör belsejében, és a húr hossza akkor nagyobb a megadott hossznál, ha a körbe írt egyenlőoldalú háromszögbe írt körnek a belsejében van a húr középpontja. Ennek a kisebb körnek a sugara épp fele a nagyobb körének, azaz a területe a nagyobb kör területének a negyede, így a keresett valószínűség ¼.

Vannak még más módszerek is a fentiektől eltérő eredménnyel. A számítások különböző eredményeit azzal szokták magyarázni, hogy eltérőek a valószínűségi modellek, azaz nem ugyanazon valószínűségi modellben lesz ugyanannak az eseménynek eltérő a valószínűsége. Ezt a választ azonban nem érezzük kielégítőnek, hiszen azt várnánk, hogy egy esemény bekövetkeztének a valószínűsége valami objektív dolog, azaz egyértelműen meghatározható, akármilyen modellt használunk. Ezért a kapott két eredmény kapcsán felmerül a kérdés, hogy *melyik az „igazi”*.

Számomra az is furcsa ebben a példában, hogy létezik nem valószínűség-szintű megoldás, sőt mindkét véletlenen alapuló módszer mögött egy „százszázalékos” eredményt produkálni képes módszer lapul. Mindkét esetben tudunk olyan húrt választani, hogy annak hossza bizonyosan nagyobb lesz a szabályos háromszög oldalánál. Tehát a példa semmiképpen nem hasonlítható egy kockavetéshez, melyben nincs várható pontos eredmény, mivel az azt előállító mozgás a környezet és a kocka kölcsönhatása mikro-állapotainak előreláthatatlan sorából ered.

A **Bertrand** paradoxon feloldása nem igényel igazi matematikai módszertant. Úgy közelíteném meg a feladatot, hogy verseny-feladatnak fognám fel. Feladatul adnám, hogy a körből meghatározott – és elég hosszú – idő alatt válasszanak ki véletlenszerűen húrokat, amennyit csak tudnak. A verseny végén pedig azt vizsgálnám, hogy melyik módszer dolgozott nagyobb találati aránnyal. Így az eltérő valószínűségi modellek is összehasonlíthatóvá váltak, mindössze a valószínűségi értéket – annak gyakorlati megvalósulásában – egyfajta hibaaránynak tekinteném. Tehát **a két modell által megadott értékek egyáltalán nem egy bizonyos esemény bekövetkeztének *általános* valószínűségére vonatkoznak, hanem a módszertanokat minősítik**.

Az ellentmondó eredményeket arra is visszavezethetem, hogy megoldásuk nem felel meg a véletlenszerű választás követelményének, hiszen mindkét algoritmus egy olyan *tudáson* alapszik, mely garantáltan helyes eredményt produkálna egy nem véletlenszerű választásnál. Így a két modell módszere csak *félig* véletlenszerű. A „félig” kifejezést azért használtam, hogy megkülönböztessem a szakirodalomból ismert *álvéletlentől*. Az álvéletlen módszer ugyanis véletlennek látszik, de nem az, mivel egy jól meghatározott algoritmussal állít elő – determinisztikus – elemeket, melyek szabályszerűségét nehéz felfedezni az algoritmusnak a kezdeti értéktől való függése, és annak variálása miatt. Ezzel szemben a fent vázolt két modellben az első lépés egy olyan információ felhasználása, mely százszázalékosan helyes eredményre vezetne, majd második lépésben egy ezen a tudáson alapuló, de már valóban véletlen választást feltételező eljárással történik a választás. A valószínűségként megjelenő értékek így azt a *különböző tudás*t is minősítik, mely a modellek kiindulásául szolgál.

Ennek a paradoxonnak három tanulsága van; nem minden valószínűségszámítás az, ami annak látszik, nem minden véletlen az, ami annak látszik, és végül, de nem utolsó sorban a valószínűség függ a rendelkezésre álló információtól.

3.2. Relatív gyakoriság koncepció és a paradoxonok

A valószínűségekkel kapcsolatban a legősibb tapasztalat, és a legrégebben megfogalmazott állítás a következő: valószínű az, ami gyakran bekövetkezik. Ez a szemlélet tehát egy adott helyhez kötött esemény időbeli előfordulásához köti a valószínűség fogalmát. Az „adott hely" természetesen a legkisebb méretektől a legnagyobbakig terjedhet, hasonlóan az időintervallumhoz. Ebben a modellben a tér és az idő független hátterében zajlanak az események.

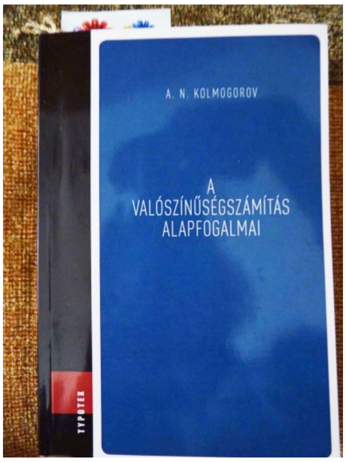
A relatív gyakoriságok koncepciója szoros kapcsolatban áll a laplace-i gondolattal, de nem egy eseményt vizsgál, hanem valamilyen szempontból azonos tulajdonsággal bíró események sorozatát. A gyakorlatban megfigyeljük, vagy létrehozzuk az eseményeket – például érmét dobálunk, vagy kockát vetünk – majd összeszámláljuk a kívánt eseményeket, és ennek az értéknek az arányát vizsgáljuk az összes esemény számához képest. Ha azt tapasztaljuk, hogy a próbák számának növekedtével ez az arány egy adott értékhez közeledik, akkor azt **feltételezzük, hogy ez az érték, mint határérték valóban létezik, és ez a vizsgált esemény valószínűsége a relatív gyakoriság koncepciója szerint**. Így a relatív gyakoriság módszere tulajdonképpen **Laplace** elméleti számításának egyfajta gyakorlati tesztje is egyben, és előnye, hogy abban az esetben is használható, ha a laplace-i „képlet" nem használható. A határértéknek ezt a megközelítését sokan vitatják abból a matematikai ismeretből kiindulva, hogy egy kongruens sorozat tetszőlegesen sok véges elemét elhagyva a sorozat határértéke nem változik, itt pedig véges-sok elemű sorozathoz rendelünk határértéket. Véleményem szerint használhatnánk más matematikai összefüggést is, ami ellen ez az érv nem hozható fel, például a teljes indukciót alkalmazva, amiben – leegyszerűsítve a módszert – egy tulajdonság öröklődéséből következtetünk egy sorozat határértékére.[11] Az a probléma ezekkel az ötletekkel, hogy egy modellen belül keverik a tapasztalati és a matematikai információkat. Tulajdonképpen az axiomatikus matematika is ezt teszi, amennyiben axiómaként elkülöníti a tapasztalati – vagy, ahogy **Poincaré** nevezte *konvenciók* szerinti – információkat és az ezeken alapuló tételek már tisztán logikai építményét. A relatív gyakoriság esetében azonban szó sincs ilyen világos szerkezetről. Van egy sokat ígérő kiút ebből a problémából, mégpedig a végtelen minőségi jellegének felismerése. **A mennyiségi végtelen egy matematikai absztrakció, tapasztalni viszont csak véges mennyiséget**

[11] Ez a teljes indukciós megközelítés részletes kifejtésében rokonságot mutat a „propensity (hajlam) elmélettel", amivel **Karl Popper** próbálta kiküszöbölni a valószínűségszámítás ellentmondásait. Erről az elméletről jelen írásomban nem fogok szólni, de később szeretnék vele foglakozni, mert nekem is hasonló elképzeléseim vannak. Már írtam arról az elgondolásomról, hogy egy elég bonyolult rendszer állapotváltozásának nemcsak oka, de célja is van. Ez a cél megfeleltethető **Popper** hajlam fogalmának. (Lásd: *„Okozatiság és célkövetés – Determinizmus vagy indeterminizmus vagy valami"* más című cikket: http://www.infinitemath.hu/archivum/filozofia/140-okozatis%C3%A1g-%C3%A9s-c%C3%A9lk%C3%B6vet%C3%A9s)

tudunk. Bár a matematika egyik leghasznosabb fogalma a végtelen eszméje, de épp a valószínűségszámítás az a tudományterület, ahol a végtelenként idealizált „sok” komoly problémák forrásává vált. **Poincaré**hoz hasonlóan a tapasztalatainkból kiindulva sokan nem hisznek a mennyiségi végtelen aktuális létében. Én is ezen a véleményen vagyok, és még ennél is tovább megyek; meggyőződésemmé vált az, hogy a potenciális végtelen aktuálissá válása egy új minőség megjelenésében ölt testet. **Mivel végtelen mennyiséget nem érzékelünk, ezért az új minőség megjelenését – valami „*mágiaként*” – véges mennyiségi változás után érzékeljük**. Ez a megközelítés kapcsolatot létesít a matematikai fogalmaink és a gyakorlati tapasztalataink között a határértékekre, és általában a végtelenre vonatkozóan. **Ez az elgondolás a relatív gyakoriság határérték fogalmát is elfogadhatóvá teszi**.

3.3. Kolmogorov valószínűségszámítása

Kolmogorov axiomatikus felépítésű valószínűségelméletének legnagyobb erénye, de legnagyobb hátránya is egyben az absztrakció magas szintje. Így sok kérdés



megválaszolásában nyújt segítséget, de a gyakorlati alkalmazások során értelmezési problémák és ezzel együtt ellentmondások léphetnek fel. **Kolmogorov** alapműve 1933-ban jelent meg, szinte egy időben a QM valószínűségi matematikájának kialakulásával. Kezdettől fogva izgalmas rejtély, miért is különbözik e két valószínűségszámítás. Most került kezünkbe e titok megoldási kulcsa, amikor látjuk a kételemű számok szerepét a valószínűségszámításban és a téridő modellezésében.

A kételemű számokat felhasználva **Kolmogorov** valószínűségszámításának egységesítésekor már axióma-szinten is több kérdés merül fel. Vegyük először a valószínűség-függvény pozitív valósként való deklarálását. A kételeműek normái, mint valószínűségi amplitúdók nemhogy nem pozitív valósok, de tiszta képzetesek kell, hogy legyenek, így a négyzetüket, mint valószínűséget tekintve pozitív és negatív valós számokat is kaphatunk eredményül. Az sem megoldás, ha a kételemű számsíknak csak azokat a tartományait tekintjük, ahol pozitív valósként is definiálható a norma, ebből a tartományból ugyanis „kivezet” a különbség-képzés művelete. A probléma gyökere azonban a valószínűségszámítás alapelemének az **eseménynek a hiányos definiálása**. **Kolmogorov** nem ad még burkolt defininíciót sem egy esemény *mibenlétére*, hanem az eseményekre halmazelméleti alapokon definiál egy műveletcsoportot – eseményalgebrát[12] – majd ezen vezet be egy valószínűségnek nevezett függvényt. Az esemény fogalmához azonban nem csak hétköznapi értelemben kötődnek bizonyos tulajdonságok, de matematikai objektumként is rendelkeznek olyan jellemzőkkel, melyek tükrözik az eseménynek az általános halmaz-fogalomtól eltérő voltát. A halmazelméleti definíciók és az eseményalgebra meghatározásai közötti különbségeket lásd a **Mellékletben**. A különbség leglényegesebb sajátsága az időfogalomhoz kapcsolódik; míg a teljesen általánosnak gondolt halmazelmélettől idegen az idő eszméje, addig a valószínűségszámítás tárgyának; az eseménynek az egyik fő jellemzője.

[12] Egy halmaz részhalmazainak rendszerét algebrának nevezzük, ha a rendszer két halmazának metszete, uniója és különbsége is a rendszerhez tartozik.

Az idő nemcsak az eseményhez tapad elválaszthatatlanul, de a valószínűségszámítás alapműveletei sem írhatóak le nélküle, erre jó példa a **Melléklet**ben felsorolt értelmezések közül hangsúlyosan a 3., amely a halmazelméleti *metszetnek* a valószínűségszámításban az események *egyidejűségét* felelteti meg. Emellett az eseményeken definiált minden művelet valamiféle időbeliséget és térbeliséget is megkíván.

Sokan bírálták már az eseményeknek ezt a túlzott általánosítását, de jó definíció hiányában, és **Kolmogorov** valószínűségszámításának sikeres alkalmazásai miatt nem született igazán elterjedt új módszertan. A kételemű számok, mint téridő modellek lehetőséget teremtenek az események nem halmazelméleti definiálására, hiszen a kételemű számok mindegyike egy téridő vektornak tekinthető – ha a teret leszűkítem egy dimenzióra – és az események legjellemzőbb tulajdonsága is az, hogy térben és időben zajlanak. Ez még olyan esetben is igaz, ha olyan fiktív eseményről van szó, mint a **Bertrand** paradoxonban szereplő húr-keresés. (Ennek magyarázatához a kiválasztási axiómára, és annak téridő-kapcsolatára van szükség, ezzel azonban egy másik írásomban szeretnék foglalkozni.) Ebben a cikkben csak nagy vonalakban vázoltam a problémákat és a lehetőségeket, így arra is csak utalok, hogy az esemény definiálásán kívül a relációk körvonalazására is szükség van, így a fent említett *egyidejűségre* is, melynek fogalma szintén a téridőhöz kapcsolódik, és sok kérdést vet fel.

4. Zárszó

Amint írásomból kitűnik; egy lassan körvonalazódó megoldást látok a valószínűségszámítások egységesítésére. Ennek korrekt megfogalmazását azonban véleményem szerint akadályozza egy olyan általános számrendszer hiánya, melynek a kételemű számok az egységelemei. Ez utóbbi kulcsának változatlanul a geometriai algebra eszköztárát látom, mivel a kételemű számok a **Clifford-**algebra, s így a **geometriai algebra legegyszerűbb, egydimenziós vektorok által generált fajtáit** reprezentálják.[13] Jelenlegi formájában azonban a geometriai algebrát sem tekinthetem tökéletesnek, mert az időfogalom ábrázolása ebből az eszköztárból is hiányzik az egynél magasabb dimenziójú térvektorok esetén, szemben a kételemű számokkal, melyek egy-egy speciális téridő-topológiát modelleznek, ha a teret egy dimenzióra szűkítjük. Ugyanakkor jó kiindulópontnak tartom ennek a matematikának a tanulmányozását, mert lehetségesnek gondolom az átalakítását egy olyan számrendszerré, amely alkalmas az időfogalom adekvát ábrázolására.

[13] Lásd erről „*A geometriai algebrában rejtőzködő végtelen*” című cikk 2.1. pontját; http://www.infinitemath.hu/images/stories/geo_alg_inf_160123_v3.pdf

Melléklet

Az alábbi idézet **Kolmogorov** „*A valószínűségszámítás alapfogalmai*”[14] című művéből való, ahol Ω azon ω elemek halmaza, melyeket elemi eseményeknek nevezünk, a nagybetűvel jelöltek pedig Ω részhalmazai.

Halmazelméletben	*Véletlen eseményekre*
1. A és B diszjunktak, azaz $AB = \emptyset$.	1. A és B események kizárják egymást.
2. $AB \ldots N = \emptyset$.	2. $A, B, \ldots, N$ események kizárják egymást.
3. $AB \ldots N = X$.	3. X esemény valamennyi $A, B, \ldots, N$ esemény egyidejű megvalósulásából áll.
4. $A \cup B \cup \ldots \cup N = X$.	4. X esemény $A, B, \ldots, N$ események legalább egyikének a bekövetkezését jelenti.
5. $\bar{A}$ komplementer halmaz.	5. $\bar{A}$ az A esemény be nem következését jelentő ellentett esemény.
6. $A = \emptyset$.	6. A lehetetlen esemény.
7. $A = \Omega$.	7. A-nak szükségszerűen be kell következnie.
8. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok $\mathfrak{A}$ rendszere az Ω halmaz *felbontása*, ha $$A_1+A_2+\ldots+A_n = \Omega,$$ ahol feltesszük, hogy az A_i halmazok páronként diszjunktak. (A + jelet csak diszjunkt halmazok egyesítésére fogjuk használni.)	8. Az $\mathfrak{A}$ *kísérlet* abból áll, hogy megállapítjuk: az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül melyik következik be; ebben az esetben $A_1, A_2, \ldots, A_n$-t az $\mathfrak{A}$ kísérlet lehetséges kimeneteleinek nevezik.
9. B az A részhalmaza: $B \subseteq A$.	9. B esemény megvalósulásából szükségszerűen következik A megvalósulása.

[14] **A. N. Kolmogorov**, *A valószínűségszámítás alapfogalmai*, Hungarian translation © **Zibolen Endre**, Typotex, 2010, 17. oldal.