# A negatív hiperbolikus valószínűségektől egy új és egységes matematikai eszköztár felé

## *Florin Moldoveanu egyik cikkének apropóján*[1]

Mindenekelőtt azt szeretném tisztázni, hogy az alcímben utalt cikkben hiperbolikus kvantummechanikáról van szó, mely téves elnevezés; hiperbolikusnak hiperbolikus a hivatkozott matematika, de lényegét tekintve nem csak a kvantummechanikára vonatkozik. Annyi köze van a kvantummechanikához, hogy annak különböző ábrázolásaiban a komplex képzetes egység helyett a hiperbolikus képzetes egységet használjuk.[2] A kérdés az, hogy egy ilyen matematikai eszköztár használható-e bárhol is. **Florin Moldoveanu** annak a véleményének ad hangot, hogy egy efféle modell nem életképes jelölt a Természet (sic!) leírására. Egy korábbi cikkemben[3] **Khrennikov** nyomán felvetettem annak a lehetőségét, hogy nemcsak a komplex, és a hiperbolikus számok, de a parabolikus (másképp duális) számok is használhatóak a **Hilbert** tér koordinátáiként. A **koordinátáknál használt számrendszer kiválasztása pedig szerintem a leírt folyamat entrópiaváltozásának jellegétől függ**, és nem az adott rendszer mikro-, vagy makro-jellegétől.[4] Ebben az értelemben a hiperbolikus valószínűségek nagyon is életképes leíró eszközöknek látszanak, mégpedig akkor, ha az entrópia csökken egy változás során. Ezzel kapcsolatban egy fizikus kételkedése annyiban jogos, hogy egyrészt ilyen típusú változás ritkán fordul elő az általa vizsgált jelenségeknél, másrészt ez az állítás még csak munkahipotézis.

## 1. A kvantumfizika matematikájáról

Mielőtt **Moldoveanu** érveire rátérnék, szeretnék pár szót ejteni a kvantummechanika matematikai hátteréről. Hihetetlenül gazdag sokféleség jellemzi azt a matematikai eszköztárat, amivel leírják a kvantummechanikai tapasztalatokat. Nagyon érdekesnek tartom, hogy miközben egy olyan tudományterületről van szó, melynek elméleti állításait a tapasztalat sokszorosan igazolta, eredményei nélkülözhetetlenek a hétköznapok technikai eszközeinek kialakításában, ugyanakkor nincs sem egységes szemlélete, sem standardizált matematikai eszköztára a kvantummechanikának. Sokan csak a két legnagyobb irányvonalat említik az interpretációk közül; a főleg **Bohr** és **Heisenberger** által fémjelzett koppenhágait és a **Schrödinger-Dirac**-féle kvantummechanikát. A matematikai leírást tekintve a kvantummechanikának van – a matematika csoportelméletén alapuló – standard

[1] **Florin Moldoveanu**, *„Non Viability of Hyperbolic Quantum Mechanics as a Theory of Nature”;* http://arxiv.org/pdf/1311.6461v2.pdf

[2] Ez a kritika az elnevezéssel kapcsolatban nem elsősorban **Moldoveanu**nak szól, mert ő már egy mások által használt kifejezéssel él.

[3] Lásd a *„Széljegyzetek **Andrei Khrennikov** hiperbolikus kvantummechanikájához” című cikket;* http://www.infinitemath.hu/index.php/egyeb/item/201-sz%C3%A9ljegyzetek-andrei-khrennikov-hiperbolikus-kvantummechanik%C3%A1j%C3%A1hoz.html

[4] Ne felejtsük el, hogy a mérés entrópia-változást generál a mért rendszerben. Jelenlegi tapasztalataink szerint kvantum-szinten az információszerzés – azaz a mérés – információtörléssel jár, így a mérés entrópia-növekedést okoz a megfigyelt rendszerben. Ez lehet az oka annak, hogy komplex valószínűségi amplitúdókkal írható le a folyamat.

reprezentációja, a csoportelméletet felhasználó fázistérbeli formalizálása, és a szintén csoportelméleti alapokon nyugvó Hilbert-térbeli leírása. Ugyanakkor vannak más értelmezések is, a sokból csak két példát említek; a **Bohm**-mechanikát (vagy vezérhullám elméletet), és újabban **Khrennikov** megközelítését, aki a kvantummechanikát – a továbbiakban QM-mel jelölve – a klasszikus statisztikus mechanikának egy formájaként interpretálja akként, hogy nem a részecskék, hanem a mezők klasszikus statisztikus mechanikáját használja. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a QM matematikai formalizmusát át kell transzformálni a klasszikus statisztikus mechanika formalizmusába végtelen dimenziós fázistérben.

A kvantummechanika sokszínű értelmezéseire, és ezek vitákat generáló hatására érdemes idézni **Khrennikov**ot:

> *„Az elmúlt tíz évben volt szerencsém találkozni a kvantum-alapok irányadó szakértőivel, és megbeszélni velük a legérdekesebb problémákat. Mi lepett meg engem (legalábbis az első konferenciákon)? A vélemények és látásmódok óriási sokfélesége a nagyon alapvető és régi problémákkal kapcsolatban. Naiv volt az az elvárásom, hogy a kvantum-guruk meghívásával világos válaszokat kapok. Az első konferencia a „Bohm-i mechanika 2000” teljes kudarc volt: a Bohm-féle iskola két vezető képviselője, Shelly Goldstein és Basil Hiley két teljesen különböző értelmezését mutatta be a Bohm-i mechanikának. Végül azzal vádolták egymást, hogy félreértik Bohm nézeteit (mindketten nagyon szoros kapcsolatban álltak David Bohmmal). A diákjaim, akiket felkértem, hogy tanuljanak Bohm-féle mechanikát a teremtőitől, nagyon megzavarodtak. Az egyetlen hasznos információ, amit kinyertem a Bohm-i mechanikából az volt, hogy a Bohm-féle mechanika nem ad új kísérleti jóslatokat, összehasonlítva a hagyományos QM-mel. Így, bár formálisan (matematikailag) Bohm mechanikája tisztább leírását adja a mikro-folyamatoknak, lehetetlen olyan kísérleteket tervezni, amelyek megkülönböztetik Bohm mechanikáját QM-tól.”*[5]

A fent idézett cikkben **Khrennikov** még azt is megjegyzi, hogy QM tárgyában rendezett sok konferencia tanulságaként *„Végül megértettem, hogy a különböző értelmezések száma legjobb esetben megegyezik a résztvevők számával.”*[6] Ez az ironikus megjegyzés nemhogy megfélemlített, de éppen felbátorított, hogy még merészebb legyek, amikor kritikusan szemlélem azt a matematikai zűrzavart, amivel a kvantummechanikai szakirodalomban találkozom. Nemcsak a kaotikus formalizmus zavar a matematikai leírásokban, de sokkal inkább az, hogy a kezdetben korrekt matematikai alapokat a gyakorlati használhatóság

[5] *„During the last ten years I have been lucky to meet the world leading experts in quantum foundations and discuss with them the most intriguing problems. What surprised me (at least at the first conferences)? It was the huge diversity of opinions and views on the very fundamental and old problems. My expectation that by inviting great quantum gurus I can get clear answers was naive. The first conference, Bohmian mechanics 2000, was the total fiasco: two leading representatives of Bohmian school, Shelly Goldstein and Basil Hiley, presented two totally different interpretations of Bohmian mechanics. Finally, they accused each other in misunderstanding of Bohm’s views (both had very close connections to David Bohm). My students whom I invited to learn Bohmian mechanics from its creators were really confused. The only useful information which I extracted from Bohmian mechanics 2000 was that Bohmian mechanics does not give new experimental predictions comparing to conventional QM. Thus, although formally (mathematically) Bohmian mechanics provides a finer description of micro processes, it is impossible to design experiments which will distinguish Bohmian mechanics and QM.”*
Khrennikov: “Einsteins Dream” – Quantum Mechanics as Theory of Classical Random Fields; http://arxiv.org/abs/1204.5172

[6] *„Finally, I understood that the number of different interpretations is in the best case equal to the number of participants.”*
Khrennikov: “Einsteins Dream” – Quantum Mechanics as Theory of Classical Random Fields; http://arxiv.org/abs/1204.5172

érdekében úgy alakítják át, hogy az már matematikailag pontatlan, sőt ellentmondásos. Viszont, ami matematikailag inkorrekt, az a természet logikájának is ellentmond.

A kategóriaelmélet ugyan segíthet az egyik matematikai leírásból megérteni a másikat, de ez nem jelenti azt, hogy egyúttal egy standardizált matematikai módszer szerepére is alkalmas eszközt kapok a kvantummechanikai tapasztalatok leírásában. A kategóriaelmélettel az absztrakció növelése segít abban, hogy minél nagyobb területet tudjunk leírni ugyanazzal a matematikával, ugyanakkor el is távolít a konkrét tárgyaitól, meggyöngítve a „kézzelfogható” tapasztalat (mérés) és az elmélet közötti kapcsolatokat. Ahogy mondani szoktuk; ami mindenre jó, az valójában semmire sem alkalmas igazán.

A QM-et illetően azonban másról van szó, hiszen itt valójában nem a leírás tárgyának bővítésére van szükség, hanem az ugyanazon tárgyú, de módszerükben eltérő leírások egységesítésére, egyfajta standardizálásra. Így véleményem szerint nem az absztrakció szintjét kellene növelni a QM-et illetően, hanem a meglévő magas absztrakciójú és igen sokszínű leírásokat kellene egységbe foglalni. A standardizálás egyúttal egyszerűsítést is jelent majd, hiszen az ugyanarról a tárgyról szóló eltérő leírások helyére egyetlen ábrázolási módot helyezünk reményeim szerint. Megjegyzem, feltehetően épp az az oka a leírások e sokféleségének, hogy még egyiket sem érzi igazán megfelelőnek a fizikusok közössége.

## 2. Florin Moldovaenu elképzelései a hiperbolikus QM-ről

Számomra igen tanulságos volt, amint az alcímben hivatkozott cikk szerzője a QM algebrai megközelítésének definícióival vezeti be a hiperbolikus QM lehetőségét, majd mindezt a fázistér formalizmusával is bemutatja, végül megjegyzi, hogy a Hilbert tér formalizmusával is el lehet jutni a hiperbolikus QM-hez, utalva **Khrennikov**[7] és szerzőtársa egy cikkére. Korábbi írásomban[8] már összefoglaltam **Khrennikov**nak a Hilbert tér formalizmusát felhasználó hiperbolikus QM-megközelítését. Ott csak annyiban tértem ki a hiperbolikus esetbeli problémákra, mint maga **Khrennikov**, azaz a hiperbolikus számvektorokat korlátoztam azokra, melyeknél a hiperbolikus norma pozitív.[9]

**Moldoveanu** a hiperbolikus norma kapcsán – amit ő fél-normának (seminorm) nevez – nem említi meg annak a lehetőségét, hogy az képzetes is lehet. Ez – az általam továbbra is hiperbolikus normának nevezett – függvény egy olyan számnak a négyzetgyöke, mely pozitív értékek mellett nulla és negatív is lehet. **Tudnunk kell, hogy a kételemű számok ismeretében már valamennyi valós számon elvégzett gyökvonás esetén képzetes számot is kaphatunk eredményül, azaz nulla gyökeként a parabolikus egység, j is lehet az eredmény, melyre $j^2=0$, de $j\neq 0$, sőt pozitív szám gyökeként is kaphatok képzetes számot, hiszen a hiperbolikus imaginárius egységre $k^2=1$ és $k\neq 1$**. Érdekes, hogy **Moldoveanu** – miközben nem számol azzal, hogy a hiperbolikus norma képzetes szám is lehet – ugyanakkor a QM standard reprezentációja után hangsúlyozza – nagyon helyesen –, hogy a klasszikus

[7] **A. Khrennikov** and **G. Segre**, “*Von Neumann Uniqueness Theorem doesn't hold in Hyperbolic Quantum Mechanics*”; http://arxiv.org/pdf/math-ph/0511044v4.pdf

[8] Lásd a 3. lábjegyzetet.

[9] Ezek halmaza egyébként a szorzásra nézve zárt, az összeadásra is, de csak szűkebb értelemben, mivel az összeadás inverz műveletére, a kivonásra nem zárt. A határértékképzésnél okoz igazán gondot a hiperbolikus norma. Ezt általában úgy oldják meg – így tesz **Khrennikov** is a hiperbolikus kalkulusról szóló cikkeiben – hogy bevezetik a klasszikus euklideszi mértéket is. Már írtam arról, hogy ezzel nem értek egyet, lásd ennek okát az „*Út a természetes számoktól a valós számokon át a kételemű számokig*” cikk 3. oldalát; http://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/202-%C3%BAt-a-term%C3%A9szetes-sz%C3%A1mokt%C3%B3l-a-val%C3%B3s-sz%C3%A1mokon-%C3%A1t-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mokig.html

mechanika esetében, amikor az egyenletekben szereplő képzetes konstans $J^2=0$, nem következik, hogy J=0.[10] Ezzel **Moldovaenu** rálelt a kérdés kulcsára, de sajnos csak a standard QM leírásokra vonatkozóan teszi meg az észrevételét, és a hiperbolikus esetben már nem használja ezt a lényeges információt a megoldásaiban.

Van egy igen fontos következménye annak, hogy a hiperbolikus norma – és általában a négyzetgyökvonással képzett normák – képzetes értékűek lehetnek, mégpedig az, hogy az erre felírt háromszög-egyenlőtlenségek csak akkor korrektek, ha a képzetes számok rendezettsége ismert. Erről azonban egyelőre nem sokat tudunk. Egy olyan bővített számhalmaz esetén lehet csak erre vonatkozóan bármit is definiálni, melynek a különböző kételemű számok – komplex, parabolikus és hiperbolikus – mind az elemei, és ismert e kiterjesztett számhalmaz rendezettsége és az alapműveletei. Ennek hiányában **a norma-négyzet használatát érdemes preferálni, és ennek kapcsán a koszinusz-tétel alkalmazását figyelembe venni a háromszög-egyenlőtlenség helyett**, hiszen ezek visszavezetnek a valós számok körébe, és mindhárom számsíkon korrektül megfogalmazhatóak. (Lásd a **Melléklet I** 4. pontját.)

**Moldovaenu** a funkcionálanalízis általánosításának próbálkozásakor tetszőleges halmazra és egy félig távolságszerűnek (*semi para-distance)* nevezett, és d-vel jelölt szimmetrikus távolság-függvényre definiál **para-metrikus**nak nevezett teret. A d a definíció szerint pozitív valós értékű, és csak akkor nulla, ha egy pont önmagától való távolságára vonatkozik, továbbá a háromszög-egyenlőtlenség hiperbolikus formája igaz rá, azaz pongyolán fogalmazva a háromszög bármely oldala nagyobb, mint a másik kettő összege. Már a hiperbolikus háromszög-egyenlőtlenséget is problematikusnak tartom a fentiek miatt, de azt mindenképpen megkérdőjelezem, hogy **Moldovaenu** egy ilyen para-metrikus térre a hiperbolikus számok halmazát hozza fel példaként. Igaz, hogy a hiperbolikus számokra korábban bevezetett indefinit hiperbolikus norma a hiperbolikus számsík bizonyos tartományain rendelkezik a fent leírt tulajdonságokkal, ha valós értékűnek gondolom, de hangsúlyozom, hogy a hiperbolikus számok teljes számhalmazára ez nem igaz. Felmerülhet természetesen, hogy lehet más d-féle távolságszerű függvény a hiperbolikus síkon, mely mindenütt rendelkezik a d-re megadott tulajdonságokkal, ennek létezését azonban bizonyítani kellene. Egy para-metrikus tér absztrakt definícióinak használhatónak kell lennie a szűkebb, gazdagabb struktúrájú altereiben is, így jogos a kérdés, hogy valóban altere-e a fenti para-metrikus térnek a hiperbolikus számok halmaza. Ehhez be kellene mutatni egy konkrét félig távolságszerű függvényt a fenti tulajdonságokkal a hiperbolikus számok halmazán.

A hiperbolikus számok két-komponensű mennyiségek, hasonlóan a síkbeli vektorokhoz. A síkbeli vektorokkal azonos módon adhatóak össze, de a szorzatuk változatlanul hiperbolikus számot ad, és a komplex számoktól eltérően a szorzat képe nem körforgás és nyújtás, hanem hiperbolikus forgás, azaz síkbeli **Lorentz**-transzformáció szintén nyújtással kiegészítve. A fent leírt d távolságszerűség bemutatásának kívánalma azt jelenti tehát, hogy a hiperbolikus számok két komponensével – azaz a számvektorok koordinátáival – kifejezett, és a fenti tulajdonságokkal rendelkező d-t állítsunk elő, ugyanakkor ez a d ne kerüljön ellentmondásba a hiperbolikus számsík speciális struktúrájának tulajdonságaival. **Ilyen d para-metrika véleményem szerint nem létezik a teljes hiperbolikus számsíkon.** Ennek bizonyítása nem egyszerű, és nem is szeretném mélyebben tanulmányozni a kérdést. Elegendőnek tartok egy gondolatjátékot bemutatni, melyben ellentmondáshoz jutok, ha a fentiekben definiált d távolságot használok amellett, hogy a hiperbolikus számhalmazon definiálom a számok konvergenciáját. Ezt a gondolatjátékot a **Melléklet II** tartalmazza. E mellékletben bemutatott ellentmondások azért maradnak láthatatlanok **Moldoveanu** cikkében, mert nem definiál

[10] Megjegyzi azt is ennek kapcsán, hogy hibás az a következtetés, hogy a QM klasszikus mechanikává válik $\hbar \to 0$ határértéknél. (**Moldoveanu** hivatkozott cikkében – lásd az 1. lábjegyzetet – a 6. oldal 2-3. bekezdésben szerepel ez.)

konvergenciát a hiperbolikus számok körében. Ennek hiányában azonban értelmezhetetlenek a fizika legalapvetőbb fogalmai, melyek a kalkulus-számításokon, a deriválás és az integrálás régóta használt fogalmain alapszanak, és amelyeket több évszázados tapasztalataink erősítenek meg. Jóllehet nagyon érdekesnek tartom a szerzőnek azt a próbálkozását, amint a divergencia fogalmát helyezi központba a hiperbolikus számok körében, de azzal, hogy a konvergenciával csak utalásokban foglalkozik, nem válik világossá számára a háromszög-egyenlőtlenség körüli probléma, amely elvezethette volna annak a meglátásához, hogy **a hiperbolikus normának képzetes számnak kell lennie**. Korábban én is foglalkoztam a háromszög-egyenlőtlenségek érdekes különbözőségével a három számsíkon, de mindig is zavart, hogy az egyenlőtlenség a parabolikus és a hiperbolikus számsíknak csak egy-egy tartományára érvényes, továbbá az is elgondolkodtatott, hogy hiperbolikus számsíkon a polárkoordinátás alak csak akkor használható általánosan az egész számsíkon, ha két síknegyedben a hiperbolikus norma és az argumentum is komplex szám, tehát képzetes érték. **A kételemű számok norma-négyzeteinek a szerepe[11] a valószínűségszámítások három fajtájánál végképp meggyőzött arról, hogy a normákat képzetes számoknak tekintsem, mert így válik érthetővé, miért is kapom meg a valós valószínűségeket kizárólag a normanégyzetekből.**

## 3. A hiperbolikus számkör használatának kiforratlansága, kezdetek

A hiperbolikus számokkal kapcsolatban érdemes néhány szót ejteni – a többek által modulusnak nevezett – hiperbolikus normáról, melynek az a jellegzetessége, hogy a komplex számokhoz hasonlóan a számok szorzásánál a szorzat normája a tényezők normáinak szorzata.[12] E hasonlóság mellett a hiperbolikus norma lényeges tulajdonságokban tér el a klasszikus norma-fogalomtól; egyrészt ennek négyzete negatív szám is lehet, és a négyzete akkor is egyenlő nullával, ha két különböző számpontra vonatkozik. Nem véletlenül beszéltem a norma *négyzetéről* és annak indefinit voltáról. A kételemű számok képzetes részének ismeretében egyedül a negatív számok négyzetgyökéről ismert, hogy az egy képzetes szám, de amint említettem már, ugyanígy **képzetes szám lehet egy pozitív szám négyzetgyöke is**, mivel a hiperbolikus képzetes egységre $k^2=1$ ($k\neq 1$), de **a nulla szám négyzetgyöke sem biztos, hogy nulla**, hiszen a nullától eltérő **parabolikus képzetes egységet is kaphatjuk eredményül**, hiszen erre $j^2=0$ ($j\neq 0$). A **hiperbolikus számoknál megjelenő normák**, – amelyek valós számból vont négyzetgyökök, – **a számsík két síknegyedében komplex értéket vesznek fel,** de a **másik két síknegyedben** sem érdemes pozitív számnak tekinteni őket, hanem **a hiperbolikus képzetes egység, azaz k számszorosainak, ahol $k^2=1$. A hiperbolikus számgyűrű ideáljain sem nullával egyenlőek a számok normái**, hanem **a parabolikus képzetes egység, j számszorosai, ahol $j^2=0$**. Ha viszont **a norma értékeit képzetes számként kezeljük, akkor a háromszög-egyenlőtlenségeknél a képzetes számok rendezettségét kell figyelembe venni**. Ezek csak akkor lesznek értelmezhetőek, ha a különböző számsíkokhoz tartozó képzetes számok egységelemeinek „szorzótábláját” ismerjük, pontosabban van egy olyan számhalmazunk, melynek mind a három kételemű számsík a része, és ezen belül értelmezettek a képzetes egységek szorzatai, és rendezettségük módja. A normák rendezettsége ismeretének hiányában érdemes a norma-négyzetekre hagyatkozni, annál is inkább, mert a fizika egyes területein

[11] Lásd a 3. lábjegyzetbeli cikket.

[12] A kételemű számok tulajdonságait, eltérő jellemzőit összefoglaltam a **Melléklet I**-ben, melyet a könnyebb kezelhetőség miatt átemeltem két korábbi cikkemből, kiegészítve a skalárszorzat és a külső szorzat definícióival. A korábbi cikkemben a számvektorok összeadásánál még a háromszög-egyenlőtlenséget szerepeltettem, ezt most elhagytam, és helyette a koszinusz tétel megfelelőit mutattam be.

ezeknek konkrét jelentése van, ellentétben a normával. Legalábbis a jelenlegi ismereteink szerint. A háromszög-egyenlőtlenség helyett pedig a koszinusz-tétel megfelelőit érdemes használni az egyes számsíkokon.[13]

A fentiek alapján a **konvergencia** szokásos definíciója nem alkalmazható, azaz a normából definiált távolságfogalomból nem indulhatunk ki egy határérték meghatározásakor. Mint korábban többször említettem, nem tartom jó megoldásnak, ha erre a célra a komplex számkörre jellemző euklideszi normát definiálom a másik két számsíkon is. Ehelyett inkább a **Melléklet II**-ben alkalmazott módszert tartanám jónak, így az egyes szám-koordináták valós egydimenziós euklideszi vektorterében bevezethető a klasszikus távolság és ebből a konvergencia-fogalom, és a szám-koordinátákra ily módon bevezetett konvergenciából definiálom a számpontok konvergenciáját. Mindhárom számsíkon az így bevezetett konvergenciából következik a norma, mint vektorhossz nullához konvergálása a számsorozat megfelelő elemei és a határérték különbség-vektorára vonatkozóan, de ez fordítva csak a komplex számsíkon igaz. Meggondolandó esetleg, hogy a norma-négyzeteket definiáljam vektor-hossznak, azaz normának. Ez sok szempontból hasznos lenne a fizikai leírásokban, de matematikailag indokoltabbnak tartom a koordinátanégyzetekből vont négyzetgyökvonást normának tekinteni.

A kételemű számok síkjain nemcsak a norma és a konvergencia kezelendő másképpen, de az olyan fontos fogalmak, mint az **ortogonalitás** is speciális értelmet nyer. A hiperbolikus számsíkon nem definiálhatjuk az ortoganalitást szögfüggvényekkel, hiszen itt az argumentumok – vagy fázisok, ahogy **Moldoveanu** nevezi – nem trigonometrikus, hanem hiperbolikus függvények argumentumai. A skalárszorzat viszont itt is a komplexekkel azonosan definiált, ha számvektorra írjuk fel a definíciót. Nevezetesen **két számvektor skaláris szorzata az egyik vektor és a másik konjugáltja szorzatának valós része:** $\boldsymbol{Re(\overline{z_1}z_2)}$. Magától értetődő gondolat hát, hogy **az ortogonalitást a skalárszorzattal definiáljuk**, azaz a komplexekhez hasonlóan a hiperbolikus számsíkon is akkor nevezünk két vektort ortogonálisnak, ha a skalárszorzatuk nullával egyenlő. A hiperbolikus számsíkon a skalárszorzat definícióját a számvektorok koordinátáira átírva a komplex számsíktól eltérő definíciót kapunk a képzetes egységelemek eltérő volta miatt. Azaz a skalárszorzatnak mind az algebrai (koordinátákban kifejezett), mind a geometriai formája eltér a hiperbolikus és a komplex esetben. **Hiperbolikus számvektorok akkor ortogonálisak a fenti értelemben, ha olyan egyenesekre illeszkednek, melyek egymás tükörképei az y=x egyenesre**. Ez a tulajdonság jól ismert a speciális relativitáselméletből a Lorentz transzformáció következményeként. A parabolikus számsíkon is bizonyos szempontból hasonló eredményre jutunk, ha az ortogonalitást a skalárszorzat nulla értékével definiáljuk. Itt is azok a számvektorok ortogonálisak, melyeknél a skaláris szorzatban az egyik tényező a másiknak a képzetes egység, azaz itt j számszorosa ($j^2=0$). Ez a parabolikus számsíkon azt jelenti, hogy tetszőleges számvektorra ortogonális számvektorok a képzetes tengelyen helyezkednek el. Másképp kifejezve általánosságban igaz az a hiperbolikus és a parabolikus esetben, hogyha az egyik számvektor a másik számvektor képzetes számszorosa, akkor ortogonálisak. Ez utóbbi tulajdonság azonos a komplex esetben is, hiszen ott a képzetes egységgel, i-vel való szorzás $90^0$-os elforgatást jelent, ami azonos a klasszikus értelemben vett ortogonalitással.

## 4. Összefoglalás, és a jövő körvonalai

Egyre világosabban körvonalazódik, hogy a kvantummechanika matematikája – bármely módszertanát tekintjük – egy általános eszköztárat jelent a fizikai jelenségek leírására. A

[13] Lásd a Melléklet I. 4. pontját.

Hilbert tér formalizmusában a legnyilvánvalóbb a kételemű számok vízválasztó szerepe, azaz a képzetes egységtől függően kapjuk meg a parabolikus és a komplex esetben a klasszikus mechanika, és a QM valószínűségi leírásait, és a hiperbolikus képzetes egység használata egy – eddig nem tárgyalt – jelenségsor, a sokak által hiperbolikus kvantummechanikának nevezett terület leírására alkalmas. Azt feltételezem, hogy az entrópia-változás jellege határozza meg, hogy a Hilbert tér formalizmusban mely kételemű számot kell használnunk a tér koordinátáiként: komplex számot, ha az entrópia növekszik, parabolikus számot, ha az entrópia nem változik, és hiperbolikus számot, ha az entrópia csökken a megfigyelt változás során.

A kételemű számok kapcsolata a téridővel, és aktuális végtelenként való értelmezésük lehetőséget teremt arra, hogy megértsük, miért is kell a kételeműek norma-négyzetével számolni, hogy valós valószínűségekhez jussunk, és egy adott esetben mi az oka annak, hogy a kételemű számok közül épp azt a típust kell használnunk, amit a tapasztalat megkövetel.

Nem gondolom, hogy megtaláltuk már a valóság leírására legalkalmasabb matematikai eszköztárat, azt, ami a QM sokféle formalizmusa helyére léphet. Véleményem szerint a számfogalom bővítésére van ehhez szükség, egy olyan számhalmazra, melynek alapelemei a kételemű számok. Mivel a kételemű számok a **Clifford-**algebra, s így a **geometriai algebra legegyszerűbb, egydimenziós vektorok által generált fajtáit** reprezentálják, ezért továbbra is a geometriai algebra segítségével gondolom ennek a számhalmaznak a felderítését. Ugyanakkor a Hilbert-tér formalizmusának tanulmányozása is hasznos lehet ebben a munkában, a QM többi csoportelméleti módszertanával együtt.

# Melléklet I.

## 1. A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (M1)$$

Ahol x és y valós számok, **δ** = **i, j, k** (**i**²=-1**, j**²=0**, k**²=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket polárkoordinátás alakokat kapom

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \qquad (M2)$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi - \boldsymbol{j}sp\varphi) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (M3)$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \boldsymbol{i}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható exponenciális alakkal:

$$z = \varrho e^{\delta\varphi} \qquad (M5)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz az, hogy

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta}y}{x - \boldsymbol{\delta}y}} = \ln\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}} \qquad (M6)$$

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ** = **i, j, k** (**i**²=-1**, j**²=0**, k**²=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta}y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta}y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényekre **cp [arg(z)] ≡ 1**, **sp [arg(z)] = y/x**, ahol **arg z = y/x**.

## 2. Belső szorzat, vagy skalárszorzat és a kvadratikus forma a kételemű számokon

Mindhárom számsíkon **belső szorzatnak, vagy skalárszorzatnak** nevezzük a következő:

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1}z_2) \qquad (M7)$$

leképezést, ahol Re jelöli a szorzat valós részét, a felülvonás pedig a szám konjugáltját jelzi.

Így a skalárszorzatra a következők adódnak a polár- és a Descartes-koordináták felhasználásával:

**Hiperbolikus esetben**

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2| \cosh(\tau_2 - \tau_1) = x_1 x_2 - y_1 y_2 \tag{M8}$$

**Parabolikus esetben**

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2| = x_1 x_2 \tag{M9}$$

**Komplex számsíkon**

$$\langle z_1, z_2\rangle = Re(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \tag{M10}$$

A fenti három definícióból a Descartes-koordinátákra vonatkozóan az alábbi összefüggés írható le:

$$\langle z_1, z_2\rangle = x_1 x_2 - \boldsymbol{\delta}^2 y_1 y_2 \tag{M11}$$

Ahol **δ = i, j, k** (**i**$^2$=-1, **j**$^2$=0, **k**$^2$=1)

A definícióból következik, hogy a fenti leképezések mindhárom számsíkon nem elfajuló szimmetrikus bilineáris formák, melyekből származtatott **kvadratikus formák** a számvektorok speciális norma-négyzetével egyeznek meg az adott számsíkon definiált módon, azaz

$$Re(\overline{\mathrm{z}}\mathrm{z}) = |\overline{\mathrm{z}}||\mathrm{z}| \tag{M12}$$

Mely koordinátákkal kifejezve:

**Hiperbolikus esetben**

$$Re(\overline{\mathrm{z}}\mathrm{z}) = |\overline{\mathrm{z}}||\mathrm{z}| = \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 \tag{M13}$$

**Parabolikus esetben**

$$Re(\overline{\mathrm{z}}\mathrm{z}) = |\overline{\mathrm{z}}||\mathrm{z}| = \mathrm{x}^2 \tag{M14}$$

**Komplex számsíkon**

$$Re(\overline{\mathrm{z}}\mathrm{z}) = |\overline{\mathrm{z}}||\mathrm{z}| = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \tag{M15}$$

## 3. Külső szorzat, vagy szimplektikus bilineáris forma a kételemű számokon

Mindhárom számsíkon **szimplektikus bilineáris formának, vagy külső szorzatnak** nevezzük a következőt

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\overline{z_1} z_2) \tag{M16}$$

Ennek a leképezésnek a számok koordinátáira átírt formája azonos a három számsíkon. A polár- és a Descartes-koordinátákkal a ferde skaláris szorzat a következő a három számsíkon:

**Hiperbolikus esetben**

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2|\, sinh(\tau_2 - \tau_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{M17}$$

**Parabolikus esetben**

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2|(sp \arg z_2 - sp \arg z_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{M18}$$

**Komplex számsíkon**

$$\omega(z_1, z_2) = Im(\overline{z_1} z_2) = |\overline{z_1}||z_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{M19}$$

# 4. Geometriai elemek a kételemű számok síkjain

## 4.1 A szorzás képe

Mindhárom számsíkon a számok **szorzásánál** a normák szorzódnak, az argumentumok összeadódnak, és az egységvektorok szorzása egy-egy fizikai mozgást ír le:

- körmozgást a komplex számoknál,
- egyenes menti eltolást a parabolikus számoknál,
- hiperbolikus forgatást – azaz Lorentz-forgatást – a hiperbolikus számoknál.

## 4.2 Az összeadás képe

E számok **összeadás**ának síkbeli képe vektorok összeadása, tehát a paralelogramma-szabályt követi. A kételemű számok polár-koordinátás alakjában szereplő speciális normák képzetes számok is lehetnek, melyek rendezettsége még kérdéses, ezért a rájuk felírható háromszög-egyenlőtlenségek is megbízhatatlanok. A normák négyzetére felírt összefüggések viszont változatlanul érvényben maradnak, így a kételemű számoknál a koszinusz tétel, illetve annak megfelelői változatlanul igazak:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\langle z_1, z_2\rangle \qquad \text{(M20)}$$

A fenti M20-as összefüggésben a skalárszorzatnak a Descartes-koordinátákra felírható alakját kell használni, azaz

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2(x_1 x_2 - \boldsymbol{\delta}^2 y_1 y_2) \qquad \text{(M21)}$$

ahol **δ = i, j, k** (**i**$^2$=-1, **j**$^2$=0, **k**$^2$=1)

Így ugyanis nyilvánvaló, hogy a skalárszorzat negatív szám is lehet a hiperbolikus számokon, azaz általánosságban nem igaz a sokat emlegetett hiperbolikus háromszög-egyenlőtlenség.

A kvadratikus formákra vonatkozó összefüggéseket felhasználva a fenti összefüggések a következő formába önthetőek a **komplex,** a **parabolikus** és a **hiperbolikus** számoknál az egész számsíkon:

$$|z_1 + z_2|^2 = \sum_{i,j=1,2} \langle z_{\mathrm{i}}, z_{\mathrm{j}}\rangle \qquad \text{(M22)}$$

Ez tetszőleges számú összeadandónál is igaz, így

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 = \sum_{i,j=1,2,\dots n} \langle z_{\mathrm{i}}, z_{\mathrm{j}}\rangle \qquad \text{(M23)}$$

# 5. A kételemű számok és a geometriai algebra

A kételemű számok a kvadratikus formával ellátott egydimenziós térből generált kétdimenziós **Clifford-**algebrát reprezentálják. Elmondhatjuk, hogy **a geometriai algebra legegyszerűbb, egydimenziós vektorok által generált fajtái egyáltalán nem szegényes szerkezetűek, hanem igen izgalmas alapstruktúrát mutatnak a komplex, a parabolikus és a hiperbolikus számok formájában**.

## 6. Geometriák modellezése

Ha egy gömb sugarát R, görbületét ρ-val jelölöm és az arányukra a következő igaz:

1. $\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$
2. $\boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$
3. $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{R}}$

ahol $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{j}^2=0$, $\mathbf{k}^2=1$, akkor ezeken a gömbökön leírt síkgeometria a hiperbolikus, az euklideszi és a gömbi síkgeometria modellje.

Természetesen ez egyelőre csak formai érdekesség, hiszen például a 2. esetben az R sugár, mint kételemű szám nem értelmezhető, a többi esetben pedig a sugár és a görbület, mint képzetes szám értelmes, de mint geometriai fogalom csak a kételemű számok képzetes részének végtelen értelmezésével közelíthető meg.

Megjegyzem, hogy a **Bolyai**-geometriát formálisan egy komplex sugarú gömbön modellezték eddig, itt pedig komplex görbületű gömböt használtam az analógiára. Az elliptikus és a hiperbolikus esetben ez formálisan mindegy, de a parabolikus számoknál az R, mint sugár nem értelmezhető kételemű számként, amint utaltam rá, ezért indultam ki a görbületekből. Az extenzív és intenzív végtelenek dualitásából viszont az következik, hogy akár a sugárból, akár a görbületből való kiindulás ugyanarra az eredményre vezet.

## 7. Halmazelméletek modellezése, és a végtelen, mint új minőség megjelenítése

A kételemű számok, mint végtelen-modellek a kontinuum-hipotézist nem tagadják, hanem – a geometriabeli párhuzamossági axiómákhoz hasonlóan – három lehetséges változatát nyújtják a **Cantor** által megfogalmazott „nincsenek közbülső számosságok” féle állításnak. A klasszikus kontinuum hipotézis a komplex számsík által modellezhető. A három számsík, mint végtelen-modell egyikéhez sem tartozik hozzá aktuális létezőként a $10^{\mu}$ formában felírható nagy szám modellbeli megfelelője, ahol μ a természetes számok számosságát jelöli. Aktuálisan létező, tehát a számsíkon konkrét számként megjelenő végtelen-modell, azaz minden n természetes számnál nagyobb számnak a megfelelője, mely ugyanakkor definíciója szerint $10^{\mu}$-nél kisebb végtelen: a ***parabolikus számsíkon egyetlen*** létezik, a ***hiperbolikus számsíkon viszont végtelen sok*** van belőle. A ***komplex számsíkon pedig nem létezik*** konkrét számként megjelenő, azaz aktuálisan létező végtelen nagy szám modellbeli megfelelője.

**Ilyen módon a háromféle számsík, mint szám-modell megfeleltethető a kontinuummal kapcsolatos állítás egy-egy speciális megfogalmazásának**.

Azért nem nyilvánvaló a kételemű számokban rejlő végtelen-modell, mert ezek a számrendszerek a végtelent nem mennyiségként, hanem minőségében újként mutatják meg. Általuk a végtelen legfontosabb tulajdonságát tudjuk ábrázolni; a végtelennek nem a mennyiségi, hanem a minőségi oldalát. **A végtelen, mint másféle minőség egy új dimenzióként jelenik meg matematikailag a fent említett számrendszerekben**.

# Melléklet II.

## Gondolatjáték hiperbolikus normával és konvergencia-definícióval

Az egyes szám-koordináták valós egydimenziós euklideszi vektorterében bevezethető a klasszikus konvergencia-fogalom. Mindkét koordinátára ily módon bevezetett konvergenciából **definiálom a számpontok konvergenciáját** is, azaz

$x_1=x_{11}+\mathbf{k}x_{12}$, $x_2= x_{21}+\mathbf{k}x_{22}$, $x_3= x_{31}+\mathbf{k}x_{32}$ … számpontok sorozata, ahol $\mathbf{k}^2=1$

az $a=a_1+\mathbf{k}a_2$ hiperbolikus **számhoz konvergál**, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 - ra\ \exists\, n(\varepsilon), hogy\ |x_{i1} - a_1| < \varepsilon \text{ és } |x_{j2} - a_2| < \varepsilon\ ha\ i, j > n(\varepsilon) \qquad (1)$$

**A hiperbolikus számsíkon megadott bármely metrikára feltételül szabom, hogy a fenti konvergencia esetén a metrika nullához konvergáljon** a valós számkör klasszikus konvergencia definíciója szerint, így a **Moldovaenu** által definiált para-**metrikára is igaz kell legyen (1) teljesülése esetén, hogy**

$$d(x_i, \mathrm{a}) < \varepsilon \qquad (2)$$

Megjegyzem, hogy **ez az elvárás a hiperbolikus normára** valóban teljesül is.

Legyen $b_i=b_{i1}+\mathbf{k}b_{i2}$ hiperbolikus számok sorozata, melyek divergálnak a fent leírt $a=a_1+\mathbf{k}a_2$ számhoz képest. Azaz

$$\forall\, \delta > 0 - ra\ \exists\, N(\delta)\ természetes\ szám, hogy\ \mathrm{d}(\mathrm{a}, b_i) > \delta\ \ ha\ i > N(\delta) \qquad (3)$$

Ekkor az $x_i$, a, $b_i$ számok alkotta háromszögre felírva a hiperbolikus háromszög-egyenlőtlenséget, és felhasználva azt, hogy d nem negatív valós szám:

$$d(x_i, \mathrm{a}) \geq d(\mathrm{a}, b_i) + d(b_i, x_i) \geq d(\mathrm{a}, b_i) \qquad (4)$$

De a (2) alapján a fenti egyenlőtlenség bal oldala kisebb egy tetszőlegesen kicsi valós számnál, ugyanakkor (3) alapján nagyobb egy tetszőlegesen nagy számnál, azaz

$\forall\, \varepsilon > 0 - ra$ és $\forall\, \delta > 0 - ra\ \ \varepsilon > d(x_i, \mathrm{a}) > \delta$ ha $i > N(\delta), n(\varepsilon)$ ez azonban **lehetetlen**.

**A fenti gondolatsor megkérdőjelezi a hiperbolikus számsíkbeli háromszög-egyenlőtlenség igaz voltát a klasszikus definíciók – például kongruencia matematikai leírása – mellett. Ez utóbbira viszont szükségünk van, ha fizikai rendszerek leírására használjuk a hiperbolikus számokat.**

A fenti gondolatjáték megerősít abban az elképzelésemben, hogy a probléma a hiperbolikus háromszög-egyenlőtlenség értelmezésében van, azaz a hiperbolikus normák nem valósak, hanem képzetes számok.