A kételemű számok topológiája I.

Már egy korábbi cikkemben[1] írtam arról, hogy a valós törtek ábrázolásának egyértelművé tételénél[2] Cantor kizárta az intenzív végtelen értelemben aktuálisan végtelen infinitezimálisok létét, és ezzel becsempészte a feltételezések közé a kontinuumhipotézist.

Érintettem az egyik cikkben[3] azt is, hogy a kételemű számok kapcsolata – mind az extenzív, mind az intenzív értelemben vett – végtelennel megfeleltethető a kontinuumhipotézis egy-egy megfogalmazásának. A komplex, azaz elliptikus esetben nem léteznek aktuálisan másodrendű infinitezimálisok, a parabolikus esetben léteznek, de csak egyértelműen[4], végül a hiperbolikus esetben végtelenül sok másodrendű infinitezimális létezik.

A kételemű számok topológiáját jól tükrözi a *„Kételemű számok alaptulajdonságainak összehasonlítása”* cikkben található táblázatban szereplő általánosított abszolutérték, és a belőle származtatható általánosított mérték fogalom. **A komplex számok számtestet alkotnak, és a jól ismert mérték adja meg a számok távolságát. A parabolikus és a hiperbolikus számok számgyűrűt alkotnak, a parabolikus esetben létezik egy ideál, amely egy számegyenes, a második esetben két ideál létezik, két, egymásra merőleges számegyenes.** A parabolikus számsík könnyen metrikussá tehető, ha az ekvivalencia osztályokat az x tengelyre merőleges egyenesen elhelyezkedő számok alkotják. A hiperbolikus számsík nem tehető ilyen könnyen metrikussá.

A topológiájukat még szemléletesebben tükrözi, ha általánosan értelmezzük a másodrendűen infinitezimális környezeteket, röviden mikro-környezeteket a következő módon:

Minden n-re létezik $\varepsilon_0 \neq 0$, hogy $0<\varepsilon_0<1/n$.[5] Ekkor a következő három lényegesen eltérő eset állhat elő:

1. A számpontoknak az ε_0 környezetei **üresek** (leszámítva magát az adott számpontot) – azaz **nincs aktuálisan végtelen m a számsíkon** – ez a komplex eset: a számpont zárt halmaz, nyílt környezeteinek metszete egyetlen szám.
2. A számpontoknak az ε_0 környezetei (leszámítva magát az adott számpontot) **nem üresek**, a számpontok nyílt halmazok, a nyílt valós környezetek metszete végtelen sok másodrendű számot tartalmaz. Ennek az esetnek **két lényegesen eltérő módozata** létezik:
    a. Parabolikus esetben **egyetlen nem valós típusú ε_0 környezet** létezik: $\{0<\varepsilon_0<1/n$ minden n-re, $\varepsilon_0 \neq 0$ és $\varepsilon_0^2=0\}$.
    b. Hiperbolikus esetben legalább kétféle nem valós típusú ε környezet létezik:

[1] „Problémák Cantor diagonális módszerének használatában”
[2] A végtelen sok 9-est tartalmazó valós törtek kizárása azt jelenti, hogy - egyetlen példán bemutatva - a következő számok egyenlők: 0,4999…= 0,5000…. Ez az állítás tagadja olyan parányok létét, amelyek kisebbek az 1/n sorozat minden eleménél, de nagyobbak 0-nál. A 0,999... = 1 egyenlőséggel kapcsolatos gondolatok, viták, bizonyítások egy tűrhető leírása megtalálható a **Wikipédián**.
[3] „A matematikai folytonosságról”
[4] Ez az egyértelműség épp az itt következő leírásban válik világossá.
[5] ε_0 nem lehet valós szám, egyelőre csak azt lehet tudni róla, hogy minden valós törtnél kisebb, de nem 0. Problematikus a rendezettség is, azaz jelen esetben a „kisebb” megfogalmazás. Így a fenti gondolatok egyelőre csak munkahipotézisnek tekinthetők.

$\{0<\varepsilon_1<1/n$ minden n-re, $0<\varepsilon_2<1/n$ minden n-re, $\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\neq 0$, $\varepsilon_2\neq 0$, $\varepsilon_1\varepsilon_2=0\}$. Ekkor természetesen végtelen sokféle ilyen környezet van, hiszen $x\varepsilon_1+y\varepsilon_2$ minden x, y pozitív valósra nem valós típusú környezetet ad.

A fenti topológiák a kételemű számsíkokon csak a komplex esetben biztosítanak klasszikus értelemben vett folytonosságot. Épp azokban az esetekben – a parabolikus, és a hiperbolikus számsíkon – szűnik meg a klasszikus folytonosság, amelyeket úgy tudok értelmezni, hogy a végtelen aktuális értelemben jelen van. Nem szabad elfelejteni, hogy **a folytonosság is a végtelenség egyfajta megjelenése**: „… a kontinualitás a végtelenség egyik formája, csakhogy nem extenzív, hanem intenzív típusú.”[6] Nagyon fontos, hogy épp a folytonossági definíciók ekvivalenciájának bizonyítása az egyik klasszikus példa a kiválasztási axióma használatának szükségességére.

Mielőtt folytatnám a következő fejezettel, még egy fontos megjegyzést kell tennem. A **kételemű számsíkok számhalmaza Cantor-i értelemben azonos számosságú**, hiszen a számokat triviálisan meg tudom feleltetni egymásnak az elemeik valós szorzóinak megfeleltetésével. A **topológiájuk viszont lényegesen különbözik**. Tehát ugyanazon a ponthalmazon – egy síkon – ábrázolok különböző hatást mutató aktuális végteleneket oly módon, hogy a végtelenek tulajdonképpen nem növelik meg a számosságot, de lokális hatásuk különbözősége mutatja meg milyenségüket, vagy mértéküket. Ez nagyon hasonló ahhoz, amint a háromféle – síkjaiban mindenütt egyforma – geometria síkjának a „végtelenbe nyúló” különbözősége megmutatkozik a lokálisban is, azaz a háromszögek szögeinek összegére vonatkozó összefüggésben.

[6] E.M.Csugyinov, A Világegyetem végtelenségének problémája a relativisztikus kozmológiában a logika szemszögéből.