A végtelen kicsiben és nagyban III.

Határérték és folytonosság a kételemű számokon[1]

> *„Jó ok adható arra, hogy miért nem lehet a valóságot folytonos mezőként ábrázolni. A kvantumjelenségekből látszólag biztosan következik, hogy egy véges energiájú, véges rendszer teljes mértékben leírható véges számok (kvantumszámok) véges halmazával. Úgy tűnik, hogy ez nincs összhangban a kontinuumelmélettel, és ahhoz kell vezetnie, hogy megpróbáljunk egy tisztán algebrai elméletet találni a valóság leírására. De senki sem tudja, hogyan lehet egy ilyen elmélet alapjaihoz hozzájutni.*" (**Albert Einstein**, A relativitáselmélet értelme).[2]

A matematikai folytonossággal hasonló a probléma, mint a végtelennel; élesen eltér ugyanis a valóságban tapasztalható folytonosság a matematikában definiált fogalomtól. Amint aktuálisan létező *mennyiségi* végtelent nem tapasztalunk, úgy folytonosságot sem tapasztalhatunk abban az értelemben, amint azt a matematika definiálja, és e kettő ok-okozati kapcsolatban áll egymással.

Ez az írás szorosan kapcsolódik e cikksorozat előző két részéhez, csak azok ismeretében lesznek érthetőek e cikk egyes részei. Ugyanakkor nem fogok minden alkalommal hivatkozni ezekre az előzményekre, egy sorozat részeként természetesnek fogom tekinteni az előtörténet ismeretét.

1. Bevezetés

A régóta ismert komplex számok körében könnyű volt értelmezni a konvergenciát és az analízis szinte minden elemét, hiszen *lényegét tekintve* ezeknek nem kellett sokban különböznie a valós vektoranalízisben használtaktól, a komplex számok, mint számvektorok értelmezése és abszolútértékük miatt. Ez a „hasonlóság" most még jobban érthető a komplex képzetes végtelen-kapcsolatából, pontosabban az intenzív és az extenzív végtelen *hiányát* modellező szerepéből, itt a végtelen alatt a kontinuumhipotézisben (CH)[3] megfogalmazott végtelent értve.

---

[1] A kételemű számok alaptulajdonságait lásd a **Melléklet**ben.

[2] „*One can give good reasons why reality cannot at all be represented by a continuous field. From the quantum phenomena it appears to follow with certainty that a finite system of finite energy can be completely described by a finite set of numbers (quantum numbers). This does not seem to be in accordance with a continuum theory and must lead to an attempt to find a purely algebraic theory for the description of reality. But nobody knows how to obtain the basis of such a theory.*" (***Einstein***, The meaning of relativity)

[3] A CH feltételezése szerint a valós számok számossága – azaz a kontinuumszámosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. Ennek két alternatívája az, hogy közöttük egyetlen egy, vagy legalább kettő – amiből következik, hogy végtelen sok – végtelen nagy számosság létezik.

Megjegyzés

W. R. Hamilton (1805-1865) munkáiban tűnik fel annak megértése, hogyha számpároknak tekintjük a komplexeket, akkor a számpárokon definiált műveletek definiálják a komplex számokat. Megjegyzem, hogy a kételeműek képzeteseinek – így a komplex képzetesnek – végtelen-értelmezése miatt fontosabbnak tartom azt, hogy ugyan a műveletek definiálják a kételemű számokat, de ezeket az alapműveleteket a képzetes számok definíciói **(δ = i, j, k, $i^2=-1$, $j^2=0$, $j\neq 0$, $k^2=1$, $k\neq 1$)** határozzák meg a valós számokon már bevezetett alapműveletekkel együtt. Így a kételemű számok halmazelméleti megközelítése helyett alapvetőbbnek tartom az *algebrai, számelméleti* megközelítésüket. Matematikatörténeti érdekesség, hogy a zseniális **Hamilton** úgy vélte, hogy a geometria által leírt tér mellett az „algebra a tiszta idő" tudománya[4]. Az idő egydimenziós jellegét jól tükrözte a valós számok számrendszere, számegyenesként való ábrázolása, de a komplex számsík kétdimenziós jellege már nem harmonizált az idő egydimenziós jellegével, ezért közelítette meg a komplexeket **Hamilton** számpárokként. Korunk fizikai alapismeretei és a végtelenek matematikája segít most hozzá bennünket, hogy a kételeműekkel modellezzük a téridőt, a valósok számegyenesével az időt, a képzetesekkel a teret. Ennek egy részére érzett rá **Hamilton**, és az már csak a saját vélekedésem, hogy a kvaterniók felfedezése és korának fizikai ismeretei akadályozták meg **Hamilton**t a parabolikus (duális) és a hiperbolikus képzetesek fontosságának és vele a képzetesek teret modellező szerepének felismerésében.

Szemben a komplex számokkal, a parabolikus (duális) és a hiperbolikus számok képzetesei már *aktuálisan létező* infinitezimálisakat is modelleznek, ez többek között abban „nyilvánul meg" matematikailag, hogy a komplexek számtestével szemben ezek a számok valódi ideált tartalmazó számgyűrűk. Miközben a parabolikus és a hiperbolikus számok analízise nagyrészt kidolgozatlan a matematikában, a fizikában viszont már nagyon jól használhatónak bizonyultak. Egyik példa erre a parabolikus és a hiperbolikus kételemű számok, mint a téridő-modellek: a **Lorentz**-transzformáció „képe" a hiperbolikus számsíkon egy hiperbolikus egységvektorral való szorzás, a **Galilei**-transzformáció képe szintén egységvektorral való szorzás, de parabolikus egységvektorral a parabolikus számok síkján.[5] A komplex számokról pedig ismert, hogy a kvantummechanikában (QM) egy hullámfüggvény és annak $e^{i\Theta}$-szerese fizikai szempontból egyenértékű, azaz a komplex egységvektorral való szorzás is egyfajta téridőbeli mozgás-szimmetriát tükröz

Megjegyzés

A QM-beli mozgásszimmetria alapján joggal feltételezhető, hogy a komplex számok téridő-értelmezésével a QM is háttérfüggetlenné tehető. Az egységvektorral szorzott hullámfüggvény ugyan fizikai szempontból egyenértékű, ez azonban nem a teljes igazság, hiszen az egységvektorral való szorzás változtat az argumentumon, és az eddigi vélekedéssel szemben már tudjuk, hogy nemcsak a komplex norma, de az argumentum is módosít a valószínűségen, hiszen ezzel magyarázható az interferencia és a stacionárius hatás. Ebben a gondolatsorban pedig benne rejlik a hullámfüggvény – és ezzel az egész jelenlegi QM – nem-teljességének gondolata.

[4] Lásd például: https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/PureTime/PureTime.pdf
[5] Lásd például a „*Galilei-transzformáció és a parabolikus számok*" című cikket: https://www.infinitemath.hu/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok

2. A konvergencia és a folytonosság matematikája a kételemű számokon

DALL-E 3 / MK_Fantázia

" Van két híres labirintus, ahol értelmünk nagyon gyakran tévútra jut: az egyik a Szabad és a Szükséges nagy kérdésére vonatkozik, mindenekelőtt a teremtésben és a Gonosz eredetében; a másik a Folytonosság és az – elemeinek tűnő – Oszthatatlanok vitája, és ahol szükséges a végtelen figyelembevétele."
*(**Gottfried Wilhelm Leibniz**, Teodícea)*[6]

Újra és újra elámulok azon, hogy **Leibniz** a két nagy problémájának egyikeként a „folytonosság/oszthatatlan/végtelen" szentháromságot említi a „szabad/szükséges/gonosz" gondolatköre mellett. A filozófus **Leibniz** nem tudta megtagadni a matematikus **Leibniz**et.

Megjegyzés

Bár lenne korunkban is olyan filozófus, aki a matematikát éppúgy, vagy még jobban műveli, mint a filozófiát.

Sokakban felmerült később is a gondolat, hogy a „kontinualitás a végtelenség egyik formája, csakhogy nem extenzív, hanem intenzív típusú. Ez a tér és az idő 'belső' végtelenségét jellemzi. A véges és a végtelen közötti különbségek viszonylagossága tehát éppen azért van meg, mert a végesben már benne rejlik a végtelenség. A relativizáció eljárása csupán annyiból áll, hogy bizonyos módszerekkel a végtelenséget intenzív formájáról lefordítjuk extenzív formájára"[7]. Én ennek épp a fordítottját tettem meg, amikor a **Cantor** által extenzív végtelenekre megfogalmazott CH-t intenzív végtelenre is alkalmaztam.[8] A folytonosság „epszilon-deltás" definícióinak klasszikus megfogalmazásai a CH-t tartalmazó számkörökben továbbra is használhatóak maradtak, ám a CH alternatívákat tartalmazó számkörökben, például az ezeket modellező parabolikus és hiperbolikus számhalmazokon már módosításra szorulnak.

Belátható, hogy a kételemű számok sorozatának konvergenciájára elégséges feltétel, ha a számok mindkét koordinátája konvergens a valós számokon értelmezett konvergencia-kritériumok alapján, koordináta alatt értve a kételeműek valós elemét és a képzetes elemének valós számszorzóját a **Descartes**-koordináták esetén. Polárkoordináták esetén is mindkét koordináta – azaz a norma és az argumentum – konvergenciája elégséges a kételemű számpontok konvergenciájához. Ki kell emelni, hogy a komplex számok kivételt képeznek a polárkoordináták alapján tekintve a konvergenciát, mert ekkor a számpontok sorozatának konvergenciájához elégséges csak az egyik polárkoordináta, a norma konvergenciája. Mondhatjuk tehát, hogy mindhárom számsíkon elégséges feltétel a számpontok konvergenciájára a **Descartes**- vagy a polárkoordináták egyenkénti konvergenciája, ez a parabolikus és hiperbolikus számsíkon szükséges feltétel is, de a komplexek esetében az egyik

---

[6] **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) németül, franciául és latinul írta műveit. A *Teodiceát* franciául írta, benne a mottó a következő:
„Il y a deux Labyrinthes fameux, ou notre Raison s'égare bien fouvent: l'un regarde la grande Question du Libre et du Necessaire, sur tout dans la production & dans l'Origine du Mal; l'autre consiste dans la discussion de la Continuité, et des Indivisibles, qui en paroissent les elements, & ou doit entrer la consideration de l'infini."
Forrás: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6528777d/f13.item.r=labyrinthe.zoom

[7] Lásd **E. M. Csugyinov**, „*A Világegyetem végtelenségének problémája a relativisztikus kozmológiában a logika szemszögéből*" című cikkét a „*Végtelenség és világegyetem*" kötetben (240. oldal), amely a Gondolat kiadó gondozásában jelent meg 1974-ben.

[8] Lásd például „*Az idő, a tér és a végtelen*" című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/88-az-ido-a-ter-es-a-vegtelen

polárkoordináta, a norma konvergenciája már szükséges és elegendő feltétel.

Nem értek egyet azzal a fizikus körökben elterjedt szokással, hogy hiperbolikus és parabolikus esetekben a konvergencia-definíciókban definiálnak egy klasszikus „mértéket”, a kételemű számokat tekintve a komplex normával egyezőt, mert ez a komplexeken kívül semmiképp sem mérték abban az értelemben, amit a mozgásszimmetriákról elmondhatunk. Nagyon megtévesztő így – a komplex normával egyező függvény nullához konvergálásával – definiálni a konvergenciát. E függvényből ugyan levezethető a **Descartes**-koordináták egyenkénti konvergenciája, így matematikailag következik belőle a számpontok konvergenciája, de ez a függvény nem szolgál invariáns mértékül a parabolikus és a hiperbolikus számsíkokon modellezett alapmozgásoknál, nem tükrözi a számsíkok topológiáját, nincs „fizikai jelentése”, csak egy matematikai trükk.

Mondhatjuk tehát, hogy a kételemű számok síkján a számpontok konvergenciáját a következőképpen definiálhatjuk:

$\{z_n=x_n+\boldsymbol{\delta}y_n\}$ kételemű számpontok sorozata a $z_0=x_0+\boldsymbol{\delta}y_0$ számponthoz ($\boldsymbol{\delta}$ **= i, j, k, i²=−1, j²=0, j≠0,** $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$, x_n, y_n, x_0, y_0 valós számok) konvergál, azaz jelöléssel

$$z_n \to z_0$$

ha teljesül, minden $n \to \infty$, hogy (2)

$$x_n \to x_0 \qquad \text{és} \qquad y_n \to y_0$$

Ahol $x_n \to x_0$ és $y_n \to y_0$ a valós számokon értelmezett klasszikus konvergenciát jelölik. Az n természetes szám divergens sorozatára itt is használhatjuk az $n \to \infty$ jelölést, de ez a jelölés nem konvergenciát, és a ∞ nem konkrét, aktuális végtelent jelent, hanem „csak” *potenciális* végtelen mennyiséget jelöl. Így a $n \to \infty$ jelölés a természetes számok sorozatának *divergenciáját* fejezi ki, tehát azt, hogy bármely N természetes számra létezik a sorozatnak olyan n’ eleme, amelyre n’>N.

A fenti (2) definíció a valós számokon értelmezett konvergencia-definícióra van visszavezetve, és nem tartalmaz pontkörnyezet-fogalmat, mivel a hosszmértékként értelmezhető norma csak a komplexek esetében valós szám az egész számsíkra.

A folytonos függvények definiálása a fentiek figyelembevételével a következő:

A kételemű számok; $z=x+\boldsymbol{\delta}y$ ($\boldsymbol{\delta}$ **= i, j, k, i²=−1, j²=0, j≠0,** $\mathbf{k}^2=1$, $\mathbf{k}\neq 1$) számsíkján az f(z) (egyértékű) függvény a számsík valamely M ponthalmazának $z_0=x_0+\boldsymbol{\delta}y_0$ (x_0, y_0 valós számok) pontjában folytonos, ha bármely olyan $\{z_n=x_n+\boldsymbol{\delta}y_n\}$ (, x_n, y_n, valós számok) pontsorozatra, amelyre

$$z_n, z_0 \in M \quad \text{és} \quad z_n \to z_0$$

igaz, hogy (3)

$$f(z_n) \to f(z_0)$$

Ahol $z_n \to z_0$ a fenti (2) szerinti kételeműeken definiált konvergencia, és az $f(z_n) \to f(z_0)$ konvergencia pedig a

$f(z_n) = f(x_n + \boldsymbol{\delta}y_n) = u(x_n, y_n) + \boldsymbol{\delta}v(x_n, y_n)$ pontsorozat konvergenciáját jelenti az

$f(z_0) = f(x_0 + \boldsymbol{\delta}y_0) = u(x_0, y_0) + \boldsymbol{\delta}v(x_0, y_0)$ ponthoz, szintén a (2) szerinti kételeműeken definiált konvergencia értelmében, azaz

$$f(z_n) \to f(z_0) \qquad ha \qquad u(x_n, y_n) \to u(x_0, y_0) \qquad \text{és} \qquad v(x_n, y_n) \to v(x_0, y_0)$$

3. Folytonosság értelmezése a kételemű számokkal modellezett fizikai folyamatokban

Henri Poincaré (1854-1912) különbséget tett a matematikai és a fizikai folytonosság között, mégpedig a fizikai valóságban létező érzékelési küszöb miatt.[9] Most azonban más szempontok alapján gondolkodom el erről a különbségről. A **Descartes**-koordinátákat használtam, amikor a kételeműek képzeteseivel modelleztem egyfajta minőségi végtelent, a polárkoordináták pedig a fizikailag mérhető mennyiségek, hossz- és szögmértékek. Az előző pontban leírt konvergencia-kritériumok a polárkoordináták esetén is fennállnak, tehát ezek esetén is mindhárom számsíkon elégséges feltétel a számpontok konvergenciájára a polárkoordináták egyenkénti konvergenciája. A két koordináta-rendszer közül a **Descartes**-koordinátarendszer fontossága elsősorban matematikai, értem ez alatt azt, hogy a kételemű számok, mint CH modellek a **Descartes**-koordinátákhoz kötődnek, a polárkoordinátáknak pedig elsősorban fizikai „jelentésük”[10] van, ezek a koordináták invariánsok bizonyos mozgásoknál (pl. **Lorenz**-transzformációnál, **Galilei**-transzformációnál). A komplex számok kivételével sem a klasszikus, sem egy általánosabb mérték-kritériumnak nem felelnek meg általánosan ezek a polárkoordináták, hiszen nemcsak negatív számok, de képzetesek is lehetnek. Ennek ellenére mégis *mértékeknek* tekintem a polárkoordinátákat, mégpedig a *létező fizikai mozgásokra vonatkozó* mozgásszimmetria leírásában betöltött szerepük miatt. A normát *hosszmérték*nek, az argumentumot pedig *szögmérték*nek tekintem.[11] Nem szabad elfelejtkezni arról sem, hogy ezek a mozgásszimmetriák *téridőbeli* mozgásokra vonatkoznak, mondhatnám azt is, hogy *igazi* mozgásokra vonatkoznak, hiszen tapasztalataink szerint minden távolság megtételéhez, minden állapotváltozáshoz időre van szükség, így minden mozgás és változás téridőbeli.

Megjegyzés

Itt meg kell jegyezni, hogy a QM gyakran emlegetett nem-lokalitás fogalma – amely egyfajta „időtlen” kapcsolatot feltételez – nem tapasztalati, hanem egy tapasztalat helytelen értelmezése.[12]

Így tulajdonképpen egy olyan matematika számára kell megfogalmazni a korábbi konvergencia és folytonossági kalkulusok általánosításait, amely matematika már nem „időtlen”, megjelennek benne a téridők speciális matematikai elemei, például a **Lorenz**-transzformációt modellező szorzás hiperbolikus számsíkon, a **Galilei**-transzformációt modellező szorzás a parabolikus számsíkon. A komplex számsík, mint QM-modellre pedig **Richard Feynman** szolgáltat jó példát a kvantumelektrodinamikát (QED) leíró, azaz a pályaintegrál módszerét magyarázó kis könyvében[13]. Bár **Feynman** valószínűségeket számol a komplex normával – mondhatjuk azt, hogy egy valószínűségi *mező* „terét” számolja a normával –, az argumentummal viszont már egyértelműen időt mér.[14]

Eltöprengtem hát, miképp is mérünk tér- és idő-hosszat. Távolságnál van például egy méterrudam – egységnyi hosszmérték – és *megszámlálom*, hogy a kérdéses távolságra hányszor fér rá a hosszegység, majd annak tört részei szükség szerint. Időmérésnél pedig valamilyen periodikus

---

[9] Lásd „*Az új végtelenről*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/162-az-uj-vegtelenrol
[10] Lásd erről például a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikk 9-10. oldalát: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa
[11] Lásd erről a „*Szimmetriák és téridők*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/egyeb/426-szimmetriak-es-teridok
[12] Lásd erről például a „*A fizika matematikája és a matematika fizikája*” című cikket; https://www.infinitemath.hu/filozofia/428-a-fizika-matematikaja-es-a-matematika-fizikaja
[13] Lásd **Richard P. Feynman**, *QED – A megszilárdult fény*, Skolar Kiadó, 2003.
[14] Lásd ennek rövid összefoglalóját a „*Hilbert 1-es és 6-os problémájának összekapcsolása*” című cikk 9. oldalán: https://www.infinitemath.hu/archivum/egyeb/372-hilbert-1-es-es-6-os-problemajanak-osszekapcsolasa

mozgás egy periódusát választjuk egységnek és ennek számlálása, valamint az argumentum figyelembevétele jelenti az idő mérését.

Megjegyzés

Meg kell jegyezni, hogy **Feynman** korábban említett QED-könyvében az argumentummal, tehát egy szögmértékkel méri az időt, ez a komplexek esetén valóban klasszikus értelemben vett periodicitással bír. Ezzel szemben, ha a másik két kételemű számon is az argumentum a mérhető időkoordináta, akkor ezeknek nincs véges mértékű periodicitása, tehát az időmérésben nincs periódusszámlálás csak az argumentum mérése.

Nemcsak a mozgásokat leíró matematikában, de az előbb vázolt mérési folyamatban is együtt van jelen a térbeli és az időbeli mennyiség. Nem tudok távolságot mérni az egységnyi mérték *számlálása* – azaz *időráfordítás* – nélkül, és nem tudok időt mérni egy bizonyos *távolságon* lezajló periodikus mozgás nélkül a komplex esetben, és a hiperbolikus és a parabolikus esetben egy *téridőbeli* argumentum mérése nélkül. Időben mérjük a távolságot és térben mérjük az időt! Pontosan ezt fejezi ki az, amikor a – térbeli és időbeli koordinátáktól függő – polárkoordinátákat nevezem mérhető mennyiségeknek. Ebben az egyszerű gondolatsorban is érzékeltethető, amelyre először **Einstein** speciális relativitáselmélete ébresztett rá bennünket, hogy csak téridő van, nincs tér és nincs idő külön-külön az érzékelhető, mérhető világunkban. A tiszta tér és tiszta idő idealizáció, amelynek matematikai valósága a véges és végtelen mennyiségek viszonyának modellezésére alkalmas. Amíg a **Descartes**-koordinátákban szétválik a véges és a minőségi végtelent reprezentáló elem – mint téridő-modellben pedig a tér és az idő megtestesítői – addig bizonyos polárkoordinátákban, tehát a mérhető mennyiségekben ugyan szintén szétválik a véges és a minőségi végtelent reprezentáló elem, hiszen az argumentum mindig képzetes, a norma pedig a mérhető esetekben valós, de a téridőt tekintve mindkét polárkoordinátában „keveredik” a tér- és idő-jelleg, amivel jól tetten érhető, hogy nem mérhetek teret időbeli és időt térbeli elem nélkül.

A polárkoordináták konvergenciájának matematikai ideája szoros kapcsolatot mutat a fizikai mozgásleírásokkal, hiszen nem mások a speciális transzformációk – például a **Galilei**- és a **Lorentz**-transzformáció – mint speciális mozgások, eltolások, forgatások, ugyanakkor ezek nem mások, mint polárkoordináta-invarianciák. A mozgások általánosabb tárgyalásához azonban szükséges legalább a sebesség fizikai fogalma, s így a deriválás matematikai bevezetése. Ezek lesznek a cikksorozat következő részének témái.

4. Zárszó

E cikkben a kételemű számokon definiálható konvergencia és folytonosság definíciókat körvonalaztam, hangsúlyozva, hogy a komplex számok kivételével csak a valós koordinátáknak a valós számkörben bevezetett konvergenciájára és folytonossági definícióira visszavezetve lehet a parabolikus és a hiperbolikus számkörben konvergenciát és folytonosságot definiálni. Értem egyesek törekvését – például **David Hestenes**ét, a geometriai algebra jeles képviselőjéét – a koordinátákkal történő leírások kerülésére, és az igyekezetét arra, hogy általánosabb, tömörebb absztrakt fogalmakkal fogalmazza meg az összefüggéseket. Ezt épp a kételemű számok kapcsán tartom hiábavaló küzdelemnek, a fentiekben ezt körvonalaztam. A **Descartes**-féle és a polárkoordináták kapcsolata teszi ezt érthetővé, a két koordinátarendszer kapcsolata pedig fontos összefüggésekre világít rá.

Melléklet – A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (M1)$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. Az kételemű számok $z = x + \boldsymbol{\delta} y$ alakját *algebrai alaknak* fogom nevezni, az x, y számokat a kételemű számpontok **Descartes**-koordinátáinak is hívom majd, időnként egyszerűen csak koordinátáknak.

A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következő *trigonometrikus alak*okhoz jutok:

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \qquad (M2)$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j}sp\varphi) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (M3)$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható *exponenciális alak*kal:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \qquad (M5)$$

Az exponenciális alak könnyen levezethető a trigonometrikus alakból:

$$z = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{\delta}\sin\varphi) = \varrho(\cos\boldsymbol{\delta}\,\varphi + \sin\boldsymbol{\delta}\,\varphi) = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \qquad (M6)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz a *normának* nevezett ρ-ra és az *argumentumnak* nevezett φ-re a következő:

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{x - \boldsymbol{\delta} y}} = \ln\sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{z}}} \qquad (M7)$$

A *normát* és az *argumentumot* a kételemű számok *polárkoordinátáinak* fogom nevezni.

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ = i, j, k** aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta} y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta} y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.

Az (M7) a polárkoordinátákat fejezte ki a **Descartes**-koordinátákkal, a polárkoordinátákkal kifejezett **Descartes**-koordináták pedig a következők:

$$x = \varrho\mathrm{COS}\varphi \quad , \quad y = \varrho\mathrm{SIN}\varphi \qquad (M8)$$

Ahol COS és SIN az adott számsíkon értelmezett trigonometrikus függvények, azaz cos és sin függvények a komplex számsíkon, cp és sp a parabolikus, valamint cosh és sinh a hiperbolikus számok síkján. A ϱ az adott számsíkon értelmezett norma, φ pedig az adott számsíkon értelmezett argumentum.