Az idő mindenekelőtt

Koordinátarendszerek és a téridő

„A világmindenség nem lesz kevésbé misztikus, ha tudunk egyetmást róla. Sokkal csodálatosabb az igazság, mint azt a múltban bármelyik művész megálmodhatta!”
(Richard Feynman)[1]

Sokat írtam már arról, hogy a kételemű számok[2] képzeteseivel modellezhetőek a cantori kontinuumhipotézis (CH)[3] egyes verziói. Ugyanakkor a kételemű számok téridőviszonyokat tükröznek, hiszen például a parabolikus egységvektorokkal való szorzás a **Galilei**-transzformációt[4] modellezi, a hiperbolikus egységvektorral való szorzás pedig a **Lorenz**-transzformációt, így a newtoni téridőviszony a parabolikus számsíkon, a speciális relativitáselméletben megfogalmazott téridőviszony a hiperbolikus számsíkon modellezhető, ha a teret leszűkítem egy dimenzióra, amit inerciarendszereknél megtehetek, hiszen a gyorsulásmentes rendszerekben a térbeli irányok és a térbeli pontok egyenértékűek.

Amint a kételemű számok algebrai alakjánál is megkülönböztethető egy valós és egy képzetes rész, hasonlóan polárkoordinátákkal felírt alakokban – így a trigonometrikus és az exponenciális alakban is – elkülöníthető egy valós és egy képzetes elem.[5] **Nagyon érdekes viszont az, hogy a teret és az időt modellező valós és képzetes elemek eltérnek a két koordináta rendszerben**, hiszen a **Descartes**-féle derékszögű kordinátarendszerben a valós koordinátatengely az idő, a *képzetes* koordinátatengely pedig a tér modellje, ha a teret leszűkítem egy dimenzióra[6], ezzel szemben a polárkoordináta-rendszerben a *képzetes* argumentum[7] – azaz egy adott egyenestől mért szögmérték – modellezi az időt, a norma pedig – az adott egyenes egy adott pontjától mért – térbeli mérték megfelelője. Így tehát **a polárkoordináta-rendszerben az idő** modellje **a képzetes** elem, szemben a **derékszögű koordinátarendszerrel**, ahol a **tér** modellje a **képzetes** elem.

Megjegyzés

Ugyan az előzőkből következik, de érdemes az érthetőség kedvéért elismételni, hogy a **Descartes**-koordinátarendszernél a tér imaginárius volta a hiperbolikusok által modellezhető **Lorentz**-transzformációból, illetve a parabolikusokkal modellezhető **Galilei**-transzformáció adódik. A

---

[1] **Richard Feynman**, *Mai Fizika* I. kötet 45. oldal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1969
[2] Lásd a 1. Melléklet ben a kételemű számok alaptulajdonságait.
[3] A CH feltételezése szerint a valós számok számossága – azaz a kontinuumszámosság – nagyobb a természetes számok számosságánál, a megszámlálható soknál, és közöttük nincs más végtelen nagy számosság. Ennek két alternatívája az, hogy közöttük egyetlen egy, vagy legalább kettő – amiből következik, hogy végtelen sok – végtelen nagy számosság létezik.
[4] Lásd erről „*A Galilei-transzformáció és a parabolikus számok*” című cikket;
https://www.infinitemath.hu/matematika/412-a-galilei-transzformacio-es-a-parabolikus-szamok
[5] Lásd a 1. Melléklet M1, M5 és M7 képletét.
[6] Természetesen ezt csak gyorsulásmentes rendszer modellezése esetén tehetem meg.
[7] Lásd a 1. Melléklet M7 képletét.

polárkoordináta-rendszerben az argumentum időt modellező voltát pedig **Feynman** QED-értelmezése támogatja meg, az argumentum képzetes voltához pedig lásd az 1. Melléklet M5-ös és M7-es képletét.

Tehát az a furcsa – legalábbis első pillantásra különös – helyzet állt elő, hogy az egyik koordinátarendszerben a tér modellje képzetes, a másikban az időnek imaginárius a megfelelője. Azért is találhatjuk ezt meglepőnek, mert a képzetesek a végtelenek minőségi modelljei egy nagyon speciális értelemben, azaz a CH-ban[8] megfogalmazott végtelen létét/nemlétét tekintve. Így felmerül a kérdés, hogyha mind a **Descartes**-koordinátarendszerben, mind a polárkoordináta-rendszerben végtelent modellez a képzetes, akkor miképp lehetséges, hogy az egyikben a térnek megfelelő elem, a másikban az időnek megfelelő elem modellez valamiféle végtelent. Ennek az első ránézésre ellentmondásnak a megoldása a végtelen kettős jellegében rejlik, abban, hogy a képzetesek mind extenzív, mind intenzív értelemben modellezik a végtelent.[9]

A két koordinátarendszerben a tér- és idő-modellül szolgáló koordináták valós és képzetes voltát az alábbi táblázat mutatja be:

	Descartes-koordinátarendszer	**Polárkoordináta-rendszer**
Idő-modell	**Valós koord.**	**Képzetes koord. (argumentum)**: (az idő) a **tér** (minőségi) aktuális **intenzív** végtelenje
Tér-modell	**Képzetes koord.**: (a tér) az **idő** (minőségi) aktuális **extenzív** végtelenje	**Valós koord. (norma)**

Hogy könnyebb legyen mindezt befogadni, képzeljük el a következőket:

- A fenti táblázatban a **polárkoordináta**-rendszerben gondoljuk el az időt, mint a tér *intenzív* végtelenjét. A tér minden pontjában a térre merőlegest állítva az adott (térbeli) ponthoz („itthez”) tartozó *időként* interpretálom a merőleges egyenes pontjait, amelyek az adott térbeli ponttól infinitezimális „tértávolságra” vannak, azaz 0-nál nagyobb, de minden n-re 1/n-nél kisebb „tértávolságra”. Így az idővonalak a tér minden pontjában a térre merőlegesen, a **Minkowski**-térnek megfelelő struktúrát alkotnak a térrel.
- A fenti táblázatban a **Descartes**-koordinátarendszert tekintve gondoljuk el a teret, mint az idő végtelenjét *extenzív* értelemben. Ezt nehezebb elképzelni, de nem lehetetlen, ha segítségül hívjuk a projektív geometria végtelen távoli – később ideális pontnak átnevezett – elemeit[10]. A potenciálisan végtelen valós számegyenest, mint idővonalat kiegészítjük extenzív végtelen távoli (idő)ponttal/pontokkal, majd egy adott (idő)pontjában, a „mostban” tekintjük e pontra

[8] Lásd az 2. lábjegyzetet.
[9] Lásd erről következő két cikket:
„*A végtelen kicsiben és nagyban I.*”;
https://www.infinitemath.hu/archivum/matematika/442-a-vegtelen-kicsiben-es-nagyban-i
„*A végtelen kicsiben és nagyban II.*”
https://www.infinitemath.hu/matematika/474-a-vegtelen-kicsiben-es-nagyban-ii
[10] A projektív geometria homogén koordinátáinak a kételemű számokkal való megfeleltetését a 2. Melléklet tartalmazza nagyon vázlatosan.

illeszkedő sugársort, amelyben egy adott nyaláb egyeneseit kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük az idővonal közönséges pontjainak, a kiegészítő nyaláb egyeneseit pedig a végtelen távoli időpontnak/pontoknak feleltetjük meg. Az adott (időbeli) ponthoz („mosthoz”) tartozó *térként* interpretálom a sugársor azon nyalábjának egyeneseit, amelyeket az idővonal végtelen távoli pontjainak feleltettem meg. E térként interpretált egyenes/egyenesek minden pontját úgy tekintem, hogy az adott idővonal adott pontjától („mosttól”) végtelen „idő-távolságra” vannak, azaz minden n-re n-nél nagyobb „idő távolságra”.

A mennyiségek rendezettségét tekintve, azaz arra gondolva, hogy az infinitezimális mennyiségek – aktuális intenzív végtelenek – kisebbek a véges valósoknál, azok pedig kisebbek az aktuális extenzív végtelennél, a fenti táblázat alapján mindig az idő előzi meg a teret, hiszen az idő vagy infinitezimális modell a tér véges valós modelljéhez képest (a polárkoordinátás modellben), vagy pedig véges valós számmodell a tér aktuális extenzív végtelen modelljéhez viszonyítva (a **Descartes**-féle rendszerben). Így **mindkét leírásban az idő elsődleges a térrel szemben**, annak ellenére, hogy hol valós, hol képzetes szám, azaz hol véges, hol pedig végtelen szám modellezi. A mennyiség minőségbe csapására gondolva ez azt jelenti, hogy **mindkét rendszer időből kibontakozó teret mutat**.

A fenti táblázat az elmondottakon túl is sok információt tartalmaz. Például megérthető általa, hogy miért gondolják sokan, még fizikusok is, hogy az idő illúzió csupán. Ezt a gondolatot magyarázhatja, hogy az időt imaginárius szám modellezi a téridő polárkoordinátákkal történő leírásában, amely a mérhető mennyiségekkel való leírása a téridőnek. Számomra az is érdekes, hogy a képzetes számok végtelenmodelljéhez eljutva én a **Descartes**-féle absztrakt koordinátarendszer segítségével jutottam el a téridő és egy véges/végtelen modell kapcsolatához, és nem a polárkoordináták fizikai mérhetőségének segítségével. Ez utóbbiak véges/végtelenjének téridő-kapcsolatát csak ezek után láttam be.

Ne feledjük, hogy a fentiek csak *értelmezések*, segíthetik a képzeletet, de csak annyiban igazak, amennyiben megfelelnek a matematikai tartalomnak, amelyet egyrészt a kételemű számok alaptulajdonságai, másrészt e számok képzeteseinek végtelen-kapcsolata, továbbá a téridőt modellező szerepe jelenti.

Bár sok és mély matematikai összefüggést tartalmaz a cikk, de sok interpretációra, magyarázatra is kiterjed, amikkel talán azok számára is érthetővé válnak a matematika régi/új szám és végtelen fogalmai, akik ezzel nem foglalkoznak, és felsejlik számukra is a matematikai összefüggések misztikus szépsége.

1. Melléklet – A kételemű számok elemi tulajdonságai

Egy z kételemű szám, ha

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right) \qquad (M1)$$

Ahol x és y valós számok, **δ = i, j, k** (**i**^{2}=−1, **j**^{2}=0, **j**≠0, **k**^{2}=1, **k**≠1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. Az kételemű számok $z = x + \boldsymbol{\delta} y$ alakját *algebrai alaknak* fogom nevezni, az x, y számokat a kételemű számpontok **Descartes**-koordinátáinak is hívom majd, időnként egyszerűen csak koordinátáknak.

A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következő *trigonometrikus alak*okhoz jutok:

$$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi) = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi) \qquad \text{a komplex számoknál} \qquad (M2)$$

$$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right) = \varrho(cp\,\varphi + \boldsymbol{j}sp\varphi) \qquad \text{a parabolikus számoknál} \qquad (M3)$$

$$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau) = \varrho(\cosh\varphi + \mathbf{k}\sinh\varphi) \qquad \text{a hiperbolikus számoknál} \qquad (M4)$$

Mindhárom síkra egységesen felírható *exponenciális alak*kal:

$$z = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \qquad (M5)$$

Az exponenciális alak könnyen levezethető a trigonometrikus alakból:

$$z = \varrho(\cos\varphi + \boldsymbol{\delta}\sin\varphi) = \varrho(\cos\boldsymbol{\delta}\,\varphi + \sin\boldsymbol{\delta}\,\varphi) = \varrho e^{\boldsymbol{\delta}\varphi} \qquad (M6)$$

A fentiekben mindhárom számsíkra általánosan igaz a *normának* nevezett ρ-ra és az *argumentumnak* nevezett φ-re a következő:

$$\varrho = \sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}\,\varphi = \ln z - \ln\varrho = \ln\frac{z}{\varrho} = \ln\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{\sqrt{x^2 - \boldsymbol{\delta}^2 y^2}} = \ln\sqrt{\frac{x + \boldsymbol{\delta} y}{x - \boldsymbol{\delta} y}} = \ln\sqrt{\frac{\bar{z}}{\bar{z}}} \qquad (M7)$$

A *normát* és az *argumentumot* a kételemű számok *polárkoordinátáinak* fogom nevezni.

Ahol **δ,** mint fent, azaz **δ = i, j, k** aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó, és $\bar{z}$ a z konjugáltját jelöli, azaz mindhárom számsíkon

$$\bar{z} = x - \boldsymbol{\delta} y \quad \text{ha} \quad z = x + \boldsymbol{\delta} y$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények nem szorulnak magyarázatra, de a parabolikus függvények definíciót érdemes megismételni; a parabolikus – vagy másképp duális – számokon értelmezett függvényeknél a **z** parabolikus szám argumentuma **arg z = y/x**, a koszinusz függvény parabolikus megfelelője a **cp [arg(z)] ≡ 1** függvény, a szinusz függvény parabolikus megfelelője pedig a **sp [arg(z)] = y/x**, végül a tangens függvény parabolikus megfelelője a **tp [arg(z)] = y/x**.

Az (M7) a polárkoordinátákat fejezte ki a **Descartes**-koordinátákkal, a polárkoordinátákkal kifejezett **Descartes**-koordináták pedig a következők:

$$x = \varrho\mathrm{COS}\varphi \quad , \quad y = \varrho\mathrm{SIN}\varphi \qquad (M8)$$

Ahol COS és SIN az adott számsíkon értelmezett trigonometrikus függvények, azaz cos és sin függvények a komplex számsíkon, cp és sp a parabolikus, valamint cosh és sinh a hiperbolikus számok síkján. A ϱ az adott számsíkon értelmezett norma, φ pedig az adott számsíkon értelmezett argumentum.

2. Melléklet

A kételemű számok és a homogén koordináták

Az itt következőket tartalmazza „*A kételemű számok, mint homogén koordinátával leírt számegyenesek*”[11] című korábbi írásom is.

Induljunk el azon az úton, amint a számsíkokon a számok polárkoordinátás alakjához jutunk:

$$z = x + \boldsymbol{\delta} y = x\left(1 + \boldsymbol{\delta}\frac{y}{x}\right)$$

Ahol **δ = i, j, k** (**i**^{2}=-1, **j**^{2}=0, **k**^{2}=1) aszerint, hogy komplex, parabolikus, vagy hiperbolikus számról van szó. A komplex számoknál $\frac{y}{x}$ =**tgφ**, a hiperbolikus számoknál pedig $\frac{y}{x}$ =**thτ** bevezetésével a következőket kapom

$z = x(1 + \boldsymbol{i}\tan\varphi)$ a komplex számoknál

$z = x\left(1 + \boldsymbol{j}\frac{y}{x}\right)$ a parabolikus számoknál

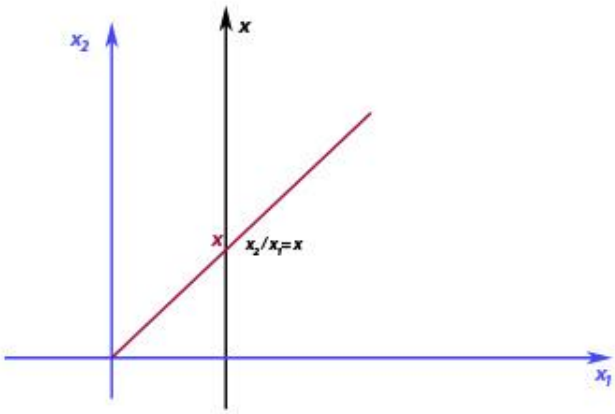
$z = x(1 + \boldsymbol{k}\tanh\tau)$ a hiperbolikus számoknál

A fenti első egyenletben felírt alak szinte „kiált” egyfajta homogén koordinátarendszerbeli értelmezésért. A homogén koordináták haszna épp az, hogy a végtelen távoli pontokat véges koordinátákkal fejezzük ki. A kételemű számok tiszta képzetes részének végtelen-értelmezése is pontosan ezt teszi: a végtelent véges „koordinátájú” számponttal jellemzi.

1. Parabolikus (szám)egyenes

A parabolikus számegyenes esetén a számegyenesre egyetlen ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik.

Ha – az 1. ábrán fekete színnel jelölt – (szám)egyenesen egy közönséges (szám)pont **Descartes**-féle koordinátája (x), akkor $x_1 \neq 0$ esetén az illesztett homogén koordinátarendszerben az x_2/x_1 homogén koordinátával leírható elemet rendelem, melyre $x = x_2/x_1$, melyek az origón átmenő x_2/x_1 meredekségű egyenesek. (Lásd az 1. ábrát).



1. ábra

Az $x_1=0$ homogén koordinátájú egyenes pedig a számegyenes egyetlen végtelen távoli pontjának a megfelelője. Ily módon az origón átmenő valamennyi

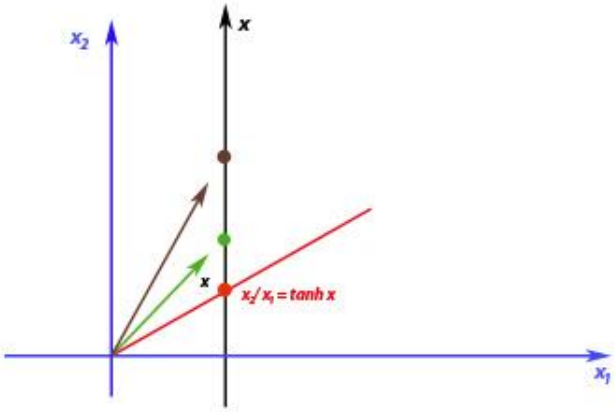
[11] Lásd: https://www.infinitemath.hu/index.php/matematika/item/176-a-k%C3%A9telem%C5%B1-sz%C3%A1mok-mint-homog%C3%A9n-koordin%C3%A1t%C3%A1val-le%C3%ADrt-sz%C3%A1megyenesek.html

egyenesnek egyetlen számpont felel meg az x számegyenesen, melynek egyetlen végtelen távoli pontja van.

Azt **mondom tehát, hogy az egyetlen végtelen távoli ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a parabolikus számsíkot adja.**

2. Hiperbolikus (szám)egyenes

A hiperbolikus számegyenes esetén a számegyenesre végtelen sok ideális (végtelen távoli) pont illeszkedik. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak. (A 2. ábrán fekete színnel rajzolt számegyenes piros színnel jelölt pontja közönséges pont, a zöld és a barna pontok ideális pontok. Ezen az ábrán torzítottan a végtelen távoli pontok is a végesben vannak ábrázolva.)



2. ábra

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes közönséges **Descartes**-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához a számsík x_2/x_1=tanhx homogén koordinátával leírható elemét rendelem $x_1 \neq 0$ esetén, ezek az elemek olyan, az origón átmenő egyenesek, melyek meredeksége kisebb, mint egy. (Lásd például a 2. ábrát, és a piros színnel rajzolt egyenest.) Ily módon az origóra illeszkedő sugársorból csak egy nyaláb egyeneseit feleltettem meg kölcsönösen egyértelműen a számegyenesem *közönséges* pontjainak. A sugársor többi egyenesét a számegyenes *végtelen távoli* pontjaihoz rendelhetem. Az abszolútértékben egynél nagyobb meredekségű egyenesek meredekségét x_1/x_2=tanhx ($x_2 \neq 0$) módon írom le. (Ezek egyike a 2. ábrán barna színnel rajzolt egyenes.) Az $x_1=x_2$ egyeneshez a számegyenes „legkisebb” végtelen távoli pontját, az $x_1=-x_2$ egyeneshez a számegyenes negatív számtartományában legnagyobb végtelen távoli pontját rendelem. (Ezek egyike a 2. ábrán zöld színnel rajzolt egyenes.) Ily módon az origón átmenő egyenesek közül egy kivétellel mindegyikhez egyetlen közönséges, vagy végtelen távoli – azaz ideális – számpont felel meg az x számegyenesen, melynek végtelen sok végtelen távoli pontja van. Az origóra illeszkedő sugársor egyenesei közül egyedül az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen sok ideális ponttal bővített számegyenes homogén koordinátákkal való leírása a hiperbolikus számsíkot adja.

3. Komplex, vagy elliptikus (szám)egyenes

A komplex számegyenes esetén a számegyenesre nem illeszkedik egyetlen ideális (végtelen távoli) pont sem. Ebben az esetben is a homogén koordinátákra való áttérésnél a homogén koordinátarendszer origójára illeszkedő sugársor elemeit feleltetem meg a számegyenes pontjainak.

A homogén koordinátákra való áttérésnél a számegyenes **Descartes**-féle koordinátájú (x) (szám)pontjához $x_1 \neq 0$ és $|x|<\pi/2$ esetén a számsíknak a $tgx=x_2/x_1$ homogén koordinátával leírható elemét rendelem, ezek az elemek az origón átmenő egyenesek. Ily módon az origóra illeszkedő sugársor $x_1=0$ elemének kivételével minden elemét hozzárendeltem a számegyenes $(-\pi/2,+\pi/2)$ szakasz számpontjaihoz. Így egy tetszőleges hosszúságú[12] véges nyílt szakasz pontjait tudtam kölcsönösen egyértelműen megfeleltetni az origóra illeszkedő sugársor egyeneseinek úgy, hogy az $x_1=0$ egyeneshez nem rendeltem egyetlen számegyenesre illeszkedő pontot sem.

Azt mondom tehát, hogy a végtelen távoli ponttal nem rendelkező számegyenes, (pontosabban tetszőlegesen nagy számszakasz) homogén koordinátákkal való leírása a komplex számsíkot adja.

[12] Tetszőleges hosszúságú, hiszen $tgx=x_2/x_1$ $(-\pi/2<x<\pi/2)$ esetén $x= x'\pi/L$ helyettesítéssel egy L hosszúságú (-L/2,L/2) nyílt szakasz pontjait rendelhetem az origón átmenő egyenesekhez.